УДК 517.5

Ю. И. Мельник, д-р физ.-мат. наук (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

О СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ ДВОЙНЫХ РЯДОВ ЭКСПОНЕНТ, ПРЕДСТАВЛЯЮЩИХ РЕГУЛЯРНЫЕ ФУНКЦИИ В ПРОИЗВЕДЕНИЯХ ВЫПУКЛЫХ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

Exact in order estimates are obtained in the uniform and integral metrics for the deviation of partial sums of a double series of exponents that represents a function regular in the product of convex polygons; this function is either continuous on the product of closed polygons or belongs to the Smirnov class.

У рівномірній та інтегральній метриках одержані точні за порядком оцінки відхилення часткових сум подвійного ряду експонент, що зображають регулярну в добутку опуклих многокутників функцію, яка або неперервна на добутку замкнених многокутників, або належить класу Смирнова.

1. Пусть M, M_s, $s = 1, 2$, — выпуклые многоугольники в плоскостях комплексных переменных (z), (z_s) с вершинами в точках $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_N$, $N \ge 3$, γ_{s1}, $\gamma_{s2}, \ldots, \gamma_{sN_s}$, $N_s \ge 3$, соответственно. Пусть, далее,

$$\mathfrak{L}(\lambda) = \sum_{k=1}^{N} d_k \exp(\gamma_k \lambda), \ d_k \ne 0, \ \mathfrak{L}_s(\lambda) = \sum_{k=1}^{N_s} d_{sk} \exp\left(\gamma_{sk} \lambda\right), \ d_{sk} \ne 0,$$

— экспоненциальные полиномы и

$$\Lambda = \left\{\lambda_m\right\}_{m=1}^{m_0} \cup \left(\bigcup_{j=1}^{N} \left\{\lambda_m^{(j)}\right\}_{m=m(j)}^{\infty} \right), \quad \Lambda_s = \left\{\lambda_{sm}\right\}_{m=1}^{m_0^{(s)}} \cup \left(\bigcup_{j=1}^{N_s} \left\{\lambda_{sm}^{(j)}\right\}_{m=m_s(j)}^{\infty} \right),$$

— множества их корней. Через $AH^{\omega}(M)$ обозначим класс регулярных в M и непрерывных на $\overline{M}$ функций $f(z)$, для которых $|f(z')-f(z'')| \le A\,\omega(|z'-z''|)$, $z', z'' \in \overline{M}$, где $\omega(h)$ — произвольный фиксированный модуль непрерывности (здесь и в дальнейшем через A, A_p и т. п. обозначаются различные в разных выражениях постоянные, зависящие от явно выписанных индексов). Аналогично через $AH^{\omega}(\overline{M}_1 \times \overline{M}_2)$ обозначим класс регулярных в $M_1 \times M_2$ функций $\varphi(z_1, z_2)$, для которых

$$|\varphi(z_1', z_2') - \varphi(z_1'', z_2'')| \le A\{\omega_1(|z_1' - z_1''|) + \omega_2(|z_2' - z_2''|)\},$$
$$z_1', z_2'' \in \overline{M}_1, \quad z_2', z_2'' \in \overline{M}_2,$$

где $\omega_1(h)$, $\omega_2(h)$ — произвольные фиксированные модули непрерывности. Через $E^p(M)$, $E^p(M_1 \times M_2)$, $p \ge 1$, обозначим, как обычно, банаховы пространства функций классов Смирнова на M и на $M_1 \times M_2$. Для функций $f \in E^p(M)$, $\varphi \in E^p(M_1 \times M_2)$ и натуральных n, n_1, n_2 пусть

$$S_n(f)(z) = \sum_{m=1}^{m_0} \kappa(f; \lambda_m) \exp(\lambda_m z) / \mathfrak{L}'(\lambda_m) +$$
$$+ \sum_{j=1}^{N} \sum_{m=m(j)}^{n} \kappa\left(f; \lambda_m^{(j)}\right) \exp\left(\lambda_m^{(j)} z\right) / \mathfrak{L}'\left(\lambda_m^{(j)}\right), \tag{1}$$

$$S_{n_1, n_2}(\varphi)(z_1, z_2) =$$

$$= \sum_{m_1=1}^{m_0^{(1)}} \sum_{m_2=1}^{m_0^{(2)}} \kappa\left(\varphi; \lambda_{1m_1}, \lambda_{2m_2}\right) \exp\left(\lambda_{1m_1} z_1 + \lambda_{2m_2} z_2\right) / \mathfrak{L}_1'\left(\lambda_{1m_1}\right) \mathfrak{L}_2'\left(\lambda_{2m_2}\right) +$$

$$+ \sum_{m_1=1}^{m_0^{(1)}} \sum_{j_2=1}^{N_2} \sum_{m_2=m_2(j_2)}^{n_2} \kappa\left(\varphi;\lambda_{1m_1},\lambda_{2m_2}^{(j_2)}\right)\exp\left(\lambda_{1m_1} z_1 + \lambda_{2m_2}^{(j_2)} z_2\right)/\mathfrak{L}_1'\left(\lambda_{1m_1}\right)\mathfrak{L}_2'\left(\lambda_{2m_2}^{(j_2)}\right) +$$

$$+ \sum_{m_2=1}^{m_0^{(2)}} \sum_{j_1=1}^{N_1} \sum_{m_1=m_1(j_1)}^{n_1} \kappa\left(\varphi;\lambda_{1m_1}^{(j_1)},\lambda_{2m_2}\right)\exp\left(\lambda_{1m_1}^{(j_1)} z_1 + \lambda_{2m_2} z_2\right)/\mathfrak{L}_1'\left(\lambda_{1m_1}^{(j_1)}\right)\mathfrak{L}_2'\left(\lambda_{2m_2}\right) +$$

$$+ \sum_{j_1=1}^{N_1} \sum_{j_2=1}^{N_2} \sum_{m_1=m_1(j_1)}^{n_1} \sum_{m_2=m_2(j_2)}^{n_2} \frac{\kappa\left(\varphi;\lambda_{1m_1}^{(j_1)},\ \lambda_{2m_2}^{(j_2)}\right)\exp\left(\lambda_{1m_1}^{(j_1)} z_1 + \lambda_{2m_2}^{(j_2)} z_2\right)}{\mathfrak{L}_1'\left(\lambda_{1m_1}^{(j_1)}\right)\mathfrak{L}_2'\left(\lambda_{2m_2}^{(j_2)}\right)}, \tag{2}$$

где, например,

$$\kappa\left(f, \lambda_m^{(j)}\right) = \sum_{k=1}^{N} d_k \int_{\gamma_{jk}} f(\zeta) \exp\left\{-\lambda_m^{(j)} \left(\zeta - \gamma_k\right)\right\} d\zeta, \tag{3}$$

$$\kappa\left(\varphi, \lambda_{1m_1}^{(j_1)}, \lambda_{2m_2}^{(j_2)}\right) =$$

$$= \sum_{k_1=1}^{N_1} \sum_{k_2=1}^{N_2} d_{1k_1} d_{2k_2} \int_{\gamma_{j_1k_1}} \int_{\gamma_{j_2k_2}} \varphi(\zeta, \eta) \exp\left\{-\lambda_{1m_1}^{(j_1)}\left(\zeta - \gamma_{k_1}\right) - \lambda_{2m_2}^{(j_2)}\left(\eta - \gamma_{k_2}\right)\right\} d\zeta\, d\eta, \tag{4}$$

γ_{jk} — часть контура ∂M, на котором $|\exp\{-\lambda_m^{(j)}(\zeta - \gamma_k)\}| \le A$, $\gamma_{j_s k_s}$, $s = 1, 2$, — часть контура ∂M_s, на котором $|\exp\{-\lambda_{sm_s}^{(j_s)}(\zeta - \gamma_{k_s})\}| \le A$. Аналогичные формулы имеются для $\kappa(f; \lambda_m)$, $\kappa(\varphi; \lambda_{1m_1}, \lambda_{2m_2})$, $\kappa(\varphi; \lambda_{1m_1}^{(j_1)}, \lambda_{2m_2})$, $\kappa(\varphi; \lambda_{1m_1}, \lambda_{2m_2}^{(j_2)})$. Отметим, что $S_n(f)(z)$ — частная сумма ряда экспонент, соответствующего $f(z)$, а $S_{n_1, n_2}(\varphi)(z_1; z_2)$ — частная сумма ряда экспонент, соответствующего $\varphi(z_1; z_2)$. Положим

$$\|f\|_p := \left(\int_{\partial M} |f(z)|^p |dz|\right)^{1/p}, \quad \|\varphi\|_p := \left(\int_{\partial M_1} \int_{\partial M_2} |\varphi(z_1, z_2)|^p |dz_1| |dz_2|\right)^{1/p},$$

и если $f \in AH^{\omega}(\overline{M})$, $\varphi \in AH^{\omega}(\overline{M}_1 \times \overline{M}_2)$, то

$$\|f\| := \max_{z \in \overline{M}} |f(z)|, \quad \|\varphi\| := \max_{z_s \in \overline{M}_s,\, s=1,2} |\varphi(z_1, z_2)|.$$

Известны следующие результаты [1, 2].

Теорема A. *Пусть* $f \in AH^{\omega}(\overline{M})$ *и выполняются условия*

$$\sum_{k=1}^{N} d_k f(\gamma_k) = 0, \quad \int_0^h (\omega(t)/t)\, dt + h \int_h^{2\pi} (\omega(t)/t^2) \le A\omega(h).$$

Тогда $\|f - S_n(f)\| \le A\omega(1/n)\ln n$.

Для функции $f \in E^p(M)$ определим интегральный модуль непрерывности по формуле

$$\omega_p(f, h) = \sup_{|t| \le h} \left\{ \int_0^L \left| f\big(z(u+t)\big) - f\big(z(u)\big) \right|^p du \right\}^{1/p},$$

где $z(u)$ — параметрическое уравнение контура ∂M: $z(u) = \gamma_j + (\gamma_{j+1} - \gamma_j)(u - L_{j-1})$ при

$$L_{j-1} \le u \le L_j,\ j = 1, 2, \dots, N,\ l_j = |\gamma_{j+1} - \gamma_j|,\ L_j = \sum_{k=1}^{j} l_k,\ L \equiv L_N = \sum_{k=1}^{N} l_k.$$

Положим, далее,

$$\delta_p(f, h) = \sum_{k=1}^{N} \left\{ \left(\int_0^h \left| f\Big(\gamma_j + \big(\gamma_{j+1} - \gamma_j\big)\, \theta/2\pi\Big) \right|^p d\theta \right)^{1/p} + \right.$$

$$\left. + \left(\int_{2\pi - h}^{2\pi} \left| f\Big(\gamma_j + \big(\gamma_{j+1} - \gamma_j\big)\, \theta/2\pi\Big) \right|^p d\theta \right)^{1/p} \right\}$$

(ясно, что $\delta_p(f, h) \downarrow 0,\ h \to 0$).

Теорема B. *Пусть* $f \in E^p(M)$, $1 < p < \infty$. *Тогда*

$$\| f - S_n(f) \|_p \le A_p \{ \omega_p(f, 1/n) + \delta_p(f, 1/n) \}.$$

В данной работе доказаны аналоги теорем A, B в двумерном случае.

2. Теорема 1. *Пусть* $\varphi \in AH^{\omega}(\overline{M}_1 \times \overline{M}_2)$ *и выполняются условия*

$$\sum_{k=1}^{N_1} d_{1k}\, \varphi\big(\gamma_{1k}, z_2\big) \equiv 0. \quad \sum_{k=1}^{N_2} d_{2k}\, \varphi\big(z_1, \gamma_{2k}\big) \equiv 0, \quad z_s \in \overline{M}_s, \quad s = 1, 2, \tag{5}$$

$$\int_0^h \big(\omega_s(t)/t\big)\, dt + h \int_h^{2\pi} \big(\omega_s(t)/t^2\big)\, dt \le A_s \omega_s(h), \quad s = 1, 2. \tag{6}$$

Тогда

$$\| \varphi - S_{n_1, n_2}(\varphi) \| \le A \Big\{ \omega_1(1/n_1) \ln n_1 + \omega_2(1/n_2) \ln n_2 +$$

$$+ \Big(\min_{s = 1, 2} \omega_s(1/n_s) \Big) \ln n_1 \ln n_2 \Big\}. \tag{7}$$

Положим

$$\omega_p^{(1)}(\varphi; h) = \left(\int_{\partial M_1} \omega_p^p\big(\varphi(z_1, \cdot); h\big) |dz_1| \right)^{1/p},$$

$$\omega_p^{(2)}(\varphi; h) = \left(\int_{\partial M_2} \omega_p^p\big(\varphi(\cdot, z_2); h\big) |dz_2| \right)^{1/p},$$

$$\delta_p^{(1)}(\varphi; h) = \left(\int_{\partial M_1} \delta_p^p\big(\varphi(z_1, \cdot); h\big) |dz_1| \right)^{1/p},$$

$$\delta_p^{(2)}(\varphi; h) = \left(\int_{\partial M_2} \delta_p^p\big(\varphi(\cdot, z_2); h\big) |dz_2| \right)^{1/p}.$$

Отметим, что из теоремы Лебега следует $\omega_p^{(s)}(\varphi, h) \to 0$, $\delta_p^{(s)}(\varphi, h) \to 0$, $h \to 0$.

Теорема 2. *Пусть* $\varphi \in E^p(M_1 \times M_2)$, $1\ p < \infty$. *Тогда*

$$\|\varphi - S_{n_1, n_2}(\varphi)\|_p \le A_p^{(1)}\{\omega_p^{(1)}(\varphi; 1/n_1) + \delta_p^{(1)}(\varphi; 1/n_1)\} + \\ + A_p^{(2)}\{\omega_p^{(2)}(\varphi; 1/n_2) + \delta_p^{(2)}(\varphi; 1/n_2)\}. \tag{8}$$

Доказательство. Введем оператор $S_n^{(1)}, S_n^{(2)}$ с помощью соотношений

$$S_n^{(1)}(\varphi)(z_1, z_2) = S_n\{\varphi(\cdot, z_2)\}(z_1), \tag{9}$$

$$S_n^{(2)}(\varphi)(z_1, z_2) = S_n\{\varphi(z_1, \cdot)\}(z_2). \tag{10}$$

Отметим следующие свойства операторов S_{n_1, n_2}, $S_n^{(1)}$, $S_n^{(2)}$:

1) операторы S_{n_1, n_2}, $S_n^{(1)}$, $S_n^{(2)}$ линейны;

2) $S_{n_1, n_2}(\varphi) = S_{n_1}^{(1)}\left(S_{n_2}^{(2)}(\varphi)\right) = S_{n_2}^{(2)}\left(S_{n_1}^{(1)}(\varphi)\right)$;

3) $\|S_n^{(\nu)}\|_{A\mathring{H}^{\omega}(\overline{M}_1 \times \overline{M}_2) \to A\mathring{H}^{\omega}(\overline{M}_1 \times \overline{M}_2)} \le A_\nu \ln n$, $\nu = 1, 2$, $\omega_\nu(h)$, $\nu = 1, 2$, удовлетворяют условиям (6), а $A\mathring{H}^{\omega}(\overline{M}_1 \times \overline{M}_2)$ — класс функций $\varphi \in \in AH^{\omega}(\overline{M}_1 \times \overline{M}_2)$, для которых выполняются соотношения (5);

4) $\left\| S_n^{(\nu)} \right\|_{E^p(M_1 \times M_2) \to E^p(M_1 \times M_2)} \le A_p^{(\nu)}$, $1 < p < \infty$, $\nu = 1, 2$. Свойства 1, 2 проверяются непосредственно с использованием соотношений (1) – (4), (9), (10). Свойства 3, 4 легко следуют из (9), (10) и теорем А, В.

Пусть, далее, X обозначает одно из пространств $A\mathring{H}^{\omega}(\overline{M}_1 \times \overline{M}_2)$ и $E^p(M_1 \times M_2)$. Тогда, учитывая свойства 1, 2, имеем

$$\left\| \varphi - S_{n_1, n_2}(\varphi) \right\|_X = \left\| \varphi - S_{n_1}^{(1)}\left(S_{n_2}^{(2)}(\varphi)\right) \right\|_X \le \left\| \varphi - S_{n_1}^{(1)}(\varphi) \right\|_X + \\ + \left\| S_{n_1}^{(1)}(\varphi) - S_{n_1}^{(1)}\left(S_{n_2}^{(2)}(\varphi)\right) \right\|_X = \left\| \varphi - S_{n_1}^{(1)}(\varphi) \right\|_X + \left\| S_{n_1}^{(1)}\left\{\varphi - S_n^{(2)}(\varphi)\right\} \right\|_X \le \\ \le \left\| \varphi - S_{n_1}^{(1)}(\varphi) \right\|_X + \left\| S_{n_1}^{(1)} \right\|_{X \to X} \left\| \varphi - S_{n_2}^{(2)}(\varphi) \right\|_X. \tag{11}$$

В случае $X = A\mathring{H}^{\omega}(\overline{M}_1 \times \overline{M}_2)$ отсюда, из теоремы А, и из свойства 3 следует

$$\|\varphi - S_{n_1, n_2}(\varphi)\| \le A\{\omega_1(1/n_1)\ln n_1 + \ln n_1\, \omega_2(1/n_2)\ln n_2\}. \tag{12}$$

Аналогично,

$$\|\varphi - S_{n_1, n_2}(\varphi)\| \le A\left\{\omega_2\left(1/n_2\right)\ln n_2 + \ln n_2\, \omega_1(1/n_1)\ln n_1\right\}. \tag{13}$$

Из (12), (13) следует (7), и теорема 1 доказана.

В случае $X = E^p(M_1 \times M_2)$ из (11) и свойства 4 сразу следует (8), и теорема 2 доказана.

1. *Мельник Ю. И.* О скорости сходимости рядов экспонент, представляющих регулярные в выпуклых многоугольниках функции // Укр. мат. журн. – 1985. – **37**, № 6. – С. 719 – 722.
2. *Мельник Ю. И.* Прямые теоремы приближения регулярных в выпуклых многоугольниках функций экспоненциальными полиномами в интегральной метрике // Укр. мат. журн. – 1988. – **40**, № 5. – С. 584 – 597.

Получено 14.11.92