УДК 534.111

Б. И. Сокил, канд. физ.-мат. наук (Львов. политехн. ин-т)

ПОСТРОЕНИЕ ОДНОЧАСТОТНЫХ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕАВТОНОМНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

An asymptotic representation of one-frequency solutions of some boundary-value problems for a nonautonomous wave equation is constructed by using the special periodic Ateb-functions.

Будується асимптотичне зображення одночастотних розв'язків деяких крайових задач для неавтономного хвильового рівняння на основі спеціальних періодичних Ateb-функцій.

В колебательных системах с многими степенями свободы, а также с распределенными параметрами при определенных условиях [1, 2] устанавливаются одночастотные режимы колебаний. Последнее существенно облегчает построение решений дифференциальных уравнений, описывающих движение этих систем.

В настоящей статье изложено методику построения одночастотных приближений решений волнового уравнения

$$u_{tt} - \alpha^2 (u_x)^{\nu} u_{xx} = \varepsilon f(x, u, u_t, u_x, u_{xx}, \theta, \varepsilon), \tag{1}$$

которое описывает продольные колебания одномерной сплошной среды, удовлетворяющей нелинейному закону упругости [3]. Уравнение (1) будем рассматривать при краевых условиях

$$\begin{aligned} u(x,t)\big|_{x=0} &= \varepsilon g_0^{(1)}\left(u\big|_{x=0}, \theta, \varepsilon\right); \\ u(x,t)\big|_{x=l} &= \varepsilon g_l^{(1)}\left(u\big|_{x=l}, \theta, \varepsilon\right) \end{aligned} \tag{2}$$

или

$$\begin{aligned} u(x,t)\big|_{x=0} &= \varepsilon g_0^{(2)}\left(u\big|_{x=0}, \theta, \varepsilon\right); \\ \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=l} &= \varepsilon g_l^{(2)}\left(u\big|_{x=l}, \theta, \varepsilon\right). \end{aligned} \tag{3}$$

В соотношениях (1) – (3) α, ν — постоянные, причем

$$\nu + 1 = (2p_1 + 1)/(2p_2 + 1), \quad p_s = 0, 1, 2, \dots,$$

$$s = 1, 2; \; f(x, u, u_t, u_x, u_{xx}, \theta, \varepsilon), \quad g_0^{(s)}(u, \theta, \varepsilon), \quad g_l^{(s)}(u, \theta, \varepsilon)$$

— известные аналитические 2π-периодические по θ функции, $d\theta/dt = \mu$ — частота внешнего возмущения, ε — малый параметр.

Следует заметить, частные случаи уравнения (1) рассматривались в [4, 5], где построены только первые приближения некоторых краевых задач для автономного $(\mu = 0)$ уравнения (1). Получить второе и последующие приближения решений задач (1), (2) либо (1) – (3), представляя их как в [2], весьма затруднительно. Поэтому предлагается одночастотные асимптотические приближения решений указанных задач искать в виде

$$u(x,t) = aX_k(x)T_k(\psi_k) + \sum_{n=1} \varepsilon^n U_n(a, x, T_k, \theta), \tag{4}$$

где $U_n(a, x, T_k, \theta)$ — 2π-периодические по θ функции, удовлетворяющие условиям, которые следуют либо из (2), либо из (3); а a и ψ_k связаны дифференциальными уравнениями

$$\dot{a} = \sum_{n=1} \varepsilon^n A_n(a, \varphi); \quad \dot{\psi}_k = \omega_k + \sum_{n=1} \varepsilon^n B_n(a, \varphi); \quad \varphi = \psi_k - \theta. \tag{5}$$

Функции $X_k(x)$ и $T_k(\psi_k)$ в (4) выражаются с помощью периодических Ateb-функций [6] в виде

$$\begin{gathered} X_k(x) = \operatorname{sa}(1,\ 1/(\nu+1),\ (q\Pi/l)/x), \\ T_k(\psi_k) = \operatorname{ca}(\nu+1,\ 1,\ \psi_k), \end{gathered} \tag{6}$$

а ω_k в (5) принимает значения

$$\omega_k = \alpha a^{\nu/2} \left(\frac{q\Pi}{l}\right)^{(\nu+2)/2}; \qquad \Pi = \frac{\sqrt{\Pi}\,\Gamma\big((\nu+1)/(\nu+2)\big)}{\Gamma\big(1/2+(\nu+1)/(\nu+2)\big)},$$

причем $q = k$ для краевых условий (2) и $q = (2k+1)/2$ для краевых условий (3).

Можно доказать, что система функций $\{\dot{X}_k(x)\}$, $k = 1, 2, \ldots$, является полной и ортогональной на $x \in [0, l]$, т. е.

$$\int_0^l X_m(x) X_k(x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad m \neq k, \\ Q_s & \text{при} \quad m = k, \end{cases} \tag{7}$$

где Q_s для краевых условий (2) и (3) принимает соответственно значения $l(\nu+2)/(3\nu+4)$; $(l/2)(\nu+2)/(3\nu+4)$.

Подставляя (4) в (1) – (3) с учетом (5), получаем линейное дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} L(U_n) = {} & \frac{4\omega_k^2}{(\nu+2)^2} \frac{\partial}{\partial T_k}\left[\left(1-T_k^{\nu+2}\right)\frac{\partial U_n}{\partial T_k}\right] + \frac{2\omega_k^2}{\nu+2} T_k^{\nu+1} \frac{\partial U_n}{\partial T_k} + \\ & + \frac{4\mu\omega_k}{\nu+2}\left(1-T_k^{\nu+2}\right)^{1/2} \frac{\partial^2 U_n}{\partial\theta\,\partial T_k} + \mu^2 \frac{\partial^2 U_n}{\partial\theta^2} - \alpha^2 \frac{\partial}{\partial x}\left[(aT_k X_k')^\nu \frac{\partial U_n}{\partial x}\right] = \\ & = F_n(a, x, T_k, \theta) - X_k(x)\Big\{\gamma_1(a, T_k) A_n(a, \varphi) + \beta_2(a, T_k) B_n(a, T_k) + \\ & + (\omega_k - \mu)\left[\gamma_2(a, T_k)\frac{\partial A_n}{\partial\varphi} + \beta_2(a, T_k)\frac{\partial B_n}{\partial\varphi}\right]\Big\} \end{aligned} \tag{8}$$

с краевыми условиями

$$U_n(a, x, T_k, \theta)\big|_{x=j} = G_{nj}^{(1)}(a, T_k, \theta), \quad j = 0, l, \tag{9}$$

или

$$\begin{gathered} U_n(a, x, T_k, \theta)\big|_{x=0} = G_{n0}^{(2)}(a, T_k, \theta), \\ \frac{\partial U_n(a, x, T_k, \theta)}{\partial x}\bigg|_{x=l} = G_{nl}^{(2)}(a, T_k, \theta), \end{gathered} \tag{10}$$

где $\gamma_s(a,T_k)$, $\beta_s(a,T_k)$, $F_n(a, x, T_k, \theta)$, $G_{nj}^{(s)}(a, T_k, \theta)$ — известного вида функции, причем последние 2π-периодичны по θ.

Решения краевых задач (8), (9), (8) – (10), как и в [2], будем искать в виде суммы

$$U_n(a, x, T_k, \theta) = V_n(a, x, T_k, \theta) + W_n(a, x, T_k, \theta), \tag{11}$$

в которой функции $V_n(a, x, T_k, \theta)$ и $W_n(a, x, T_k, \theta)$ являются решениями краевых задач

$$\frac{\partial^2 W_n}{\partial x^2} = 0, \qquad W_n(a, x, T_k, \theta)|_{x=j} = G_{nj}^{(1)}(a, T_k, \theta), \qquad W_n(a, x, T_k, \theta)|_{x=0} = G_{n0}^{(2)}(a, T_k, \theta); \tag{12}$$

$$\frac{\partial^2 W_n}{\partial x^2} = 0, \qquad \left.\frac{\partial W_n(a, x, T_k, \theta)}{\partial x}\right|_{x=l} = G_{nl}^{(2)}(a, T_k, \theta), \tag{13}$$

и

$$L(V_n) = F_n(a, x, T_k, \theta) - L(W_n) + \alpha^2 a^\nu T_k^\nu (X_k')^\nu X_k'' \frac{\partial W_n}{\partial x} -$$

$$- X_k(x)\Big\{\gamma_1(a, T_k) A_n(a, \varphi) + \beta_1(a, T_k) B_n(a, \varphi) +$$

$$+ (\omega_k - \mu)\left[\gamma_2(a, T_k)\frac{\partial A_n}{\partial \varphi} + \beta_2(a, T_k)\frac{\partial B_n}{\partial \varphi}\right]\Big\}; \tag{14}$$

$$V_n(a, x, T_k)|_{x=j} = 0 \tag{15}$$

или

$$V_n(a, x, T_k, \theta)|_{x=0} = \left.\frac{\partial V_n(a, x, T_k, \theta)}{\partial x}\right|_{x=l} = 0. \tag{16}$$

Функции $W_n(a, x, T_k, \theta)$, удовлетворяющие условиям (12) либо (13), можно определить без особенных трудностей, а решения краевых задач (14), (15) и (14) – (16) с учетом свойств системы функций $\{X_k(x)\}$ представимы в виде

$$V_n(a, ., T_k, \theta) = \sum_{m, r} V_{nmr}(a, T_k) X_m(x) \exp(ir\theta). \tag{17}$$

Тогда краевые условия (15) или (16) будут выполняться автоматически. Аналогично представляя функции $A_n(a, \varphi)$ и $B_n(a, \varphi)$ в виде рядов Фурье

$$A_n(a, \varphi) = \sum_r A_{nr}(a) \exp(-ir\varphi); \quad B_n(a, \varphi) = \sum_r B_{nr}(a) \exp(-ir\varphi), \tag{18}$$

из (14) имеем

$$\tilde{L}(V_{nmr}) = \frac{4\omega_k^2}{(\nu+2)^2}\frac{\partial}{\partial T_k}\left[\left(1 - T_k^{\nu+2}\right)\frac{\partial V_{nmr}}{\partial T_k}\right] +$$

$$+ \left[\frac{2\omega_k^2}{\nu+2} T_k^{\nu+1} + \frac{4i\omega_k r\mu}{\nu+2}\left(1 - T_k^{\nu+2}\right)^{1/2}\right]\frac{\partial V_{nmr}}{\partial T_k} +$$

$$+ \left[\frac{2(\nu+1)}{\nu+2}\omega_k^2 T_k^\nu - \mu^2 r^2\right] V_{nmr} = \tilde{F}_{nmr}(a, T_k), \tag{19}$$

где

$$\tilde{F}_{nmr}(a, T_k) = \begin{cases} F_{nkr}(a, T_k) + \Big\{\big[\gamma_1(a, T_k) - ir(\omega_k - \mu)\gamma_2(a, T_k)\big]A_{nr}(a) + \\ \qquad + \big[\beta_1(a, T_k) - ir(\omega_k - \mu)\beta_2(a, T_k)\big]B_{nr}(a)\Big\}\times \\ \qquad \times \exp\left[-ir\left(\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\nu+2}{2}\displaystyle\int_0^{T_k}\left(1 - \overline{T}_k^{\nu+2}\right)^{-1/2} d\overline{T}_k\right)\right]; \\ F_{nmr}(a, T_k) \qquad \text{при} \quad m \neq k, \end{cases}$$

а $F_{nmr}(a, T_k)$ — коэффициенты разложения функции

$$F_n^*(a, T_k, x, \theta) = F_n(a, x, T_k, \theta) - L(W_n) + \alpha^2 \nu a^{\nu} T_k^{\nu}(X_k')^{\nu-1} X_k'' \frac{\partial W_n}{\partial x},$$

т. е.

$$F_{nmr}(a, T_k) = \frac{1}{2\pi Q_s}\int_0^{2\pi}\int_0^{l} F_n^*(a, x, T_k, \theta) X_m(x)\exp(-ir\theta)\,dx\,d\theta.$$

Легко проверить, что справедливы соотношения

$$\int_{-1}^{1}\tilde{L}(V_{nmr})\rho_s(T_k)\,dT_k = 0 \tag{20}$$

при таких значениях функций $\rho_s(T_k)$:

$$\rho_1(T_k) = \exp\left[ir\mu\frac{\nu+2}{2\omega_k}\int_0^{T_k}\left(1 - \overline{T}_k^{\nu+2}\right)^{1/2} d\overline{T}_k\right];$$

$$\rho_2(T_k) = \rho_1(T_k)\int_0^{T_k}\left(1 - \overline{T}_k^{\nu+2}\right)^{-3/2} d\overline{T}_k.$$

Тогда из (19), учитывая (20), получаем систему алгебраических уравнений для нахождения функций $A_{nr}(a)$ и $B_{nr}(a)$:

$$\gamma_{rs}(a)A_{nr}(a) + \beta_{rs}(a)B_{nr}(a) = F_{nkr}^s(a), \tag{21}$$

в которой

$$\gamma_{rs}(a) = \int_{-1}^{1}\rho_s(T_k)\big[\gamma_1(T_k, a) - ir(\omega_k - \mu)\gamma_2(a, T_k)\big]\times$$

$$\times \exp\left[-ir\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\nu+2}{2}\int_0^{T_k}\left(1 - \overline{T}_k^{\nu+2}\right)^{-1/2} d\overline{T}_k\right)\right]dT_k;$$

$$\beta_{rs}(a) = \int_{-1}^{1}\rho_s(T_k)\big[\beta_1(a, T_k) - ir(\omega_k - \mu)\beta_2(a, T_k)\big]\times$$

$$\times \exp\left[-ir\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\nu+2}{2}\int_0^{T_k}\left(1 - \overline{T}_k^{\nu+2}\right)^{-1/2} d\overline{T}_k\right)\right]dT_k;$$

$$F^{s}_{nkr}(a) = \int_{-1}^{1} F_{nkr}(a, T_k)\rho_s(T_k)\,dT_k.$$

Для определения функций $V_{nmr}(a, T_k)$ рассмотрим линейное однородное уравнение, соответствующее (19). Частные решения последнего имеют вид

$$\overline{V}_{nmr}(a, T_k) = \left[\frac{2}{\nu+2}\left(1 - T_k^{\nu+2}\right)\right]^{1/2} \exp\left[-ir\mu\,\frac{\nu+2}{2\omega_k}\int_0^{T_k}\left(1 - \overline{T}_k^{\nu+2}\right)^{-1/2} d\overline{T}_k\right]; \tag{22}$$

$$\overline{\overline{V}}_{nmr}(a, T_k) = \overline{V}_{nmr}(a, T_k)\int_0^{T_k}\left[\frac{2}{\nu+2}\left(1 - \overline{T}_k^{\nu+2}\right)\right]^{-3/2} d\overline{T}_k. \tag{23}$$

Следовательно, частное решение неоднородного уравнения (19) представляется в виде

$$V_{nmr}(a, T_k) = \int \frac{\nu+2}{2\omega_k} F_{nmr}(a, \overline{T}_k) \exp\left[ir\mu\,\frac{\nu+2}{2\omega_k}\int_0^{\overline{T}_k}\left(1 - \overline{\overline{T}}_k^{\nu+2}\right)^{-1/2} d\overline{\overline{T}}_k\right]\times$$

$$\times\left\{\overline{\overline{V}}_{nmr}(a, T_k) - \overline{V}_{nmr}(a, T_k)\int_0^{\overline{T}_k}\left[\frac{2}{\nu+2}\left(1 - \overline{\overline{T}}_k^{\nu+2}\right)\right]^{-3/2} d\overline{\overline{T}}_k\right\} d\overline{T}_k.$$

Решение задачи для автономного случая получаем как частный случай изложенного выше при $\mu = 0$.

1. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 501 с.
2. *Митропольский Ю. А., Мосеенков Б. И.* Асимптотические решения уравнений в частных производных. – Киев: Вища шк., 1976. – 592 с.
3. *Мышкис А. Д., Филимонов А. М.* Периодические колебания в нелинейных одномерных сплошных средах // IX Междунар. конф. по нелинейн. колебаниям. – Киев: Наук. думка, 1984. – Т. 1. – С. 274–276.
4. *Сокил Б. И., Барвинский А. Ф.* Об асимптотическом решении одной нелинейной краевой задачи // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1980. – № 1. – С. 22–26.
5. *Сокил Б. И., Барвинский А. Ф.* Асимптотический метод и периодические Ateb-функции в исследовании некоторых волновых уравнений // Дифференц. уравнения. – 1982. – **XVIII**, № 4. – С. 718–721.
6. *Сеник П. М.* Обращения неполной Beta-функции // Укр. мат. журн. – 1969. – **21**, № 3. – С. 325–333.

Получено 08.04.93