УДК 512.41 / 47

В. П. Шаптала, преп. (Днепропетр. ун-т)

ГРУППЫ С УСЛОВИЕМ МИНИМАЛЬНОСТИ ДЛЯ БЕСКОНЕЧНО ПОРОЖДЕННЫХ ПОДГРУПП

It is established that, in the class of locally almost solvable groups, the minimality condition for infinitely generated subgroups is equivalent to the minimality condition for (all) subgroups.

Встановлено, що в класі локально майже розв'язних груп умова мінімальності для нескінченно породжених підгруп еквівалентна умові мінімальності для (всіх) підгруп.

Будем говорить, что группа G, имеющая хотя бы одну бесконечно порожденную подгруппу, удовлетворяет условию минимальности для бесконечно порожденных подгрупп или, короче, условию $\min-\mathrm{ig}$, если всякая ее строго убывающая цепочка бесконечно порожденных подгрупп обрывается.

Под бесконечно порожденной понимается подгруппа $H \leq G$, не имеющая конечной системы порождающих элементов.

Примером групп с условием $\min-\mathrm{ig}$ являются черниковские группы. Однако, как следует из работы [1], класс групп с условием $\min-\mathrm{ig}$ черниковскими группами не исчерпывается.

В настоящей работе изучаются локальные почти разрешимые группы с условием $\min-\mathrm{ig}$.

Легко видеть, что локально конечные группы с условием $\min-\mathrm{ig}$ являются группами и с условием минимальности для (всех) подгрупп, т. е. черниковскими группами [2]. Нетрудно показать, что класс групп с условием $\min-\mathrm{ig}$ замкнут относительно взятия подгрупп, фактор-групп и расширений.

Лемма 1. *Бесконечно порожденная непериодическая абелева группа* G *не удовлетворяет условию* $\min-\mathrm{ig}$.

Доказательство. Очевидно, группа, разложимая в прямое произведение неединичных таких подгрупп, не удовлетворяет $\min-\mathrm{ig}$. Поэтому, предположив G удовлетворяющей условию $\min-\mathrm{ig}$, получим конечность ее ранга. Так как это же справедливо и для любой ее фактор-группы, то G минимаксна, и, следовательно [3], $G = T \times A$, где T — периодическая часть, а $A \neq 1$. Если T бесконечна, то для любого $1 \neq a \in A$ подгруппа $T \times \langle a \rangle$ не удовлетворяет $\min-\mathrm{ig}$, поскольку, например, $T \times \langle a \rangle > T \times \langle a^2 \rangle$. Если же T конечна, то A не имеет конечной системы порождающих. Будучи минимаксной и без кручения, A финитно аппроксимируема. Поэтому подгруппа A, имеющая бесконечную убывающую последовательность подгрупп конечного индекса, не удовлетворяет $\min-\mathrm{ig}$.

Из доказательства этой леммы непосредственно вытекает такое следствие.

Следствие 1. *Бесконечно порожденные непериодические абелевы группы не удовлетворяют условию* $\min-\mathrm{ig}$ *для непериодических подгрупп.*

Лемма 2. *Произвольная непериодическая бесконечно порожденная локально разрешимая группа* G *имеет собственную бесконечно порожденную непериодическую подгруппу.*

Доказательство. С учетом следствия 1 группа G предполагается неабелевой. Ввиду непериодичности и бесконечной порожденности группы в ней существует бесконечная возрастающая последовательность непериодических неабелевых подгрупп $F_1 < F_2 < \ldots < F_n < \ldots$. Если $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n < G$, то лемма доказана. Поэтому положим

$$\bigcup F_n = G. \tag{1}$$

В силу локальной разрешимости группы G каждая ее неединичная конечно порожденная подгруппа отлична от своего коммутанта. Без ограничения общности можно считать, что F_n', $n = 1, 2, \ldots$, непериодична. Действительно, в противном случае ввиду (1) и непериодичности G

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n' = G' < G$$

и при бесконечной порождености G/G' утверждение леммы вытекало бы из следствия 1, а при конечной порожденности G/G' — из вложения $\langle G', g^2\rangle = \langle G', g\rangle$; $g \in G \setminus G'$; $|g| = \infty$ (так как G имеет бесконечное множество образующих, а $G\setminus G'$ конечно, то $\langle G', g^2\rangle$ бесконечно порождена).

Также без ограничения общности можно считать, что F_n', $n = 1, 2, \ldots$, неабелева, так как в противном случае ввиду (1) и неабелевости G было бы $\bigcup F_n' < G$, т. е. утверждение леммы следовало бы из следствия 1.

С учетом изложенного выше рассмотрим $(k_n - 1)$-й коммутант $F_n^{(k_n-1)}$, $n = 1, 2, \ldots$, такой, что $F_n^{(k_n-1)} \geq F_1 > F_n'$; $k_n \geq 1$, но

$$F_n^{(k_n)} \ngeq F_1; \quad F_n^{(k_n)} \geq F_1' > F_1'' \neq 1. \tag{2}$$

Из (2) следует

$$D_i = \bigcap_{n=i} F_n^{(k_n)} \geq F_1' > F_1'' \neq 1; \quad D_i \ngeq F_1,$$

и, значит, $D_1 \leq D_2 \leq \ldots \leq D_i \leq \ldots$,

$$D = \bigcup_{i=1}^{\infty} D_i \ngeq F_1; \quad D > F_1' > F_2'' \neq 1,$$

откуда в случае бесконечной порожденности подгруппы D непосредственно вытекает утверждение леммы.

Если подгруппа D конечно порождена, то ввиду ее определения $D \lhd G$. Действительно, конечнопорожденность подгруппы D означает, что при некотором значении индекса i $D = D_i = D_{i+1} = \ldots = D_{i+l} = \ldots$, но $D_{i+l} = \bigcap_{n=i+l} F_n^{(k_n)}$, $l = 1, 2, \ldots$, $F_n^{(k_n)} \lhd F_n$, следовательно, $D_i = D_{i+l} = \bigcap_{n=i+l} F_n^{(k_n)} \lhd F_{i+l}$, т. е. $D = D_i \lhd F_{i+l}$, $l = 1, 2, \ldots$, откуда

$$D \lhd \bigcup_{l=1}^{\infty} F_{i+l} = G.$$

Если $D/D' \leq Z(G/D')$ и $D'/D'' \leq Z(G/D'')$, где $Z(G/D^{(i)})$ — центр группы $G/D^{(i)}$, $i = 1, 2$, то в соответствии с леммой Грюна $G > G'$, что, как отмечалось выше, влечет справедливость леммы. Следовательно,

$$D^{(i-1)}/D^{(i)} \nleq Z(G/D^{(i)}), \quad i = 1 \vee 2.$$

Но тогда $D^{(i-1)}/D^{(i)}$ как нормальная конечно порожденная абелева подгруппа группы $G/D^{(i)}$ имеет характеристическую подгруппу $N/D^{(i)}$ конечного неединичного индекса, для которой $D^{(i-1)}/N \nleq Z(G/N)$ и, значит, централизатор $C_{G/N}(D^{(i-1)}/N)$ имеет в G/N конечный отличный от 1 индекс. Отсюда, как известно, следует существование в G собственной подгруппы конечного индекса, т. е. бесконечно порожденной подгруппы, содержащей элементы бесконечного порядка.

Следствие 2. *Непериодические локально разрешимые группы не удовлетворяют условию* $\min - \mathrm{ig}$ *для непериодических подгрупп.*

Теорема 1. *Локально разрешимая группа* G *тогда и только тогда удовлетворяет условию* $\min - \mathrm{ig}$, *когда она является черниковской группой.*

Доказательство. Если группа G периодична, то утверждение теоремы вытекает из локальной конечности G, а если G непериодична, то — из следствия 2.

Теорема 2. *Локально почти разрешимые группы с условием* $\min - \mathrm{ig}$ *исчерпываются черниковскими группами.*

Доказательство. Пусть G — локально почти разрешимая группа, удовлетворяющая $\min - \mathrm{ig}$. Если G периодична, то черниковость вытекает из ее локальной конечности. Поэтому G предполагается ниже непериодической.

Непериодичность группы G означает, что каждая ее бесконечно порожденная непериодическая подгруппа не удовлетворяет слабому условию максимальности, так как в противном случае, будучи минимаксной, G в соответствии с [3] не удовлетворяла бы $\min - \mathrm{ig}$. Следовательно, в G существует бесконечная возрастающая последовательность подгрупп

$$H_1 < H_2 < \ldots < H_n \tag{3}$$

с бесконечными соседними индексами. Все эти подгруппы, очевидно, не могут быть периодическими. Без ограничения общности их можно считать конечно порожденными непериодическими группами. В самом деле, если (для определенности) подгруппа H_1 бесконечно порождена, то, как отмечалось, H_1 не удовлетворяет слабому условию максимальности, т. е. в ней существует бесконечная последовательность подгрупп $H_{11} < H_{12} < \ldots < H_{1n} < \ldots$ с бесконечными соседними индексами. Предполагая, для определенности, подгруппу H_{11} бесконечно порожденной, аналогично получаем $H_{21} < H_{22} < \ldots < H_{2n} < \ldots$; $|H_{2,n+1} : H_{2n}| = \infty$, $n = 1, 2, \ldots$. Но по условию $\min - \mathrm{ig}$ последовательность бесконечно порожденных подгрупп $H_1 > H_{11} > H_{21}$ нельзя продолжать неограниченно, что и позволяет предположить группы (3) конечно порожденными.

Далее, если все подгруппы (3) разрешимы, то справедливость теоремы вытекает из теоремы 1; поэтому каждая подгруппа (3) предполагается неразрешимой. Следовательно, по определению локальной почти разрешимости H_n имеет собственную нормальную разрешимую подгруппу F_n, для которой $|H_n : F_n| < \infty$. Но поскольку при этом $|H_{n+1} : H_n| = \infty$, $n = 1, 2, \ldots$, то $F_1 < F_2F_1 < \ldots < F_nF_{n-1} \ldots F_2F_1 < \ldots$; где $F_nF_{n-1} \ldots F_2F_1$, $n = 1, 2, \ldots$, очевидно, разрешима. Следовательно, $\bigcup_n (F_nF_{n-1} \ldots F_2F_1)$ — собственная бесконечно порожденная непериодическая локально разрешимая подгруппа группы G, что ввиду теоремы 1 противоречит условию $\min - \mathrm{ig}$. Теорема доказана.

1. *Образцов В. И.* Теорема о вложениях групп и ее следствия // Мат. сб. – 1989. – **180**, № 4. – С. 529–541.
2. *Шунков В. П.* О проблеме минимальности для локально конечных групп // Алгебра и логика. – 1970. – **9**, № 2. – С. 220–238.
3. *Зайцев Д. И.* К теории минимаксных групп // Укр. мат. журн. – 1971. – **23**, № 5. – С. 650–659.

Получено 22.12.92