УДК 517.9

Ю. А. Митропольский, акад.,
В. Г. Коломиец, канд. физ.-мат. наук (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ СЛУЧАЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ*

Applications of asymptotic methods of nonlinear mechanics and the method of Fokker – Plank – Kolmogorov equation to a study of random multi-frequency oscillations in systems with many degrees of freedom are considered.

Вивчаються застосування асимптотичних методів нелінійної механіки і методу рівнянь Фоккера – Планка – Колмогорова до дослідження випадкових багаточастотних коливань в системах з багатьма ступенями вільності.

Изучение влияния случайных сил на нелинейные колебательные системы является исключительно важной проблемой. Эти задачи приобрели большое значение во многих областях науки и техники.

В данной статье рассматривается случай нелинейных систем со многими степенями свободы, близких к линейным, и со слабыми случайными силами типа белых шумов.

Асимптотические методы нелинейной механики разработаны и обоснованы в трудах Н. М. Крылова, Н. Н. Боголюбова и Ю. А. Митропольского [1 – 3]. Они широко применяются при исследовании стохастических колебательных систем с одной и многими степенями свободы [4, 5].

Стохастические колебательные системы со многими степенями свободы недостаточно изучены.

Настоящая работа посвящена применению асимптотических методов нелинейной механики и метода уравнений Фоккера – Планка – Колмогорова (ФПК) к исследованию случайных многочастотных колебаний [6].

Рассмотрим автономную колебательную систему со многими степенями свободы, которая находится под действием стационарных гауссовских белых шумов и описывается следующей системой дифференциальных уравнений второго порядка

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) + \sqrt{\varepsilon}\, g\left(x, \frac{dx}{dt}\right)\dot{\xi}(t), \tag{1}$$

в которой ε — малый положительный параметр, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — вектор, $\omega^2 = \operatorname{diag}\left\{\omega_1^2, \ldots, \omega_n^2\right\}$ — матрица, $\omega_j > 0$, $j = 1, \ldots, n$, — константы, $f = \{f_1, \ldots, f_n\}$ — вектор, $g = \| g_{ik} \|_1^n$ — матрица, f_j и g_{ik} — нелинейные функции, удовлетворяющие необходимым условиям существования и единственности решений, $\dot{\xi}(t) = \left\{\dot{\xi}_1(t), \ldots, \dot{\xi}_n(t)\right\}$ — векторный белый шум.

Под решением системы (1) понимаем решение системы стохастических интегральных уравнений Ито [7]

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \int_{t_0}^{t} y(s)\,ds, \\ y(t) &= y_0 + \int_{t_0}^{t} \left[-\omega^2 x(s) + \varepsilon f(x(s), y(s))\right] ds + \sqrt{\varepsilon} \int_{t_0}^{t} g(x(s), y(s))\, d\xi(s), \end{aligned} \tag{2}$$

где x_0, y_0 — начальные значения $x(t)$, $y(t) = dx/dt$ при $t = t_0$.

Как известно [7], решением системы (2) является $2n$-мерный марковский процесс $\{x_1(t), \ldots, x_n(t), y_1(t), \ldots, y_n(t)\}$. Благодаря малости параметра ε

* Выполнена при финансовой поддержке Государственного комитета Украины по вопросам науки и технологий.

мы можем применять асимптотический метод Крылова – Боголюбова. При применении этого метода целесообразно перейти к системе уравнений первого порядка для амплитуд и фаз случайных колебаний.

Выполним в системе уравнений (1) замену переменных по формулам

$$x_k = a_k \cos\psi_k, \quad y_k = \frac{dx_k}{dt} = -a_k\omega_k \sin\psi_k, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{3}$$

Перейдя к амплитудно-фазовым переменным $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $\psi = (\psi_1, \ldots$ $\ldots, \psi_n)$ и применив формулу Ито [7], получим

$$\begin{aligned}\frac{da_k}{dt} &= \varepsilon \frac{\cos^2\psi_k}{2\omega_k^2 a_k} \sum_{j=1}^{n} g_{kj}^2 (a_1\cos\psi_1, -a_1\omega_1\sin\psi_1, \ldots \\ &\ldots, a_n\cos\psi_n, -a_n\omega_n\sin\psi_n) - \frac{\varepsilon}{\omega_k} f_k(a_1\cos\psi_1, -a_1\omega_1\sin\psi_1, \ldots \\ &\ldots, a_n\cos\psi_n, -a_n\omega_n\sin\psi_n)\sin\psi_k - \\ &- \frac{\sqrt{\varepsilon}\sin\psi_k}{\omega_k} \sum_{j=1}^{n} g_{k_j}(a_1\cos\psi_1, -a_1\omega_1\sin\psi_1, \ldots, a_n\cos\psi_n, -a_n\omega_n\sin\psi_n)\dot{\xi}_j(t), \\ \frac{d\psi_k}{dt} &= \omega_k - \varepsilon \frac{\sin\psi_k\cos\psi_k}{\omega_k^2 a_k^2} \sum_{j=1}^{n} g_{kj}^2 (a_1\cos\psi_1, -a_1\omega_1\sin\psi_1, \ldots \\ &\ldots, a_n\cos\psi_n, -a_n\omega_n\sin\psi_n) - \frac{\varepsilon}{a_k\omega_k} f_k(a_1\cos\psi_1, -a_1\omega_1\sin\psi_1, \ldots \\ &\ldots, a_n\cos\psi_n, -a_n\omega_n\sin\psi_n)\cos\psi_k - \\ &- \frac{\sqrt{\varepsilon}\cos\psi_k}{a_k\omega_k} \sum_{j=1}^{n} g_{k_j}(a_1\cos\psi_1, -a_1\omega_1\sin\psi_1, \ldots \\ &\ldots, a_n\cos\psi_n, -a_n\omega_n\sin\psi_n)\dot{\xi}_j(t), \qquad k = 1, \ldots, n.\end{aligned} \tag{4}$$

Полученные уравнения представляют собой систему стохастических дифференциальных уравнений для $2n$-мерного марковского диффузионного процесса $\{a_1(t), \ldots, a_n(t), \psi_1(t), \ldots, \psi_n(t)\}$. Ему соответствует следующее уравнение ФПК [5]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial W}{\partial t} &+ \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial a_k}\left[K_{a_k} W\right] + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \psi_k}\left[K_{\psi_k} W\right] = \\ &= \frac{1}{2}\left\{ \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial a_i \partial a_j}\left[\left(\sum_{k=1}^{n} D_{a_k}\right) W\right] + \right. \\ &+ 2\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial a_i \partial \psi_j}\left[\left(\sum_{k=1}^{n} D_{a_k\psi_k}\right) W\right] + \\ &\left. + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial \psi_i \partial \psi_j}\left[\left(\sum_{k=1}^{n} D_{\psi_k}\right) W\right]\right\},\end{aligned} \tag{5}$$

где $W = W\left(a_1, \ldots, a_n, \psi_1, \ldots \ldots, \psi_n, t, a_1^0, \ldots, a_n^0, \psi_1^0, \ldots \ldots, \psi_n^0, t_0\right)$ — плотность совместного распределения амплитуд и фаз, K_{a_k} и K_{ψ_k} — коэффициенты сноса амплитуд и фаз, D_{a_k} и D_{ψ_k} — коэффициенты диффузии амплитуд и фаз, $D_{a_k\psi_k}$ — смешанные коэффициенты диффузии амплитуд и фаз имеют вид

$$K_{a_k} = \varepsilon \frac{\cos^2\psi_k}{2\omega_k^2 a_k} \sum_{j=1}^{n} g_{kj}^2 (a_1\cos\psi_1, -a_1\omega_1\sin\psi_1, \ldots$$

$$\ldots, a_n\cos\psi_n, -a_n\omega_n\sin\psi_n) - \frac{\varepsilon}{\omega_k} f_k(a_1\cos\psi_1, -a_1\omega_1\sin\psi_1, \ldots$$

$$\ldots, a_n\cos\psi_n, -a_n\omega_n\sin\psi_n)\sin\psi_k,$$

$$K_{\psi_k} = \omega_k - \varepsilon \frac{\sin\psi_k\cos\psi_k}{\omega_k^2 a_k^2} \sum_{j=1}^{n} g_{kj}^2 (a_1\cos\psi_1, -a_1\omega_1\sin\psi_1, \ldots$$

$$\ldots, a_n\cos\psi_n, -a_n\omega_n\sin\psi_n) - \frac{\varepsilon}{a_k\omega_k} f_k(a_1\cos\psi_1, -a_1\omega_1\sin\psi_1, \ldots$$

$$\ldots, a_n\cos\psi_n, -a_n\omega_n\sin\psi_n)\cos\psi_k, \tag{6}$$

$$D_{a_k} = \frac{\varepsilon\sin^2\psi_k}{\omega_k^2} \sum_{j=1}^{n} g_{kj}^2 (a_1\cos\psi_1, -a_1\omega_1\sin\psi_1, \ldots$$

$$\ldots, a_n\cos\psi_n, -a_n\omega_n\sin\psi_n),$$

$$D_{a_k\psi_k} = \frac{\varepsilon\sin\psi_k\cos\psi_k}{a_k\omega_k^2} \sum_{j=1}^{n} g_{kj}(a_1\cos\psi_1, -a_1\omega_1\sin\psi_1, \ldots$$

$$\ldots, a_n\cos\psi_n, -a_n\omega_n\sin\psi_n) g_{k+1,j}(a_1\cos\psi_1, -a_1\omega_1\sin\psi_1, \ldots$$

$$\ldots, a_n\cos\psi_n, -a_n\omega_n\sin\psi_n),$$

$$D_{\psi_k} = \frac{\varepsilon\cos^2\psi_k}{a_k^2\omega_k^2} \sum_{j=1}^{n} g_{kj}^2 (a_1\cos\psi_1, -a_1\omega_1\sin\psi_1, \ldots, a_n\cos\psi_n, -a_n\omega_n\sin\psi_n).$$

Уравнение (5) представляет собой дифференциальное уравнение параболического типа в стандартной по Н. Н. Боголюбову форме, если в уравнениях (4) положить $\psi_k(t) = \omega_k(t) + \theta_k(t)$. Тогда в формулах (6) $K_{\theta_k} = K_{\psi_k} - \omega_k$, остальные коэффициенты не изменятся.

Для этого уравнения Р. З. Хасьминским [8] обоснован принцип усреднения Н. Н. Боголюбова. Согласно этому принципу решение задачи Коши для уравнения (5) на достаточно большом промежутке времени $O(1/\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$ аппроксимируется решением задачи Коши для усредненного уравнения

$$\frac{\partial W_0}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial a_k}\left[A_k(a_1, \ldots, a_n)W_0\right] +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \theta_k}\left[B_k(a_1, \ldots, a_n)W_0\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{ \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial a_i \partial a_j}\left[\sum_{k=1}^{n} C_k(a_1, \ldots, a_n)W_0\right] + \right.$$

$$+ 2\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial a_i \partial \theta_j}\left[\sum_{k=1}^{n} D_k(a_1, \ldots, a_n)W_0\right] +$$

$$\left. + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial \theta_i \partial \theta_j}\left[\sum_{k=1}^{n} E_k(a_1, \ldots, a_n)W_0\right]\right\}, \tag{7}$$

$$
\begin{gathered}
A_k(a_1, \dots, a_n) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} K_{a_k} d\psi_1 \dots d\psi_n, \\
B_k(a_1, \dots, a_n) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} K_{\theta_k} d\psi_1 \dots d\psi_n, \\
K_{\theta_k} = K_{\psi_k} - \omega_k, \\
C_k(a_1, \dots, a_n) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} D_{a_k} d\psi_1 \dots d\psi_n, \\
D_k(a_1, \dots, a_n) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} D_{a_k\theta_k} d\psi_1 \dots d\psi_n, \\
E_k(a_1, \dots, a_n) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} D_{\theta_k} d\psi_1 \dots d\psi_n.
\end{gathered}
\tag{8}
$$

Функция W (или W_0) удовлетворяет известным условиям плотности распределения вероятностей, определенным краевым условиям и начальному условию. В общем случае нахождение аналитического решения уравнений (5) и (7) затруднено.

Независимость коэффициентов сноса и диффузии от времени в уравнениях (5) и (7) означает, что существует стационарное решение уравнений ФПК. В этих случаях в уравнениях ФПК следует положить $\partial W / \partial t$ и $\partial W_0 / \partial t$ равными нулю. Эти стационарные уравнения в некоторых случаях интегрируются методом разделения переменных и во всех случаях с использованием ЭВМ.

Для анализа случайных колебаний нелинейных стохастических систем важную роль играет стационарная плотность распределения амплитуд, получающаяся из совместной стационарной плотности распределения амплитуд и фаз интегрированием по фазам в пределах от 0 до 2π. Стационарные точки этой плотности соответствуют устойчивым или неустойчивым амплитудам случайных колебаний исходной системы в зависимости от того, достигается ли в этих стационарных точках соответственно максимум или минимум.

Мы рассмотрели подробно нерезонансный случай, когда $k_1\omega_1 + k_2\omega_2 + \dots \dots + k_n\omega_n \neq 0$, где $k = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ — целочисленный вектор. В резонансном случае усредненные по времени коэффициенты сноса и диффузии (8) зависят не только от амплитуд, но и от фаз, что существенно усложняет решение уравнений ФПК. В общем случае решение может быть получено численным путем.

Заметим, что усреднение можно проводить в самих стохастических уравнениях (4), а затем применять аппарат уравнений ФПК. В работах [3, 4] проводилось неполное усреднение: усреднялись только неслучайные члены в правых частях стохастических уравнений (4), флуктуационные члены усреднялись в составленном потом уравнении ФПК.

В качестве примера исследуем случайные колебания систем с двумя степенями свободы

$$
\begin{gathered}
\frac{d^2 x_k}{dt^2} + \omega_k^2 x_k = \varepsilon f_k\left(x_1, x_2, \frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt} \right) + \\
+ \sqrt{\varepsilon} \sum_{j=1}^{2} g_{kj}\left(x_1, x_2, \frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt} \right) \dot{\xi}_j(t), \quad k = 1, 2,
\end{gathered}
\tag{9}
$$

где ε — малый положительный параметр, f_k и g_{kj} — некоторые аналитические функции, $\dot{\xi}_1(t)$ и $\dot{\xi}_2(t)$ — независимые белые шумы. Выполним замену переменных

$$x_k = a_k \cos\psi_k, \quad \frac{dx_k}{dt} = -a_k \omega_k \sin\psi_k. \tag{10}$$

Очевидно, в новых переменных система (9) принимает вид

$$\begin{gathered}\frac{da_k}{dt} = \varepsilon A_{1k}(a_1, a_2, \psi_1, \psi_2) + \sqrt{\varepsilon} \sum_{j=1}^{2} A_{2j}^{(k)}(a_1, a_2, \psi_1, \psi_2)\dot{\xi}_j(t), \\ \frac{d\psi_k}{dt} = \omega_k + \varepsilon B_{1k}(a_1, a_2, \psi_1, \psi_2) + \\ + \sqrt{\varepsilon} \sum_{j=1}^{2} B_{2j}^{(k)}(a_1, a_2, \psi_1, \psi_2)\dot{\xi}_j(t), \quad k = 1, 2.\end{gathered} \tag{11}$$

Коэффициенты A_{1k}, $A_{2j}^{(k)}$, B_{1k}, $B_{2j}^{(k)}$, $k, j = 1, 2$, определяются соответствующим образом через коэффициенты f_k и g_{kj} исходного уравнения (9):

$$A_{1k} = \frac{\cos^2\psi_k}{2a_k\omega_k^2}\,[\,g_{k1}^2(a_1\cos\psi_1, -a_1\omega_1\sin\psi_1, a_2\cos\psi_2, -a_2\omega_2\sin\psi_2) +$$
$$+ g_{k2}^2(a_1\cos\psi_1, -a_1\omega_1\sin\psi_1, a_2\cos\psi_2, -a_2\omega_2\sin\psi_2)] -$$
$$- \frac{\sin\psi_k}{\omega_k} f_k(a_1\cos\psi_1, -a_1\omega_1\sin\psi_1, a_2\cos\psi_2, -a_2\omega_2\sin\psi_2),$$

$$A_{21}^{(k)} = -\frac{\sin\psi_k}{\omega_k}\, g_{k1}(a_1\cos\psi_1, -a_1\omega_1\sin\psi_1, a_2\cos\psi_2, -a_2\omega_2\sin\psi_2),$$

$$A_{22}^{(k)} = -\frac{\sin\psi_k}{\omega_k}\, g_{k2}(a_1\cos\psi_1, -a_1\omega_1\sin\psi_1, a_2\cos\psi_2, -a_2\omega_2\sin\psi_2),$$

$$B_{1k} = -\frac{\sin\psi_k\cos\psi_k}{\omega_k^2 a_k^2}\,[\,g_{k1}^2(a_1\cos\psi_1, -a_1\omega_1\sin\psi_1, a_2\cos\psi_2, -a_2\omega_2\sin\psi_2) +$$
$$+ g_{k2}^2(a_1\cos\psi_1, -a_1\omega_1\sin\psi_1, a_2\cos\psi_2, -a_2\omega_2\sin\psi_2)] -$$
$$- \frac{\cos\psi_k}{a_k\omega_k} f_k(a_1\cos\psi_1, -a_1\omega_1\sin\psi_1, a_2\cos\psi_2, -a_2\omega_2\sin\psi_2),$$

$$B_{21}^{(k)} = -\frac{\cos\psi_k}{a_k\omega_k}\, g_{k1}(a_1\cos\psi_1, -a_1\omega_1\sin\psi_1, a_2\cos\psi_2, -a_2\omega_2\sin\psi_2),$$

$$B_{22}^{(k)} = -\frac{\cos\psi_k}{a_k\omega_k}\, g_{k2}(a_1\cos\psi_1, -a_1\omega_1\sin\psi_1, a_2\cos\psi_2, -a_2\omega_2\sin\psi_2).$$

Решением системы уравнений (11) будет четырехмерный марковский процесс $\{a_1(t), a_2(t), \theta_1(t), \theta_2(t)\}$. Этому процессу будет соответствовать стационарное уравнение ФПК

$$\sum_{k=1}^{2} \frac{\partial}{\partial a_k}\left[A_{1k}W\right] + \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial}{\partial \theta_k}\left[B_{1k}W\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\left\{\sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial^2}{\partial a_i \partial a_j}\left[\left(\sum_{k=1}^{2} A_{2k}^{(i)} A_{2k}^{(j)}\right)W\right] +\right.$$

$$+ 2 \sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial^2}{\partial a_i \partial \theta_j} \left[\left(\sum_{k=1}^{2} A_{2k}^{(i)} B_{2k}^{(j)} \right) W \right] +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial^2}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \left[\left(\sum_{k=1}^{2} B_{2k}^{(i)} B_{2k}^{(j)} \right) W \right] \Bigg\}, \tag{12}$$

где $\theta_k = \psi_k - \omega t$, коэффициенты A_{1k}, B_{1k}, $A_{2k}^{(1)}$, $A_{2k}^{(2)}$, $B_{2k}^{(1)}$, $B_{2k}^{(2)}$ имеют вид коэффициентов правых частей уравнений (11).

Аналитическое решение этих уравнений весьма затруднительно. Для уравнений четвертого порядка

$$x^{\mathrm{IV}} + b_1 x''' + b_2 x'' + b_0 x =$$
$$= \varepsilon f(x, x', x'', x''') + \sqrt{\varepsilon}\, g(x, x', x'', x''')\, \dot{\xi}(t) \tag{13}$$

А. И. Мельниковым [9] исследованы случайные колебательные процессы в зависимости от характера корней характеристического полинома линейного уравнения $(\varepsilon = 0)$. Исследован вопрос о существовании стационарных решений усредненного уравнения ФПК.

Для уравнений второго порядка типа Ван-дер-Поля

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + x = \varepsilon (1 - x^2) \frac{dx}{dt} + \sqrt{\varepsilon}\, \sigma\, \dot{\xi}(t) \tag{14}$$

В. Г. Коломийцем [5] изложенными выше методами найдена стационарная устойчивая амплитуда случайных колебаний в виде

$$a = \sqrt{2 + 2\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{2}}}\,. \tag{15}$$

Для некоторых систем второго порядка к решению уравнений ФПК удается применить обобщенный метод разделения переменных [10], а также методы, изложенные в [11].

1. *Боголюбов Н. Н.* О некоторых статистических методах в математической физике. – Киев: Изд-во АН УССР, 1945. – 137 с.
2. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 501 с.
3. *Митропольский Ю. А.* Метод усреднения в нелинейной механике. – Киев: Наук. думка, 1971. – 440 с.
4. *Митропольский Ю. А., Коломиец В. Г.* Применение асимптотических методов в стохастических системах // Приближенные методы исследования нелинейных систем. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1976. – С. 102 – 147.
5. *Коломиец В. Г.* Случайные колебания нелинейных систем с сосредоточенными параметрами. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1980. – 60 с.
6. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М.* Исследование колебательных систем второго порядка. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1976. – 50 с.
7. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения. – Киев: Наук. думка, 1968. – 354 с.
8. *Хасьминский Р. З.* О принципе усреднения для параболических и эллиптических дифференциальных уравнений и марковских процессов с малой диффузией // Теория вероятностей и ее применения. – 1963. – **8**, вып. 1. – С. 9 – 25.
9. *Мельников А. И.* О колебательных процессах в автономных системах стохастических дифференциальных уравнений Ито четвертого порядка // Асимптотические методы в задачах мат. физики. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1989. – С. 87 – 93.
10. *Коломиец В. Г., Рыбачок А. В.* Интегрирование уравнения Колмогорова – Фоккера – Планка обобщенным разделением аргумента // Укр. мат. журн. – 1988. – **40**, № 5. – С. 635 – 639.
11. *Митропольский Ю. А., Нгуен Ван Дао, Нгуен Донг Ань.* Нелинейные колебания в системах произвольного порядка. – Киев: Наук. думка, 1992. – 344 с.

Получено 05.04.94