УДК 517.574 + 517.576

А. Ю. Рашковский, канд. физ.-мат. наук,
Л. И. Ронкин, д-р физ.-мат. наук (Физ.-техн. ин-т низких температур НАН Украины, Харьков)

ПРОДОЛЖЕНИЕ И АППРОКСИМАЦИЯ СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ПОЛУПЛОСКОСТИ. НЕВОЗМОЖНОСТЬ ПРОДОЛЖЕНИЯ ПЛЮРИСУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Various extensions to the whole plane of a subharmonic function defined on a half-plane are constructed. The results obtained are alpplied to approximation of a subharmonic function of finite order by the logarithm of the modulus of an entire function. It is shown that a problem of the extension of plurisubharmonic functions may have no solution.

Будуються різного роду продовження субгармонічної в півплощині функції на всю площину. Одержані результати застосовуються для апроксимації субгармонічної функції скінченного порядку в півплощині логарифмом модуля цілої функції. Показано, що задача про продовження плюрисубгармонічної функції може не мати розв'язку.

Одной из традиционных задач теории голоморфных функций является задача построения целой функции с заданными асимптотическими свойствами. В настоящее время весьма распространен следующий способ решения таких задач. Вначале решается более простая задача построения субгармонической функции с нужными свойствами, после чего искомая целая функция строится как целая функция, логарифм модуля которой в некотором смысле хорошо аппроксимирует указанную субгармоническую функцию. Впервые возможность „хорошей" аппроксимации субгармонической в $\mathbb{C}$ функции логарифмом модуля целой была установлена В. С. Азариным [1]. Далеко идущее усиление результата В. С. Азарина было получено Р. С. Юлмухаметовым [2]. Соответствующее утверждение из [2] формулируется следующим образом.

Теорема Ю. *Пусть* $u(z)$ — *субгармоническая функция на плоскости, имеющая конечный порядок роста* $\rho > 0$. *Тогда существует целая функция* $f(z)$ *такая, что* $\big|\, u(z) - \ln|f(z)| \,\big| \le C_\alpha \ln|z|$, $z \notin E_\alpha$, *где исключительное множество* E_α *при* $\alpha > \rho$ *может быть покрыто кружками* $\{z : |z - z_j| < t_j\}$, $j = 1, 2, \ldots$, *так, что* $\sum_{|z_j| > R} t_j = O(R^{\rho-\alpha})$, $R \to \infty$.

Мы используем здесь теорему в несколько иной формулировке, сообщенной нам А. А. Гольдбергом.

Теорема Ю′. *Пусть* $u(z)$ — *субгармоническая функция на плоскости, имеющая конечный порядок роста* $\rho > 0$. *Тогда существует целая функция* $f(z)$ *такая, что* $\int_0^{2\pi} \big|\, u(re^{i\theta}) - \ln|f(re^{i\theta})| \,\big|\, d\theta = O(\ln^2 r)$, $r \to \infty$.

Основной задачей, решаемой в данной работе, является получение подобных фактов для субгармонических функций конечного порядка в верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ (теорема 4). С этой целью предварительно исследуется возможность продолжения таких функций из некоторой подобласти полуплоскости $\mathbb{C}_+$ до субгармонической функции конечного порядка во всей плоскости (теоремы 1 – 3). Задача такого продолжения, на наш взгляд, представляет самостоятельный интерес. После построения указанного продолжения вопрос об аппроксимации в $\mathbb{C}_+$ решается с помощью теоремы Ю′.

В случае функций многих переменных вопрос о возможности „хорошей" аппроксимации плюрисубгармонической функции конечного порядка в $\mathbb{C}^n$ логарифмом модуля целой функции был положительно решен в работах Р. Сигурдссона [3] и Р. С. Юлмухаметова [4]. Полуплоскости, как известно, в случае многих переменных соответствуют трубчатые области $T_B = \mathbb{R}^n + iB$ с выпуклым основанием $B \subset \mathbb{R}^n$. В статье показывается (теорема 5), что существуют плюрисубгармонические функции в T_B, не продолжаемые из любой области $G \subset\subset T_B$ на область G^0, где $G^0 \supset T_B$, $G^0 \neq T_B$. Это означает, что метод, используемый в статье для решения задачи аппроксимации в $\mathbb{C}_+$, не распространяется непосредственно на случай многих переменных.

Как принято, через $SH(G)$, $PSH(G)$ и $H(G)$ обозначим соответственно пространства субгармонических, плюрисубгармонических, голоморфных функций в области G.

Теорема 1. *Пусть* $u \in SH(\mathbb{C}_+)$ *и область* $\Omega \subset \overline{\Omega} \subset \mathbb{C}_+$. *Тогда существует функция* $v \in SH(\mathbb{C})$ *такая, что* $v(z) = u(z) \quad \forall z \in \Omega$.

Доказательство. Возьмем какую-либо функцию $\delta(x)$, $x \in \mathbb{R}$, и рассмотрим множество $\Omega_\delta = \{z = x + iy \in \mathbb{C}: y > \delta(x)\}$. Далее будем считать, что $\delta(x) \in C(\mathbb{R})$, $\delta(x) > 0$ и $\Omega \subset \Omega_\delta$. Очевидно, что подобный выбор функции $\delta(x)$ возможен. Положим $h = \frac{1}{2}\delta(0)$, $E_1 = \left\{ z: |z - ih| < 2,\ y < \frac{1}{2}\delta(x) \right\}$, $H_1 = \partial E_1 \cap \{z: |z - ih| = 2\}$, $F_1 = \partial E_1 \setminus H_1$. Через $w_1(z)$ обозначим решение обобщенной[1] задачи Дирихле в области E_1 с граничными значениями, равными $u(z) - 1$ на F_1 и N_1 на H_1, где число N_1 выбрано так, чтобы на кривой $\left\{ z:\ y = \frac{1}{4}\delta(x),\ |z - ih| \le 2 \right\}$ выполнялось неравенство $w_1(z) > u(z)$. Положим

$$v_1(z) = \begin{cases} u(z), & z \in \Omega_{\delta/2} \cup F_1; \\ \max\{u(z), w_1(z)\}, & z \in E_1 \cap \left\{ z:\ y > \frac{1}{4}\delta(x) \right\}; \\ w_1(z), & z \in E_1 \cap \left\{ z:\ y \le \frac{1}{4}\delta(x) \right\}. \end{cases}$$

Очевидно, что $v_1 \in SH(\Omega_{\delta/2} \cup E_1 \cup F_1)$ и $v_1(z) = u(z) \quad \forall z \in \Omega_{\delta/2}$. Далее построим функции $v_2(z), v_3(z), \ldots$ следующим образом. Положим $\delta_n(x) = \delta(x) \sum_{1 \le k \le n} 2^{-k}$, $\tilde{\delta}_n(x) = \delta_{n-1}(x) + 2^{-n-1}\delta(x)$,

$$E_n = \{z:\ 2^{n-1} - 1 < |z - ih| < 2^n,\ y < \delta_n(x)\},$$

$$H_n = \overline{E}_n \cap \{z: |z - ih| = 2^n\},\ F_n = \partial E_n \setminus H_n,$$

$$\tilde{E}_n = \{z: |z - ih| \le 2^{n-1} - 1,\ y \le \delta_n(x)\}.$$

Заметим, что $\tilde{E}_1 \subset F_1$. Считая, что совпадающая с $u(z)$ в $\Omega_{\delta_{n-1}}$ функция v_{n-1} из класса $SH\left(\Omega_{\delta_{n-1}} \cup E_{n-1} \cup \tilde{E}_{n-1} \cup F_{n-1}\right)$ уже построена, найдем для области E_n решение $w_n(z)$ задачи Дирихле с краевым условием $w_n(z) = v_{n-1}(z) - 1$ на F_n, $w_n(z) = N_n$ на H_n. Здесь число N_n выбрано так, чтобы

[1] Граничные значения, вообще говоря, не непрерывны.

на кривой $\gamma_n = \left\{ z: |z-ih| < 2^{n-1} - \frac{1}{2},\ y < \tilde{\delta}_n(x) \right\} \cup \left\{ z: y < \tilde{\delta}_n(x),\ 2^{n-1} - \frac{1}{2} \le |z-ih| < 2^n \right\}$ выполнялось неравенство $w_n(z) > v_{n-1}(z)$. Обозначим через K_n часть области E_n, лежащую над кривой γ_n. Положим затем

$$v_n(z) = \begin{cases} v_{n-1}(z), & z \in \Omega_{\delta_n} \cup \tilde{E}_n \cup F_n\,; \\ \max\{v_{n-1}(z), w_n(z)\}, & z \in K_n\,; \\ w_n(z), & z \in E_n \setminus K_n\,. \end{cases}$$

Ясно, что функция $v_n \in SH\left(\Omega_{\delta_n} \cup E_n \cup \tilde{E}_n \cup F_n \right)$ и $v_n(z) = u_n(z),\ z \in \Omega_{\delta_n}$.

Заметим теперь, что $v_m(z) \equiv v_n(z)$ в $\tilde{E}_n$ при $m > n$ и $\bigcup_n \tilde{E}_n = \{z: y < \delta(z)\}$. Кроме того, при любом n функция $v_n(z)$ на Ω_δ совпадает с $u(z)$. Поэтому функция

$$v(z) = \begin{cases} u(z), & z \in \overline{\Omega}_\delta\,; \\ v_n(z), & z \in \tilde{E}_n \end{cases}$$

корректно определена. Из ее построения видно, что $v \in SH(\mathbb{C})$ и $v(z) = u(z)\ \ \forall z \in \Omega$. Теорема доказана.

Если о функции u, фигурирующей в теореме 1, дополнительно известно, что она имеет в $\mathbb{C}_+$ конечный порядок, то вполне естественно поставить вопрос о росте ее продолжения в $\mathbb{C}$. Изложение полученных в этом направлении разультатов предварим следующими двумя замечаниями.

1. Для любого $\rho > 0$ найдется функция $u \in SH(\mathbb{C}_+)$, которая удовлетворяет условию $u(z) \le a|z|^\rho + b\ \ \forall z \in \mathbb{C}_+$, а ее любое продолжение $v(z)$ из $\Omega^{(\alpha)} = \left\{ z: \ y > \max\{|x|^\alpha, 1\} \right\}$, $0 < \alpha < 1$, на всю плоскость не может удовлетворять условию $v(z) \le a_1|z|^{\rho'} + b_1\ \ \forall z \in \mathbb{C}$, с $\rho' < \rho + \frac{1-\alpha}{2}$. Такой функцией является, например, канонический потенциал (в $\mathbb{C}_+$) меры[2]

$$d\mu(z) = \frac{|z|^{\rho-2}\,dx\,dy}{\sin^{3/2}(\arg z)}.$$

Не вдаваясь в подробности проверки этого утверждения, заметим, что рост функции u связан с ростом функции $\tilde{\mu}(r) = \int_{K(r)} \sin(\arg z)\,d\mu(z)$, $K(r) = \{z \in \mathbb{C}_+: 1 < |z| < r\}$, а рост функции v — с ростом функции $\mu(r) = \int_{K_\alpha(r)} d\mu$, $K_\alpha(r) = \{z \in K(r): y > |x|^\alpha\}$.

2. Если функция $u \in SH(\mathbb{C}_+)$ ограничена в $\mathbb{C}_+$, а число $\rho < 1$, то согласно принципу Фрагмена – Линделефа ее нельзя продолжить из угла $\{\delta < \arg z < \pi - \delta\}$, где $0 < \delta < \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\rho} - 1 \right)$, на всю плоскость как функцию порядка ρ (если, конечно, $u(z) \not\equiv \mathrm{const}$).

Теорема 2. *Пусть функция* $u \in SH(\mathbb{C}_+)$ *и удовлетворяет при некоторых*

[2] Определение и свойства канонического потенциала для $\mathbb{C}_+$ см. в [5 – 7].

постоянных $a > 0$, $b \geq 0$, $\rho \geq 1$ *условию* $u(z) \leq a|z|^\rho + b \quad \forall z \in \mathbb{C}_+$. *Тогда при любых* $\delta > 0$ *и* $\varepsilon > 0$ *существует функция* $v \in SH(\mathbb{C})$, *совпадающая с* u *в области* $\{z\colon \ \delta < \arg z < \pi - \delta, \ |z| > \varepsilon\}$ *и такая, что* $v(z) \leq A|z|^\rho + B \quad \forall z \in \mathbb{C}$ (A *и* B — *константы*).

Доказательство. Не теряя общности, можем считать, что функция u удовлетворяет в $\mathbb{C}_+$ неравенству $u(z) \leq |z|^\rho$ и $\delta < \dfrac{\pi}{3\rho}$. Положим

$$Y_{r,R}^{(\alpha,\beta)} = \{z\colon \ \alpha < \arg z < \beta, \ r < |z| < R\},$$

$$\Gamma_{r,R}^{(\alpha)} = \{z\colon \ \arg z = \alpha, \ r \leq |z| \leq R\},$$

$$\Gamma_r^{(\alpha,\beta)} = \{z\colon \ \alpha < \arg z < \beta, \ |z| = r\}.$$

Вначале „исправим" функцию $u(z)$ в окрестности вещественной оси. Для этого в угле $Y_{0,\infty}^{(0,2\pi)}$ найдем решение $w_1(z)$ задачи Дирихле с граничными данными $w_1\big|_{\Gamma_{0,\infty}^{(0)}} = |z|^\rho$, $w_1\big|_{\Gamma_{0,\infty}^{(2\delta)}} = u\big|_{\Gamma_{0,\infty}^{(2\delta)}}$, и условием на бесконечности $w_1(z) = O(|z|^\rho)$. Положим

$$v_1(z) = \begin{cases} u(z), & z \in Y_{0,\infty}^{(2\delta,\pi)} \cup \Gamma_{0,\infty}^{(2\delta)}; \\ w_1(z), & z \in Y_{0,\infty}^{(0,2\delta)}. \end{cases}$$

Функция $v_1 \in SH(\mathbb{C}_+)$ и в силу принципа Фрагмена – Линделефа удовлетворяет неравенству $v_1(z) \leq 2|z|^\rho \ \ \forall z \in \mathbb{C}_+$. Отсюда следует [8], что существует такая константа $C_1 > 0$, что

$$\int_0^\pi |v_1(Re^{i\theta})| \sin\theta \, d\theta < C_1(R^\rho + 1), \tag{1}$$

$$\int_{\varepsilon/4}^R |v_1(re^{i\varphi})| \, dr < C_1(R^{\rho+1} + 1) \quad \forall R \geq \frac{\varepsilon}{4}, \ \ \forall \varphi \in [0, \pi). \tag{2}$$

Пусть $G(z, \zeta)$ — функция Грина области $Y_{R/2,2R}^{(0,2\delta)}$, $R \geq \dfrac{\varepsilon}{2}$. Из неравенств (1) и (2) вытекает

$$v_1(Re^{i\delta}) = \int_{\partial Y_{R/2,2R}^{(0,2\delta)}} v_1(\zeta) \frac{\partial G(Re^{i\delta}, \zeta)}{\partial n_\zeta} \, d\sigma(\zeta) >$$

$$> -A\left[\int_0^\delta \left| v_1\!\left(\frac{R}{2} e^{i\theta}\right) \right| \sin\frac{\pi\theta}{2\delta} \, d\theta + \int_0^\delta \left| v_1(2Re^{i\theta}) \right| \sin\frac{\pi\theta}{2\delta} \, d\theta + \right.$$

$$\left. + \frac{\pi}{2\delta} \int_{R/2}^R \frac{\left|v_1\left(re^{2i\delta}\right)\right|}{r} \, dr \right] \geq -C_2(R^{\rho+1} + 1).$$

Здесь воспользовались оценками функции Грина „воротничка" $Y_{R/2,2R}^{(0,2\delta)}$ [7, 9]:

$$\frac{\partial G(z,\zeta)}{\partial n_\zeta} \le \frac{A}{R}\sin\left(\frac{\pi}{2\delta}\arg z\right), \ \zeta\in \Gamma_{R/2}^{(0,2\delta)}\cup\Gamma_{2R}^{(0.2\delta)},$$

$$\frac{\partial G(z,\zeta)}{\partial n_\zeta} \le A\,\frac{\pi}{2\delta|z|}, \ \zeta\in \Gamma_{R/2,2R}^{(0)}\cup\Gamma_{R/2,2R}^{(2\delta)},$$

$$z\in K\subset\subset Y_{R/2,2R}^{(0,2\delta)}, \ A = A(K,\delta).$$

Проделав ту же операцию с функцией v_1 в угле $Y_{0,\infty}^{(\pi-2\delta,\pi)}$, получим функцию $v_2\in SH(\mathbb{C}_+)$, которая равна $|z|^\rho$ на вещественной оси, совпадает с $u(z)$ в угле $Y_{0,\infty}^{(2\delta,\pi-2\delta)}$ и удовлетворяет неравенствам $v_2(z)\le 2|z|^\rho \ \forall z\in\mathbb{C}_+$ и $v_2(z) > -C_2(|z|^\rho+1) \ \ \forall z\in \Gamma_{\varepsilon/2,\infty}^{(\delta)}\cup\Gamma_{\varepsilon/2,\infty}^{(\pi-\delta)}$. Подправим теперь функцию v_2 вблизи нуля. Пусть w_3 — наименьшая гармоническая мажоранта функции v_2 в полукруге $Y_{0,\varepsilon}^{(0,\pi)}$. Нетрудно видеть, что существует константа $C_3>0$ такая, что $w_3(re^{i\delta}) > -C_3 r$ и $w_3(re^{i(\pi-\delta)}) > -C_3 r \ \ \forall r<\varepsilon$. Положим

$$v_3(z) = \begin{cases} w_3(z), & z\in\overline{Y_{0,\varepsilon}^{(0,\pi)}};\\ v_2(z), & z\in\mathbb{C}_+\setminus\overline{Y_{0,\varepsilon}^{(0,\pi)}}.\end{cases}$$

Эта функция, очевидно, субгармонична в $\mathbb{C}_+$. По построению она совпадает с $u(z)$ в области $Y_{\varepsilon,\infty}^{(2\delta,\pi-2\delta)}$, равна $|z|^\rho$ на вещественной оси и удовлетворяет оценке $v_3(z)\le 2|z|^\rho$ всюду, а оценке $v_3(z) > -C_4(|z|^\rho+|z|)$ — на лучах $\Gamma_{0,\infty}^{(\delta)}$ и $\Gamma_{0,\infty}^{(\pi-\delta)}$. Продолжим функцию v_3 на всю плоскость. Для этого рассмотрим гармоническую в правой полуплоскости функцию $L_1(re^{i\theta}) = Cr^\rho\sin(\psi-\rho\theta)$, где числа $C>0$ и $\psi\in(0,\rho\delta)$ таковы, что $L_1(re^{i\delta}) = -C_4 r^\rho$, $L_1(r) = 2r^\rho$. Пусть $\psi_1 = (\psi-\pi/2)/\rho$ — ближайший к 0 максимум функции L_1 на дуге $\Gamma_1^{(-\pi/2,0)}$. Определим субгармоническую в $\mathbb{C}\setminus\Gamma_{0,\infty}^{(\pi/2)}$ функцию L_2, положив

$$L_2(z) = \begin{cases} L_1(z), & \psi_1 < \arg z < \dfrac{\pi}{2};\\ Cr^\rho, & -\dfrac{\pi}{2}\le\arg z\le\psi_1;\\ L_1(-\bar z), & -\dfrac{3}{2}\pi < \arg z < -\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Введем также гармоническую в $\mathbb{C}$ функцию $L_3(re^{i\theta}) = -\dfrac{C_4}{\sin\delta}r\sin\theta$. Отметим, что $L_3(re^{i\delta}) = L_3(re^{i(\pi-\delta)}) = -C_4 r$, $L_3(\pm r) = 0$. Определим, наконец, функцию $v(z)$, положив

$$v(z) = \begin{cases} v_3(z), & z\in\overline{Y_{0,\infty}^{(\delta,\pi-\delta)}};\\ \max\left\{v_3(z), L_2(z)+L_3(z)\right\}, & z\in Y_{0,\infty}^{(0,\delta)}\cup Y_{0,\infty}^{(\pi-\delta,\pi)};\\ L_2(z)+L_3(z), & z\in\overline{Y_{0,\infty}^{(-\pi,0)}}.\end{cases}$$

Эта функция субгармонична в $\mathbb{C}$, поскольку $v_3(z) > L_2(z) + L_3(z)$ на $\Gamma_{0,\infty}^{(\delta)} \cup \Gamma_{0,\infty}^{(\pi-\delta)}$, а на $\mathbb{R}$ выполнено противоположное неравенство. Сопоставляя оценки функций v_3, L_2, L_3, имеем

$$v(z) \le C|z|^\rho + \frac{C_4}{\sin\delta}|z| \quad \forall\, z \in \mathbb{C}.$$

Кроме того, по построению $v(z) = u(z) \quad \forall\, z \in Y_{\varepsilon,\infty}^{(2\delta,\pi-2\delta)}$. Тем самым, функция v — искомая. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь задачу о продолжении субгармонической в $\mathbb{C}_+$ функции конечного порядка из сдвинутой полуплоскости $\mathbb{C}_+ + ih$, $h > 0$. Хотя на сохранении порядка в этой ситуации рассчитывать не приходится, удается сохранить конечность порядка.

Обозначим через $SH(\mathbb{C}_+, \rho]$, $\rho > 0$, класс всех функций $u \in SH(\mathbb{C}_+)$, удовлетворяющих при некоторых $A_1 > 0$ и $A_2 > 0$ неравенствам[3]

$$u(re^{i\theta}) \le A_1(r^\rho + 1), \tag{3}$$

$$\int_0^\pi |u(re^{i\theta})|\sin\theta\, d\theta \le A_2(R^\rho + 1). \tag{4}$$

Отметим, что в случае $\rho \ge 1$ соотношение (4) вытекает из (3) [10].

Теорема 3. *Для любой функции $u \in SH(\mathbb{C}_+, \rho]$, $\rho > 0$, и любого числа $h > 0$ существует функция $v \in SH(\mathbb{C}_+)$, которая удовлетворяет неравенству $v(z) \le A|z|^{\rho+2} \quad \forall\, z \in \mathbb{C}$, принадлежит классу $SH(\mathbb{C}_+, \rho]$, а в области $\{z\colon \operatorname{Im} z > h\}$ совпадает с $u(z)$.*

Доказательство. Без потери общности можем считать, что $u(z) \le |z|^\rho$ $\forall\, z \in \mathbb{C}_+$. Как и при доказательстве предыдущей теоремы, вначале подправим функцию $u(z)$ вблизи границы. Именно, решим в полосе $I_h = \{z\colon 0 < \operatorname{Im} z < h\}$ задачу Дирихле с граничными данными $w_1(x+ih) = u(x+ih)$, $w_1(x) = |x|^\rho$, и положим

$$v_1(z) = \begin{cases} u(z), & \operatorname{Im} z > h; \\ w_1(z), & 0 \le \operatorname{Im} z \le h. \end{cases}$$

Функция v_1 также принадлежит классу $SH(\mathbb{C}_+, \rho]$. В самом деле, существует решение задачи Дирихле в угле $\{0 < \arg z < \delta\}$, $\delta < \dfrac{\pi}{2\rho}$, с граничными данными $\tilde{w}_1(re^{i\delta}) = v_1(re^{i\delta})$, $\tilde{w}_1(r) \le r^\rho$, которое удовлетворяет неравенству $\tilde{w}_1(z) \le 2|z|^\rho + C_1$ с некоторой константой C_1. Поскольку $v_1 \le \tilde{w}_1$, то для v_1 выполняется неравенство (3). Что касается неравенства (4), то оно следует из совпадения функций v_1 и u вне полосы I_h [9].

Оценим теперь функцию v_1 снизу на прямой $\operatorname{Im} z = \dfrac{h}{2}$. Заметим предварительно,что верна интегральная оценка

[3] Подробнее о функциях этого класса см. в [6 – 11].

$$\int_{-R}^{R} |v_1(x+ih)|\, dx \le C_2(R^{\rho+1}+1) \quad \forall\, R>0, \tag{5}$$

вытекающая из того, что для функции $\tilde{v}_1(z) \overset{\text{def}}{=} v_1(z+ih)$ справедливо неравенство [8]

$$\int_{1<|x|<R} |\tilde{v}_1(x)| \frac{dx}{|x|} \le C_2'(R^\rho+1).$$

В силу гармоничности функции v_1 в полосе I_h

$$v_1(z) = \int_{\partial I_h} P(z,\zeta)\, v_1(\zeta)\, d|\zeta|, \ \ z\in I_h,$$

где $P(z,\zeta)$ — ядро Пуассона области I_h. При $\zeta = \xi + i\frac{h}{2} \pm i\frac{h}{2}$, $z = x + i\frac{h}{2}$, это ядро имеет вид

$$P(z,\zeta) = \frac{\pi}{h}\,\frac{1}{\operatorname{ch}\frac{\pi(x-\xi)}{h}}.$$

Значит,

$$v_1\left(x+i\frac{h}{2}\right) = \frac{\pi}{h}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{v_1(\xi+ih)+v_1(\xi)}{\operatorname{ch}\frac{\pi(x-\xi)}{h}}\, d\xi >$$

$$> -\frac{\pi}{h}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|v_1(\xi+ih)|}{\operatorname{ch}\frac{\pi(x-\xi)}{h}}\, d\xi = -\frac{\pi}{h}\left[\int_{|\xi|<|x|} \frac{|v_1(\xi+ih)|}{\operatorname{ch}\frac{\pi(x-\xi)}{h}}\, d\xi + \right.$$

$$\left. + \int_{|\xi|>|x|} \frac{|v_1(\xi+ih)|}{\operatorname{ch}\frac{\pi(x-\xi)}{h}}\, d\xi\right] = -\frac{\pi}{h}\,[J_1+J_2]. \tag{6}$$

Ясно, что

$$J_1 \le \int_{-|x|}^{|x|} |v_1(\xi+ih)|\, d\xi \le C_2(|x|^{\rho+1}+1). \tag{7}$$

Далее, при $x>1$ с учетом оценки (5) имеем

$$J_2 \le 2\int_x^{\infty} \exp\left[\frac{\pi(x-\xi)}{h}\right] |v_1(\xi+ih)|\, d\xi =$$

$$= 2\exp\left(\frac{\pi x}{h}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\int_{e^n x}^{e^{n+1}x} \exp\left(-\frac{\pi\xi}{h}\right)|v_1(\xi+ih)|\, d\xi \le$$

$$\le 2\exp\left(\frac{\pi x}{h}\right)\sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{\pi e^n x}{h}\right) C_2\left[(e^{n+1}x)^{\rho+1}+1\right] \le$$

$$\leq C_3 x^{\rho+1} \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left[\frac{\pi x}{h}(1-e^n) \right] e^{n\rho} \leq$$

$$\leq C_3 x^{\rho+1} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left[\frac{\pi(1-e^n)}{h} + n\rho \right] \leq C_4 x^{\rho+1}.$$

Аналогично, при $x < -1$ $J_2 \leq C_4 |x|^{\rho+1}$. Следовательно,

$$J_2 \leq C_5(|x|^{\rho+1} + 1) \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

Подставляя неравенства (7) и (8) в соотношение (6), получаем искомую оценку

$$v_1\left(x + i\frac{h}{2} \right) \geq -C_6(|x|^{\rho+1} + 1) \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

Перейдем теперь непосредственно к продолжению функции v_1. Положим

$$v_2(x+iy) = \begin{cases} -\left(|x|^{\rho+1} + (\rho+1)^{\rho+1}\right)\sin y, & 0 < y < \pi; \\ -\left(|x|^{\rho+1} + (\rho+1)^{\rho+1}\right) y, & y \leq 0. \end{cases}$$

Легко проверить, что функция v_2 субгармонична в полуплоскости $\operatorname{Im} z < \pi$. Выберем $C_7 > 0$ так, чтобы на прямой $\operatorname{Im} z = \dfrac{h}{2}$ выполнялось неравенство

$$C_7 v_2(z) < -C_6(|x|^{\rho+1} + 1) - 2|z|^{\rho},$$

и положим $v_3(z) < C_7 v_2(z) + 2|z|^{\rho}$. Ввиду неравенства (9) $v_3(z) > v_1(z)$ при $\operatorname{Im} z = \dfrac{h}{2}$. Кроме того, $v_3(x) = 2|x|^{\rho} > v_1(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Значит, функция

$$v(z) = \begin{cases} v_1(z), & \operatorname{Im} z \geq \dfrac{h}{2}; \\ \max\left\{v_1(z), v_3(z)\right\}, & 0 < \operatorname{Im} z < \dfrac{h}{2}; \\ v_3(z), & \operatorname{Im} z \leq 0, \end{cases}$$

будет субгармонической функцией порядка $\rho + 2$ в $\mathbb{C}$, совпадающей при $\operatorname{Im} z \geq h$ с исходной функцией $u(z)$ и принадлежащей классу $SH(\mathbb{C}_+, \rho]$. Следовательно, функция $v(z)$ — искомая. Теорема доказана.

Для решения упомянутого в начале статьи вопроса об аппроксимации в $\mathbb{C}_+$ нам понадобится следующая лемма.

Лемма. *Для любой функции $u \in SH(\mathbb{C}_+, \rho]$ существует такая константа $D > 0$, что*

$$\int_0^{\alpha} |u(te^{i\theta})| \sin\theta \, d\theta \leq D\alpha t^{\rho} \quad \forall t > 1, \ 0 < \alpha < \pi.$$

Доказательство. Заметим вначале, что при некоторой постоянной A_3 выполняется неравенство [8]

$$\int_{1/2}^{R} |u(te^{i\theta})| \, dt \leq A_3 R^{\rho+1} \quad \forall R \geq 1, \ 0 < \theta < \pi. \tag{10}$$

Для любого $\alpha \in \left(0, \min\left\{\pi, \frac{\pi}{\rho}\right\}\right)$ положим $v_\alpha(z) \le u(z^{\alpha/\pi})$, $z \in \mathbb{C}_+$. Очевидно, что $v_\alpha \in SH(\mathbb{C}_+)$ и удовлетворяет оценке

$$v_\alpha(z) \le A_1(|z|^{\alpha\rho/\pi} + 1).$$

Кроме того, из неравенства (10) следует, что для каждого $R \ge 1$

$$\int_1^{2R} |v_\alpha(it)|\, dt = \int_1^{2R} |u(t^{\alpha/\pi} e^{i\alpha/2})|\, dt =$$

$$= \frac{\pi}{\alpha} \int_1^{(2R)^{\alpha/\pi}} |u(re^{i\alpha/2})|\, r^{\pi/\alpha - 1}\, dr \le \frac{\pi}{\alpha} A_3 (2R)^{\alpha\rho/\pi}.$$

Значит, существуют такие $A_4 > 0$ и $t^0 = t^0(R) \in \left(\frac{3}{4}R, \frac{5}{4}R\right)$, что

$$|v_\alpha(it^0)| \le \alpha^{-1} A_4 R^{\alpha\rho/\pi} \quad \forall\, R \ge 1.$$

Пусть $G(z, \zeta)$ — функция Грина области $\left\{z \in \mathbb{C}_+ : \frac{R}{2} < |z| < 2R\right\}$. Из формулы Пуассона – Иенсена следует

$$v_\alpha(it^0) \le \frac{R}{4\pi} \int_0^\pi \frac{\partial G\left(it^0, \frac{R}{2}e^{i\theta}\right)}{\partial n} v_\alpha\left(\frac{R}{2}e^{i\theta}\right) d\theta +$$

$$+ \frac{R}{\pi} \int_0^\pi \frac{\partial G\left(it^0, 2Re^{i\theta}\right)}{\partial n} v_\alpha(2Re^{i\theta})\, d\theta +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{R}{2} \le |x| \le 2R} \frac{\partial G\left(it^0, x\right)}{\partial n} A_1(|x|^{\alpha\rho/\pi} + 1)\, dx.$$

Учитывая содержащиеся в [7, 9] оценки функции $\partial G / \partial n$ (часть из них мы уже использовали при доказательстве теоремы 2) и выбор точки t^0, получаем неравенство

$$\int_0^\pi |v_\alpha(2Re^{i\theta})| \sin\theta\, d\theta \le \frac{C}{\alpha}(2R)^{\alpha\rho/\pi} \quad \forall\, R \ge 1,$$

с константой C, не зависящей от α и R. Возвращаясь к функции $u(z)$, получаем, что при $t = r^{\alpha/\pi} \ge 2$

$$\int_0^{\alpha/2} |u(te^{i\varphi})| \sin\varphi\, d\varphi = \frac{\alpha}{\pi} \int_0^{\pi/2} |v_\alpha(re^{i\theta})| \sin\frac{\alpha}{\pi}\theta\, d\theta \le$$

$$\le \frac{\alpha}{\pi} \sin\frac{\alpha}{2} \int_0^{\pi/2} |v_\alpha(re^{i\theta})| \sin\theta\, d\theta \le \sin\frac{\alpha}{2}\, \frac{C}{\pi}\, r^{\alpha\rho/\pi} \le \frac{\alpha}{2} D t^\rho.$$

Лемма доказана.

Перейдем теперь непосредственно к вопросу об аппроксимации функции

$u \in SH(\mathbb{C}_+, \rho]$, $\rho > 0$, логарифмом модуля целой функции. В соответствии с теоремой 3 построим субгармоническую в $\mathbb{C}$ функцию $v(z)$, совпадающую с $u(z)$ при $\operatorname{Im} z > h > 0$, принадлежащую классу $SH(\mathbb{C}_+, \rho]$ и порядка $\rho + 2$ в $\mathbb{C}$. Согласно теореме Ю′ найдется целая функция $f(z)$, удовлетворяющая соотношению

$$\int_0^{2\pi} \left| v(re^{i\theta}) - \ln|f(re^{i\theta})| \right| d\theta \le A \ln^2 r, \quad r > r_0. \tag{11}$$

Тогда при $r > r_1$

$$\int_0^{\pi} \left| u(re^{i\theta}) - \ln|f(re^{i\theta})| \right| \sin\theta \, d\theta \le$$

$$\le \int_0^{\pi} \left| v(re^{i\theta}) - \ln|f(re^{i\theta})| \right| \sin\theta \, d\theta +$$

$$+ \int_{\sin\theta > h/r} \left(|u(re^{i\theta})| + |v(re^{i\theta})| \right) \sin\theta \, d\theta \le A \ln^2 r + D h r^{\rho - 1}.$$

По-другому охарактеризовать скорость этой аппроксимации можно исходя из следующей оценки функций класса $SH(\mathbb{C}_+, \rho]$ [8]:

$$\int_{Y_{\lambda,r}(\alpha)} |u(z)| \, dx \, dy \le A(u) \alpha r^{\rho+2} \quad \forall \alpha < \alpha_0,$$

где $Y_{\lambda,r}(\alpha) = \{z\colon 0 < \sin(\arg z) < \alpha, \ \lambda < |z| < r\}$. Пусть $Y_{\lambda,r} = Y_{\lambda,r}^{(0,\pi)} = \{z \in \mathbb{C}_+\colon \lambda < |z| < r\}$. Тогда

$$\int_{Y_{\lambda,r}} \left| u(z) - \ln|f(z)| \right| dx \, dy =$$

$$= \int_{Y_{\lambda,r}} \left| v(z) - \ln|f(z)| \right| dx \, dy +$$

$$+ \int_{Y_{\lambda,r} \cap \{\operatorname{Im} z < h\}} \left(|u(z)| + |v(z)| \right) dx \, dy \le J_1 + J_2.$$

В силу (11) $J_1 \le A \ln^2 r \, r^2$. Далее, для произвольно малого $\alpha > 0$

$$J_2 \le \int_{Y_{\lambda,\pi/\alpha}^{(\alpha,\pi-\alpha)} \cap \{\operatorname{Im} z < h\}} \left(|u(z)| + |v(z)| \right) dx \, dy +$$

$$+ \int_{Y_{\lambda,r}(\alpha)} \left(|u(z)| + |v(z)| \right) dx \, dy \le C(\alpha) + (A(u) + A(v)) \alpha r^{\rho+2}.$$

Значит, $\lim\limits_{r \to \infty} r^{-\rho-2} \int_{Y_{\lambda,r}} \left| u(z) - \ln|f(z)| \right| dx \, dy = 0$, и, как следствие,

$$\lim_{r \to \infty} r^{-\rho-2} \int_{Y_{0,r}} \left| u(z) - \ln|f(z)| \right| dx \, dy = 0. \tag{12}$$

Полагая для любой функции $w \in SH(\mathbb{C}_+, \rho]$

$$w^{[t]}(z) = t^{-\rho} w(tz), \quad t > 0,$$

можем переписать (12) в виде

$$\lim_{r \to \infty} \int\limits_{Y_{0,r}} \left| u^{[t]} - (\ln|f|)^{[t]} \right| dx\,dy = 0.$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 4. *Для любой функции* $u \in SH(\mathbb{C}_+, \rho]$, $\rho > 0$, *и любого* $h > 0$ *найдется целая функция* $f(z)$ *со следующими свойствами*:

а) $\displaystyle\int\limits_{h/r}^{\pi - h/r} \left| u(re^{i\theta}) - \ln|f(re^{i\theta})| \right| d\theta \le A \ln^2 r, \quad r > r_1;$

б) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\pi} \left| u(re^{i\theta}) - \ln|f(re^{i\theta})| \right| \sin\theta\, d\theta \le B\,(r^{\rho - 1} + \ln^2 r), \quad r > r_1;$

в) $\displaystyle\lim_{t \to \infty} \int\limits_{\{z \in \mathbb{C}_+ : |z| < r\}} \left| u^{[t]}(z) - (\ln|f|)^{[t]}(z) \right| dx\,dy = 0 \quad \forall\, r > 0.$

Непосредственным следствием соотношения б) является то, что $u^{[t]} - (\ln|f|)^{[t]} \underset{t \to \infty}{\to} 0$ в $D'(\mathbb{C}_+)$ и, следовательно, предельные множества функций $u(z)$ и $\ln|f(z)|$ (а значит, и их индикаторы) в $\mathbb{C}_+$ совпадают (определение предельных множеств субгармонических в полуплоскости функций см. в [11]).

Заметим, что соотношение б) можно было бы усилить, если бы удалось продолжить функцию $u(z)$ с сохранением порядка в $\mathbb{C}_+$ и конечности порядка в $\mathbb{C}$ не из полуплоскости $\mathbb{C}_+ + ih$, а из более широкой области $\Big($ например, $\big\{ x + iy:\ y > \min\{h, |x|^{-\alpha}\} \big\}$, $\alpha > 0 \Big)$.

Заметим еще, что теорема 1 допускает распространение на функции, субгармонические в произвольной односвязной области в $\mathbb{R}^n$, $n \ge 2$, теоремы 2 и 3 — на субгармонические функции конечного порядка в конусе пространства $\mathbb{R}^n$.

На функции плюрисубгармонические, как уже было отмечено в начале статьи, теорема 1 не распространяется. Более того, справедливо следующее утверждение.

Теорема 5. *Пусть* G *— выпуклая область в* $\mathbb{C}^n$. *Тогда существует функция* $\omega \in PSH(\mathbb{C})$, *которая ни из какого открытого множества* $\omega \subset G$ *не может быть продолжена как плюрисубгармоническая функция ни на какую область* G_0, *содержащую область* G *и не совпадающую с ней.*

Доказательство. Обозначим через $\nu_u(z)$ число Лелона функции u в точке z (определение и свойства чисел Лелона см., например, в [12]). Обозначим, далее, $E(\varepsilon, G, u) = \{z \in G:\ \nu_u(z) \ge \varepsilon\}$ и $E(G, u) = \bigcup_{\varepsilon > 0} E(\varepsilon, G, u)$. Как было показано Сью [13] (см. также [12, 14]), множество $E(\varepsilon, G, u)$ при любом $\varepsilon > 0$ является аналитическим множеством в G.

Мы будем использовать также следующее определение.

Определение. *Будем говорить, что функция $u \in PSH(G)$ имеет свойство $I = I(G)$, если:*

а) *для любой области G_0, содержащей G и не равной G, найдется такое $\varepsilon > 0$, что множество $E(\varepsilon, G, u)$ имеет неприводимую компоненту, не продолжаемую до аналитического множества в G_0;*

б) *объединение всех таких (т. е. непродолжаемых в G_0) неприводимых компонент плотно в G для любой области G_0.*

Мотивы, руководствуясь которыми мы ввели данное определение, видны и следующего предложения.

Предложение 1. *Если функция $u \in PSH(G)$, $G \subset \mathbb{C}^n$, имеет свойство $I(G)$, то не существуют область $G_0 \neq G$, $G_0 \supset G$, и открытое множество $\omega \subset G$ такие, что сужение функции u на ω продолжается как плюрисубгармоническая функция на G_0.*

Доказательство. Предположим противное, т. е. что существуют область $G_0 \neq G$, $G_0 \supset G$, открытое множество $\omega \subset G$ и функция $F \in PSH(G_0)$ такие, что $F(z) = u(z)$ $\forall\, z \in \omega$. Тогда

$$E(\varepsilon, G, u) \cap \omega = E(\varepsilon, G, F) \cap \omega \subset E(\varepsilon, G_0, F) \quad \forall\, \varepsilon > 0. \tag{13}$$

Согласно определению свойства I при некотором $\varepsilon > 0$ существует неприводимое аналитическое в G множество $\Lambda \subset E(\varepsilon, G, u)$, не продолжаемое как аналитическое множество на G_0 и в то же время такое, что $\Lambda \cap \omega \neq \varnothing$. Тогда ввиду (13) существует точка $z^0 \in \Lambda \cap \omega$ такая, что в некоторой ее окрестности множество Λ совпадает с какой-то из неприводимых компонент множества $E(\varepsilon, G, F)$ и, значит, продолжается до аналитического множества в G_0, что невозможно. Предложение 1 доказано.

Теперь, чтобы убедиться в справедливости теоремы 5, достаточно показать существование в области G плюрисубгармонической функции, имеющей свойство I.

Предложение 2. *Если область $G \subset \mathbb{C}^n$ — выпуклая, то существует функция $u \in PSH(G)$, имеющая свойство I.*

Доказательство. Возьмем какое-либо счетное плотное в G множество K и счетное плотное в ∂G множество K_1. Счетное множество пар (z, ζ), $z \in K$, $\zeta \in K_1$, занумеруем каким-либо произвольным образом. Тогда $K \times K_1 = \left\{\left(z^{(j)}, \zeta^{(j)}\right)\right\}_{j=1}^{\infty}$. Обозначим через l_j комплексную прямую, проходящую через точки $z^{(j)}$ и $\zeta^{(j)}$. Положим $\omega_j = G \cap l_j$ и $\tilde{\omega}_j = \{z \in \mathbb{C}^n : \operatorname{dist}(z, \omega_j) < 1/j\}$, где $\operatorname{dist}(z, \omega_j) = \inf\{|z - z'| : z' \in (z, \omega_j)\}$. Покажем, что в G существует неприводимая голоморфная кривая[4] L_j, которая содержится в $\tilde{\omega}_j \cap G$ и не продолжается как голоморфная кривая на множество $\hat{\omega}_j = \left(\tilde{\omega}_j \cap G\right) \cup \left\{z : \left|z - \zeta^{(j)}\right| < \frac{n}{j}\right\}$. Для упрощения записи сделаем не нарушающее общности предположение, что $l_j = \{z \in \mathbb{C}^n : z_2 = z_3 = \ldots = z_n = 0\}$. Пусть h

[4] Голоморфной кривой в G называется аналитическое множество в G чистой размерности 1.

— конформное отображение выпуклой области $\tilde{\tilde{\omega}}_j = \tilde{\omega}_j \cap l_j$ на круг $D = \{z_1 : |z_1| < 1\}$, переводящее точку $z^{(j)}$ в точку 0. Пусть, далее, $\varphi(z_1)$ — произведение Бляшке, имеющее множество корней Z_φ, удовлетворяющее условию $\partial D \subset \overline{Z}_\varphi$. Известно (см., например, [15]), что такое произведение Бляшке характеризуется следующим свойством: для любой точки $z_1^0 \in \partial D$ предельное множество функции φ в точке z_1^0 (т. е. при $z_1 \to z_1^0$) совпадает с $\overline{D}$. Рассмотрим в поликруге $U_\varepsilon = \{z : |z_1| < 1, |z_2| < \varepsilon, \ldots, |z_n| < \varepsilon\}$ неприводимую голоморфную кривую $\gamma_\varepsilon = \Big\{ z : z_2 = \varepsilon\varphi(z_1), z_3 = \varepsilon\, \varphi\circ\varphi(z_1), \ldots, z_n = \varepsilon \underbrace{\varphi\circ\ldots\circ\varphi}_{n-1}(z_1) \Big\}$. Ввиду указанного выше свойства предельных множеств функции φ легко видеть, что замыкание кривой γ_ε содержит остов поликруга U_ε. Поэтому кривая γ_ε не продолжается как голоморфная кривая в объединение этого поликруга с окрестностью какой-либо точки его остова. Соответственно кривая L_j, полученная из кривой γ_ε отображением $z_1 \to h^{-1}(z_1)$, $z_2 \to z_2, \ldots, z_n \to z_n$, при достаточно малом $\varepsilon = \varepsilon_j < \dfrac{1}{j}$ голоморфна в $G \cap \tilde{\omega}_j$ и не продолжается как голоморфная кривая на область $\hat{\omega}_j$. Кроме того, как следует из ее построения, $\operatorname{dist}\left(z^{(j)}, L_j\right) < \dfrac{1}{j}$. Воспользуемся теперь тем, что в силу одной из теорем Скода о задании аналитического множества (см. [16], предложение 9.1) существуют функции $f_{k,j} \in H(G)$, $k = 1, \ldots, n+1$, такие, что

$$\tau_j = G \cap L_j = \{z \in G : f_{k,j}(z) = 0,\ \ k = 1, \ldots, n+1\}.$$

Обозначим $u_j = \dfrac{1}{2}\ln \sum_{1 \le k \le n+1} |f_{k,j}|^2$. Тогда $\tau_j = \{z \in G : u_j(z) = -\infty\}$ и поскольку в каждой точке z^0, в которой $\nu_{u_j}(z^0) > 0$, функция $u_j(z^0) = -\infty$, то справедливо равенство (см. [12], предложение 2.32) $\tau_j = E(1, G, u_j)$.

Вычитая в случае необходимости от функций u_j надлежащим образом выбранные константы c_j, что не меняет множеств $E(\varepsilon, G, u_j)$, можно считать, что на каждом компакте $K \subset G$, начиная с некоторого номера $j_0(K)$, все функции u_j отрицательны. Поэтому при любых положительных α_j ряд $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j u_j(z)$ сходится в G к некоторой плюрисубгармонической функции $u(z)$, возможно тождественно равной $-\infty$. Но если выбрать точку $z^0 \in G \setminus \bigcup L_j$, что, очевидно, возможно, и положить затем $\alpha_j = j^{-2}|u_j(z^0)|^{-1}$, то будет выполнено неравенство $u(z^0) > -\infty$ и, значит, $u \not\equiv -\infty$.

Покажем, что функция $u(z)$ — искомая. Для этого заметим, что

$$E(G, u) \supset \bigcup_{j=1}^{\infty} E(G, u_j) = \bigcup_{j=1}^{\infty} \tau_j,$$

и, значит, каждая кривая τ_j содержится при достаточно малом ε во множестве $E(\varepsilon, G, u)$. При этом согласно построению кривых L_j для каждой точки

$z^{(0)} \in K$, каждой точки $\zeta^{(0)} \in K_1$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $j^{(0)}$, что кривая $\tau_{j^{(0)}}$ пересекает ε-окрестность точки $z^{(0)}$ и не продолжается как голоморфная кривая на ε-окрестность точки $\zeta^{(0)}$. Поскольку множества K и K_1 плотны соответственно в G и ∂G, то из изложенного следует, что функция u имеет свойство I. Предложение 2 доказано.

Для завершения доказательства теоремы 5 достаточно заметить, что ее утверждение есть очевидное следствие предложений 1 и 2.

1. *Азарин В. С.* О лучах вполне регулярного роста целой функции // Мат. сб. – 1969. – **79**, № 4. – С. 463 – 476.
2. *Юлмухаметов Р. С.* Аппроксимация субгармонических функций // Anal. math. – 1985. – **11**, № 3. – P. 257 – 287.
3. *Sigurdsson R.* Growth properties of analytic and plurisubharmonic functions of finite order // Math. scand. – 1986. – **59**, № 2. – P. 235 – 304.
4. *Юлмухаметов Р. С.* Асимптотика плюрисубгармонических функций. – Уфа, 1986. – (Препринт / АН СССР. Башкир. филиал). – 22 с.
5. *Говоров Н. В.* Краевая задача Римана с бесконечным индексом. – М.: Наука, 1986. – 240 с.
6. *Ronkin L.* Functions of completely regular growth. – Kluwer Acad. Publ., 1992. – 394 p.
7. *Гришин А. Ф.* О регулярности роста субгармонических функций. III // Теория функций, функцион. анализ и их прил. – 1986. – Вып. 7. – С. 59 – 84.
8. *Ронкин Л. И.* Регулярность роста и D'-асимптотика голоморфных функций в $\mathbb{C}_+$ // Изв. вузов. Математика. – 1990. – № 2. – С. 16 – 28.
9. *Рашковский А. Ю.* Рост и убывание субгармонических функций в конусе // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 9. – С. 1252 – 1258.
10. *Рашковский А. Ю., Ронкин Л. И.* Субгармонические функции конечного порядка в конусе // Докл. АН СССР. – 1987. – **287**, № 2. – С. 298 – 302.
11. *Рашковский А. Ю., Ронкин Л. И.* Предельные множества субгармонических функций и ассоциированнных с ними мер в конусе // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 2. – С. 247 – 261.
12. *Лелон П., Груман Л.* Целые функции многих комплексных переменных. – М.: Мир, 1989. – 348 с.
13. *Siu Y. T.* Analycity of sets associated to Lelong numbers and the extension of closed positive currents // Invent. math. – 1974. – **27**. – P. 53 – 156.
14. *Kiselman C. O.* Densité des fonctions plurisousharmoniques // Bull. Soc. math. France. – 1979. – **107**. – P. 295 – 304.
15. *Гарнетт Дж.* Ограниченные аналитические функции. – М.: Мир, 1984. – 469 с.
16. *Skoda H.* Sous-ensembles analytiques d'ordre fini ou infini dans $\mathbb{C}^n$ // Bull. Soc. math. France. – 1972. – **100**. – P. 353 – 408.

Получено 21.07.92