УДК 517.927.4

Н. И. Ронто, д-р физ.-мат. наук (Ин-т математики НАН Украины, Киев),
И. И. Король, асп.(Ужгород. ун-т)

ИССЛЕДОВАНИЕ И РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРАМИ ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

A modification of a numerical-analytical iteration method to study and construct approximate solution of nonlinear two-point boundary value problems for ordinary differential equations containing unknown parameters in the given equation and the boundary conditions is suggested.

Запропоновано модифікацію чисельно-аналітичного методу послідовних наближень для дослідження існування і побудови наближених розв'язків нелінійних двоточкових крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь, які містять невідомі параметри як у заданому рівнянні, так і в граничних умовах.

Введение. Изучение краевых задач, содержащих неизвестные параметры либо в дифференциальном уравнении, либо в краевых условиях, связано с определенными трудностями и имеет ряд специфических особенностей [1 – 3]. В случае, когда параметры одновременно входят и в уравнение, и в краевые условия, задача еще усложняется.

В данной работе рассматривается один из возможных подходов обобщения численно-аналитического метода последовательных приближений [4 – 6] для исследования существования и приближенного построения решений нелинейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) + \lambda_1 g(t,x), \quad x, f, g \in R^n, \quad n \geq 3, \quad t \in [0,T], \tag{1}$$

подчиненных нелокальным двухточечным краевым условиям

$$Ax(0) + \lambda_2 Cx(T) = d, \tag{2}$$

при условии, что первые две координаты вектора $x = (x_1, \ldots, x_n)$ при $t = 0$ принимают значения

$$x_1(0) = x_{01}, \; x_2(0) = x_{02}. \tag{3}$$

Здесь x, f, g, d — точки n-мерного евклидова пространства R^n, A, C — постоянные матрицы размерности $n \times n$, причем $\det C \neq 0$, λ_1, λ_2 — скалярные параметры.

Ставится задача отыскания таких значений параметров $\lambda_1 = \lambda_1^*$, $\lambda_2 = \lambda_2^*$, при которых существует непрерывно-дифференцируемое решение $x = x^*(t)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2), (3), т. е. отыскиваются такие пары $(\lambda^*, x^*(t))$, $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*)$, при которых выполнены уравнения (1) – (3).

1. Выбор вида и установление сходимости последовательных приближений. Предположим, что параметры изменяются в областях

$$\lambda_1 \in I_1 = [\Lambda_1', \Lambda_1''], \; \lambda_2 \in I_2 = [\Lambda_2', \Lambda_2''], \quad \Lambda_2' > 0, \tag{4}$$

а вектор-функции $f(t,x)$, $g(t,x)$, входящие в правую часть уравнения (1), определены в области

$$(t,x) \in [0,T] \times D, \tag{5}$$

где D — замкнутая, ограниченная область пространства R^n, и удовлетворяют в ней условиям ограниченности

$$|f(t,x)| \leq M_1, \; |g(t,x)| \leq M_2 \tag{6}$$

и условиям типа Липшица

$$|f(t,x') - f(t,x'')| \le K_1 |x' - x''|, \tag{7}$$

$$|\lambda_1' g(t,x') - \lambda_1'' g(t,x'')| \le \tilde{\lambda}_1 K_2 |x' - x''| + |\lambda_1' - \lambda_1''| M_2 \tag{8}$$

для всех $t \in [0, T]$, $x, x', x'' \in D$, $\lambda_1', \lambda_1'' \in I_1$, $\tilde{\lambda}_1 = \max(|\lambda_1'|, |\lambda_1''|)$. Здесь

$$|f(t,x)| = (|f_1(t,x)|, \ldots, |f_n(t,x)|),$$

$$|g(t,x)| = (|g_1(t,x)|, \ldots, |g_n(t,x)|),$$

$$M_i = (M_{i1}, M_{i2}, \ldots, M_{in}),\ M_{ij} \ge 0,\ i = 1, 2,\ j = 1, 2, \ldots, n,$$

K_1, K_2 — постоянные $(n \times n)$-мерные матрицы с неотрицательными элементами, а неравенства (6)–(8) понимаются покомпонентно.

Среди краевых задач вида (1) – (3) будем рассматривать лишь такие, для которых величины $T, M_1, M_2, A, C, K_1, K_2, d, \lambda_1, \lambda_2$, а также области определения (4), (5) удовлетворяют следующим двум дополнительным условиям:

1) множество D_β точек $x_0 = (x_{01}, \ldots, x_{0n}) \in R^n$, содержащееся в области D, для любых значений $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in I_1 \times I_2$ вместе со своей β-окрестностью, непусто:

$$D_\beta \ne \varnothing, \tag{9}$$

где

$$\beta = \beta(x_0, \lambda_1, \lambda_2) = (T/2)(M_1 + |\lambda_1| M_2) + \beta_1(x_0, \lambda_2),$$

$$\beta_1(x_0, \lambda_2) = |\lambda_2^{-1}[C^{-1}d - (C^{-1}A + \lambda_2 E)x_0]|;$$

2) наибольшее собственное значение $s(Q)$ матрицы $Q = (T/\pi)(K_1 + |\lambda_1| K_2)$ при любых $\lambda_1 \in I_1$ меньше единицы, т. е.

$$s(Q) < 1. \tag{10}$$

Обозначим через G множество таких $(n-2)$-мерных векторов $y_0 = (x_{03}, \ldots, x_{0n}) \in R^{n-2}$, что порождаемые ими и значениями (3) векторы $x_0 = (x_{01}, x_{02}, y_0)$ принадлежат области D_β.

При таких предположениях построим последовательность функций $x_m(t, y_0, \lambda)$, зависящих от $t, y_0, \lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$, удовлетворяющих краевым условиям (2), (3) при произвольных $\lambda_1 \in I_1, \lambda_2 \in I_2, y_0 \in G$ и равномерно сходящихся к точному решению задачи (1) – (3) при определенных значениях $\lambda = \lambda^*, y_0 = y_0^*$. Для этого рассмотрим последовательность функций вида

$$x_m(t, y_0, \lambda) = x_0 + \int_0^t [f(t, x_{m-1}(t, y_0, \lambda)) + \lambda_1 g(t, x_{m-1}(t, y_0, \lambda)) -$$

$$- \frac{1}{T}\int_0^T \{f(s, x_{m-1}(s, y_0, \lambda)) + \lambda_1 g(s, x_{m-1}(s, y_0, \lambda))\} ds] dt + \alpha t,$$

$$m = 1, 2, \ldots; \quad x_0(t, y_0, \lambda) = x_0 = (x_{01}, x_{02}, y_0), \quad y \in G, \tag{11}$$

считая $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), y_0, \lambda_1, \lambda_2$ параметрами. Подберем векторный параметр α таким образом, чтобы все функции последовательности (11) удовлетворяли краевым условиям (2), (3) при произвольных $y_0 \in G$, $\lambda_1 \in I_1$.

Подставляя (11) в (2), получаем систему алгебраических уравнений для определения α, откуда находим

$$\alpha = \frac{1}{\lambda_2 T}\left[C^{-1}d - (C^{-1}A + \lambda_2 E)x_0\right].$$

Таким образом, все функции последовательности

$$x_m(t, y_0, \lambda) = x_0 + \int_0^t \Big[f(t, x_{m-1}(t, y_0, \lambda)) + \lambda_1 g(t, x_{m-1}(t, y_0, \lambda)) -$$

$$- \frac{1}{T}\int_0^T \{f(s, x_{m-1}(s, y_0, \lambda)) + \lambda_1 g(s, x_{m-1}(s, y_0, \lambda))\}ds\Big]dt +$$

$$+ \frac{t}{\lambda_2 T}\left[C^{-1}d - (C^{-1}A + \lambda_2 E)x_0\right], \; m = 1, 2, \ldots; \; x_0(t, y_0, \lambda) = x_0 \in D_\beta, \quad (12)$$

удовлетворяют краевым условиям (2), (3) при произвольных $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in I = I_1 \times I_2$, $y_0 \in G$.

Справедливо следующее утверждение о сходимости последовательности функций (12).

Теорема 1. *Предположим, что краевая задача с параметрами* (1) – (3) *в области определения* (4), (5) *такова, что удовлетворяет условиям* (6) – (10).

Тогда последовательность функций $x_m(t, y_0, \lambda)$ *вида* (12) *удовлетворяет краевым условиям* (2), (3) *для всех* $m = 1, 2, \ldots$ *при произвольных* $y_0 \in G$, $\lambda_1 \in I_1, \lambda_2 \in I_2$ *и равномерно сходится при* $m \to \infty$ *относительно области*

$$(t, y_0, \lambda) \in [0, T] \times G \times I, \quad I = I_1 \times I_2 \quad (13)$$

к предельной функции $x^*(t, y_0, \lambda)$.

При этом для всех $\lambda_1 \in I_1, \lambda_2 \in I_2$ *функция* $x^*(t, y_0, \lambda)$ *является решением уравнения*

$$x(t) = x_0 + \int_0^t \Big[f(t, x(t)) + \lambda_1 g(t, x(t)) - \frac{1}{T}\int_0^T \{f(s, x(s)) +$$

$$+ \lambda_1 g(s, x(s))\}ds\Big]dt + \frac{t}{\lambda_2 T}\left[C^{-1}d - (C^{-1}A + \lambda_2 E)x_0\right], \quad (14)$$

принимающим при $t = 0$ *начальное значение* $x^*(0, y_0, \lambda) = x_0 = (x_{01}, x_{02}, y_0)$. *Кроме того, функция* $x^*(t, y_0, \lambda)$ *удовлетворяет краевым условиям* (2), (3), *т. е. является решением возмущенной по отношению к* (1) – (3) *краевой задачи вида*

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) + \lambda_1 g(t, x) + \Delta(y_0, \lambda),$$
$$Ax(0) + \lambda_2 Cx(T) = d, \quad (15)$$
$$x_1(0) = x_{01}, \; x_2(0) = x_{02},$$

где

$$\Delta(y_0, \lambda) = \frac{1}{\lambda_2 T}\left[C^{-1}d - (C^{-1}A + \lambda_2 E)x_0\right] -$$

$$- \frac{1}{T}\int_0^T \left[f(t, x(t)) + \lambda_1 g(t, x(t))\right]dt.$$

При этом для отклонения предельной функции $x^*(t, y_0, \lambda)$ *от* m*-го прибли-*

жения $x_m(t, y_0, \lambda)$ *в области* (13) *выполняется покоординатная оценка*

$$|x^*(t, y_0, \lambda) - x_m(t, y_0, \lambda)| \le \tilde{\alpha}_1(t) \cdot W(y_0, \lambda), \quad m = 1, 2, \ldots, \tag{16}$$

где

$$W(y_0, \lambda) = Q^m (E - Q)^{-1} M(\lambda_1) + (K_1 + |\lambda_1| K_2) Q^{m-1} (E - Q)^{-1} \beta_1(x_0, \lambda_2),$$
$$M(\lambda_1) = M_1 + |\lambda_1| M_2, \tag{17}$$
$$\tilde{\alpha}_1(t) = (\pi/3)\alpha_1(t), \ \alpha_1(t) = 2t(1 - t/T).$$

Доказательство. В области (13) все функции последовательности (12) удовлетворяют краевым условиям (2), (3) по построению.

Далее покажем, что если $(y_0, \lambda) \in G \times I$, то все последовательные приближения $x_m(t, y_0, \lambda) \in D$. Действительно, с учетом леммы 3.1 [5, с. 13] из (12) при $m = 1$ получаем

$$|x_1(t, y_0, \lambda) - x_0| \le \Big| \int_0^t \Big[f(t, x_0) + \lambda_1 g(t, x_0) - \frac{1}{T} \int_0^T \{ f(s, x_0) +$$
$$+ \lambda_1 g(s, x_0) \} ds \Big] dt \Big| + \Big| \frac{1}{\lambda_2 T} [C^{-1} d - (C^{-1} A + \lambda_2 E) x_0] \Big| \le$$
$$\le \alpha_1(t) M(\lambda_1) + \beta_1(x_0, \lambda_2). \tag{18}$$

Так как $\alpha_1(t) \le T/2$, то $x_1(t, y_0, \lambda) \in D$ как только $(y_0, \lambda) \in G \times I$.

Аналогично нетрудно установить, что для всех $t \in [0, T]$, $m = 1, 2, \ldots$ и любых $x_0 \in D_\beta, \lambda \in I$ последовательные приближения $x_m(t, y_0, \lambda)$ содержатся в области D.

Для доказательства равномерной сходимости последовательности $\{ x_m(t, y_0, \lambda) \}$ покажем, что в пространстве непрерывных вектор-функций она является фундаментальной. Для этого оценим разность $|x_{m+j}(t, y_0, \lambda) - x_m(t, y_0, \lambda)|$ при любом $j \ge 1$. Из (12) с учетом леммы 3.1 из [5, с. 13] имеем

$$x_{m+1}(t, y_0, \lambda) - x_m(t, y_0, \lambda) = \int_0^t \Big[f(t, x_m(t, y_0, \lambda)) - f(t, x_{m-1}(t, y_0, \lambda)) -$$
$$- \frac{1}{T} \int_0^T \{ f(s, x_m(s, y_0, \lambda)) - f(s, x_{m-1}(s, y_0, \lambda)) \} ds \Big] dt +$$
$$+ \lambda_1 \int_0^t \Big[g(t, x_m(t, y_0, \lambda)) - g(t, x_{m-1}(t, y_0, \lambda)) -$$
$$- \frac{1}{T} \int_0^T \{ g(s, x_m(s, y_0, \lambda)) - g(s, x_{m-1}(s, y_0, \lambda)) \} ds \Big] dt =$$
$$= (1 - t/T) \int_0^t [f(s, x_m(s, y_0, \lambda)) - f(s, x_{m-1}(s, y_0, \lambda))] ds +$$
$$+ \frac{t}{T} \int_t^T [f(s, x_m(s, y_0, \lambda)) - f(s, x_{m-1}(s, y_0, \lambda))] ds +$$
$$+ \lambda_1 (1 - t/T) \int_0^t [g(s, x_m(s, y_0, \lambda)) - g(s, x_{m-1}(s, y_0, \lambda))] ds +$$

$$+ \lambda_1 \frac{t}{T} \int_t^T [g(s, x_m(s, y_0, \lambda)) - g(s, x_{m-1}(s, y_0, \lambda))] ds.$$

Обозначая

$$r_{m+1}(t, y_0, \lambda) = |x_{m+1}(t, y_0, \lambda) - x_m(t, y_0, \lambda)|,$$

в силу неравенств (7), (8) получаем

$$r_{m+1}(t, y_0, \lambda) = (K_1 + |\lambda_1| K_2)[(1 - t/T) \int_0^t r_m(s, y_0, \lambda) ds + \frac{t}{T} \int_t^T r_m(s, y_0, \lambda) ds]. \tag{19}$$

На основании (18)

$$r_1(t, y_0, \lambda) \le \alpha_1(t) M(\lambda_1) + \beta_1(x_0, \lambda_2). \tag{20}$$

Из леммы 2.2 [6, с. 31] известно, что для последовательности функций вида

$$\alpha_{m+1}(t) = (1 - t/T) \int_0^t \alpha_m(s) ds + \frac{t}{T} \int_t^T \alpha_m(s) ds, \ m = 1, 2, \ldots,$$

$$\alpha_0(t) = 1, \ \alpha_1(t) = 2t(1 - t/T) \tag{21}$$

справедлива оценка

$$\alpha_{m+1}(t) \le \left(\frac{T}{\pi}\right)^m \tilde{\alpha}_1(t), \ \tilde{\alpha}_1(t) = (\pi/3) \alpha_1(t). \tag{22}$$

Поэтому из (19) – (21) при $m = 1$ получаем

$$\begin{aligned} r_2(t, y_0, \lambda) &\le (K_1 + |\lambda_1| K_2)[(1 - t/T) \int_0^t \{\alpha_1(t) M(\lambda_1) + \beta_1(x_0, \lambda_2)\} dt + \\ &+ \frac{t}{T} \int_t^T \{\alpha_1(t) M(\lambda_1) + \beta_1(x_0, \lambda_2)\} dt] \le \\ &\le (K_1 + |\lambda_1| K_2)[\alpha_2(t) M(\lambda_1) + \alpha_1(t) \beta_1(x_0, \lambda_2)] \le \\ &\le \tilde{\alpha}_1(t)[Q M(\lambda_1) + (K_1 + |\lambda_1| K_2) \beta_1(x_0, \lambda_2)]. \end{aligned} \tag{23}$$

По методу математической индукции из (19) с учетом (21) – (23) имеем

$$\begin{aligned} r_{m+1}(t, y_0, \lambda) &\le (K_1 + |\lambda_1| K_2)^m [\alpha_{m+1}(t) M(\lambda_1) + \alpha_m(t) \beta_1(x_0, \lambda_2)] \le \\ &\le \tilde{\alpha}_1(t)[Q^m M(\lambda_1) + (K_1 + |\lambda_1| K_2) Q^{m-1} \beta_1(x_0, \lambda_2)]. \end{aligned} \tag{24}$$

Принимая во внимание, что

$$x_{m+j}(t, y_0, \lambda) - x_m(t, y_0, \lambda) = \sum_{k=0}^{j-1} (x_{m+j-k}(t, y_0, \lambda) - x_{m+j-k-1}(t, y_0, \lambda)),$$

с использованием неравенства (24) получаем

$$|x_{m+j}(t, y_0, \lambda) - x_m(t, y_0, \lambda)| \le \sum_{i=1}^{j} r_{m+i}(t, y_0, \lambda) \le$$

$$\leq \alpha_1(t)\sum_{i=0}^{j-1} [Q^{m+i}M(\lambda_1) + (K_1 + |\lambda_1|K_2) Q^{m+i-1}\beta_1(x_0, \lambda_2)],$$

или

$$|x_{m+j}(t, y_0, \lambda) - x_m(t, y_0, \lambda)| \leq \tilde{\alpha}_1(t)[Q^m \sum_{i=0}^{j-1} Q^i M(\lambda_1) +$$

$$+ (K_1 + |\lambda_1|K_2) Q^{m-1} \sum_{i=0}^{m-1} Q^i \beta_1(x_0, \lambda_2)]. \tag{25}$$

Однако в силу (10)

$$\sum_{i=0}^{j-1} Q^i \leq (E-Q)^{-1}, \quad \lim_{m\to\infty} Q^m = 0,$$

поэтому из (25) можем заключить, что при $m \to \infty$ последовательность функций $x_m(t, y_0, \lambda)$ вида (12) на основании критерия Коши равномерно сходится в области (13):

$$\lim_{m\to\infty} x_m(t, y_0, \lambda) = x^*(t, y_0, \lambda). \tag{26}$$

Более того, предельная функция $x^*(t, y_0, \lambda)$ также удовлетворяет краевым условиям (2), (3), поскольку все члены последовательности (12) удовлетворяют им при произвольных $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in I = I_1 \times I_2$, $y_0 \in G$. Если в (25) $j \to \infty$, то в силу (26) в области (13) для всех $m = 1, 2, \ldots$ действительно выполняется оценка (16), (17).

Далее, если в (12) $m \to \infty$, то снова на основании (26) предельная функция $x^*(t, y_0, \lambda)$ является решением интегрального уравнения (14). Очевидно, что $x^*(0, y_0, \lambda) = x_0 = (x_{01}, x_{02}, y_0)$ и из (14) следует, что предельная функция $x^*(t, y_0, \lambda)$ является решением возмущенной краевой задачи (15) при любом $y_0 \in G$, $\lambda \in I$. Теорема доказана.

2. Некоторые свойства предельной функции. Покажем, что в правую часть заданной системы дифференциальных уравнений (1) всегда можно ввести дополнительный параметр и добиться того, что решение определенной задачи Коши для полученной системы будет в то же время удовлетворять и заданным краевым условиям (2).

Теорема 2. *При выполнении условий теоремы* 1 *для любой точки* (y_0, λ), $y_0 \in G$, $\lambda \in I$, *найдется такое единственное значение дополнительного управляющего параметра* $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$, *равное*

$$\mu = \mu(y_0, \lambda) = \frac{1}{\lambda_2 T}[C^{-1}d - (C^{-1}d + \lambda_2 E)x_0] -$$

$$- \frac{1}{T}\int_0^T [f(t, x^*(t, y_0, \lambda)) + \lambda_1 g(t, x^*(t, y_0, \lambda))]\,dt, \tag{27}$$

где $x^*(t, y_0, \lambda)$ — *предельная функция последовательности* (12), *что решение* $x = x(t)$ *задачи Коши*

$$\dot{x} = f(t, x) + \lambda_1 g(t, x) + \mu(y_0, \lambda),$$
$$x(0) = x_0 = (x_{01}, x_{02}, y_0) \tag{28}$$

будет и решением возмущенной краевой задачи

$$\dot{x} = f(t, x) + \lambda_1 g(t, x) + \mu(y_0, \lambda),$$

$$Ax(0) + \lambda_2 Cx(T) = d,$$
$$x_1(0) = x_{01},\ x_2(0) = x_{02}, \tag{29}$$

и при этом $x(t) = x^*(t, y_0, \lambda)$.

Доказательство. В теореме 1 доказано, что функция $x(t) = x^*(t, y_0, \lambda)$ является решением задачи Коши

$$\dot{x} = f(t,x) + \lambda_1 g(t,x) + \frac{1}{\lambda_2 T}[C^{-1}d - (C^{-1}A + \lambda_2 E)x_0] -$$
$$- \frac{1}{T}\int_0^T [f(t, x^*(t, y_0, \lambda)) + \lambda_1 g(t, x^*(t, y_0, \lambda))]\,dt,$$
$$x(0) = x_0 = (x_{01}, x_{02}, y_0),$$

причем удовлетворяющим краевым условиям (2), (3).

Итак, значение параметра $\mu = \mu(y_0, \lambda)$, равное (27), при котором $x(t) = x^*(t, y_0, \lambda)$ есть решение краевой задачи (29), найдено. Остается доказать, что такое значение параметра единственно, т. е. при всяком другом, отличном от значения μ вида (27), решение задачи Коши не будет удовлетворять краевым условиям.

Предположим противное. Пусть существуют два значения $\mu' = \mu'(y_0, \lambda)$, $\mu'' = \mu''(y_0, \lambda)$, $\mu' \neq \mu''$ такие, что решения $x(t, y_0, \lambda, \mu')$ и $x(t, y_0, \lambda, \mu'')$ задачи Коши (29) при $\mu = \mu'$, $\mu = \mu''$ удовлетворяют и краевым условиям (2), (3). Тогда для разности этих решений из (14) получаем тождество

$$x(t, y_0, \lambda, \mu') - x(t, y_0, \lambda, \mu'') = \int_0^t [f(t, x(t, y_0, \lambda, \mu')) - f(t, x(t, y_0, \lambda, \mu'')) -$$
$$- \frac{1}{T}\int_0^T \{f(s, x(s, y_0, \lambda, \mu')) - f(s, x(s, y_0, \lambda, \mu''))\}\,ds]\,dt +$$
$$+ \lambda_1 \int_0^t [g(t, x(t, y_0, \lambda, \mu')) - g(t, x(t, y_0, \lambda, \mu'')) -$$
$$- \frac{1}{T}\int_0^T \{g(s, x(s, y_0, \lambda, \mu')) - g(s, x(s, y_0, \lambda, \mu''))\}\,ds]\,dt.$$

Полагая $r(t) = |x(t, y_0, \lambda, \mu') - x(t, y_0, \lambda, \mu'')|$, из последнего соотношения с учетом условий (7), (8), как и при получении (19), имеем

$$r(t) \le (K_1 + |\lambda_1| K_2)\Big[(1 - t/T)\int_0^t r(s)\,ds + \frac{t}{T}\int_t^T r(s)\,ds\Big],$$

откуда для всех $m = 0, 1, 2, \ldots$ находим

$$r(t) \le \alpha_{m+1}(t)(K_1 + |\lambda_1| K_2)^{m+1} |r(t)|_0, \tag{30}$$

где $|r(t)|_0 = (\sup_t |r_1(t)|, \ldots, \sup_t |r_n(t)|)$, $\alpha_{m+1}(t)$ — положительные функции, определяемые согласно (21).

Принимая во внимание (21), (22), из (30) имеем

$$|r(t)|_0 \le \tilde{\alpha}_1(t) Q^m (K_1 + |\lambda_1| K_2) |r(t)|_0 \le \frac{\pi T}{6} Q^m (K_1 + |\lambda_1| K_2) |r(t)|_0.$$

Так как все собственные числа матрицы Q лежат в круге единичного радиуса, то последнее неравенство возможно лишь при $|r(t)|_0 = 0$, т. е. при $\mu' = \mu''$. Противоречие доказывает единственность управляющего параметра $\mu = \mu(y_0, \lambda)$.

Выясним, при каких необходимых и достаточных условиях предельная функция последовательности (12) будет решением рассматриваемой краевой задачи (1) – (3).

Теорема 3. *Пусть для краевой задачи* (1) – (3) *с параметрами выполнены условия теремы* 1.

Тогда решение $x = x^*(t)$ *задачи Коши*

$$\dot{x} = f(t,x) + \lambda_1 g(t,x), \tag{31}$$

$$x(0) = x_0 = (x_{01}, x_{02}, y_0)$$

является и решением краевой задачи с параметрами (1) – (3) *тогда и только тогда, когда точка* (y_0, λ) *является решением определяющего уравнения*

$$\Delta(y_0, \lambda) = \frac{1}{\lambda_2 T}[C^{-1}d - (C^{-1}A + \lambda_2 E)x_0] -$$

$$- \frac{1}{T}\int_0^T [f(t, x^*(t, y_0, \lambda)) + \lambda_1 g(t, x^*(t, y_0, \lambda))]\,dt = 0, \tag{32}$$

где $x^*(t, y_0, \lambda)$ — *предельная функция последовательности* (12). *Более того,* $x^*(t) = x^*(t, y_0, \lambda)$ *и для отклонения приближенного решения* $x_m(t, y_0, \lambda)$ *вида* (12) *от точного решения* $x^*(t) = x^*(t, y_0, \lambda)$ *краевой задачи* (1)–(3) *верна оценка* (16), (17).

Доказательство. *Достаточность* условия (32) следует из того, что согласно теореме 1 функция $x^*(t, y_0, \lambda)$ с начальным значением $x^*(0, y_0, \lambda) = x_0$ является решением краевой задачи (15). Но если $\Delta(y_0, \lambda) = 0$, то решение задачи (15) совпадает с решением исходной краевой задачи (1)–(3) и задачи Коши (31).

Необходимость того, чтобы точка (y_0, λ) удовлетворяла уравнению (32), следует из теоремы 2. Действительно, если $x^* = x^*(t)$, как решение задачи Коши, является и решением краевой задачи (1)–(3), то решение $x = x(t, y_0, \lambda, \mu)$ начальной задачи (28) с дополнительным управляющим параметром $\mu = \mu(y_0, \lambda)$ будет удовлетворять краевым условиям (2), (3) только при одном значении $\mu = \Delta(y_0, \lambda) = 0$. В этом случае $x(t, y_0, \lambda, 0) = x^*(t) = x^*(t, y_0, \lambda)$, откуда и вытекает неравенство (16).

3. Достаточные условия существования решения. Для исследования разрешимости краевой задачи (1), (2) наряду с точным определяющим уравнением (32) введем в рассмотрение приближенное определяющее уравнение

$$\Delta_m(y_0, \lambda) = \frac{1}{\lambda_2 T}[C^{-1}d - (C^{-1}A + \lambda_2 E)x_0] -$$

$$- \frac{1}{T}\int_0^T [f(t, x_m(t, y_0, \lambda)) + \lambda_1 g(t, x_m(t, y_0, \lambda))]\,dt = 0, \tag{33}$$

где $x_m(t, y_0, \lambda)$ вычисляется по формуле (12).

Теорема 4. *Пусть выполнены все условия теоремы* 1 *и, кроме того,*

1) *существует выпуклая замкнутая область*

$$A' = G' \times I' \subset G \times I, \ I = I_1' \times I_2',$$

такая, что для некоторого фиксированного $m \geq 1$ *приближенное определяющее уравнение* (33) *имеет в области* A' *единственное решение* $(y_0, \lambda_1, \lambda_2) = (y_{0m}, \lambda_{1m}, \lambda_{2m})$, *индекс которого отличен от нуля;*

2) *на границе* S' *области* A' *выполняется неравенство*

$$\inf_{(y_0, \lambda) \in S'} |\Delta_m(y_0, \lambda)| > (\pi/3)^2 Q W(y_0, \lambda), \tag{34}$$

в котором $W(y_0, \lambda)$ *определяется согласно* (17).

Тогда краевая задача с параметрами (1) – (3) *имеет решение* $(x^*(t), \lambda^*)$, *причем начальное значение этого решения*

$$x^*(0) = (x_{01}, x_{02}, y_0^*),$$

где вектор $y_0^* \in G'$, *а параметры* λ_1^*, λ_2^* *таковы, что* $\lambda_1^* \in I_1'$, $\lambda_2^* \in I_2'$.

Доказательство. Так как по условию 1 данной теоремы $(y_0, \lambda_1, \lambda_2) = (y_{0m}, \lambda_{1m}, \lambda_{2m})$ является в области A' единственной особой точкой с ненулевым индексом отображения $\Delta_m(y_0, \lambda): G \times I \to R^n$, порожденного (33), то согласно [7, с. 166] вращение векторного поля $\Delta_m(y_0, \lambda)$ на границе S' области A' отлично от нуля.

Если показать, что векторные поля $\Delta(y_0, \lambda)$ и $\Delta_m(y_0, \lambda)$ вида (32), (33) являются гомотопными, то на основании свойств вращения гомотопных полей вращение векторного поля $\Delta(y_0, \lambda)$ на S' также было бы отлично от нуля. А если так, то на основании свойств вращений по крайней мере в одной точке $(y_0, \lambda) = (y_0^*, \lambda^*)$ области $G' \times I'$ векторное поле $\Delta(y_0, \lambda)$ обращается в нуль. Это означает, что определяющее уравнение (33) имеет в A' по крайней мере одно решение $(y_0, \lambda) = (y_0^*, \lambda^*)$. Следовательно, согласно теореме 3 решение $x = x^*(t)$ уравнения (1) с начальным условием $x^*(0) = (x_{01}, x_{02}, y_0^*)$ является и решением краевой задачи (1), (2) при $\lambda = \lambda^*$.

Для завершения доказательства теоремы остается установить гомотопность векторных полей $\Delta(y_0, \lambda)$ и $\Delta_m(y_0, \lambda)$. Для этого рассмотрим непрерывное по всем переменным семейство всюду непрерывных на S' векторных полей

$$P(\theta, y_0, \lambda) = \Delta_m(y_0, \lambda) + \theta[\Delta(y_0, \lambda) - \Delta_m(y_0, \lambda)], \tag{35}$$

соединяющее поля $P(0, y_0, \lambda) = \Delta_m(y_0, \lambda)$ и $P(1, y_0, \lambda) = \Delta(y_0, \lambda)$. Покажем, что для $0 \leq \theta \leq 1$, $(y_0, \lambda) \in A'$ при выполнении условия (34) вектор-функция $P(\theta, y_0, \lambda) \neq 0$. Действительно, при $m \geq 1$ из (32), (33) с учетом (7), (8) и оценки (16) имеем

$$|\Delta(y_0, \lambda) - \Delta_m(y_0, \lambda)| \leq (1/T) \Big| \int_0^T [f(t, x^*(t, y_0, \lambda)) - f(t, x_m(t, y_0, \lambda))] dt +$$

$$+ (\lambda_1/T) \int_0^T [g(t, x^*(t, y_0, \lambda)) - g(t, x_m(t, y_0, \lambda))] dt \Big| \leq$$

$$\leq (1/T)(K_1 + |\lambda_1| K_2) W(y_0, \lambda) \int_0^T \tilde{\alpha}_1(t) dt =$$

$$= (\pi T/9)(K_1 + |\lambda_1| K_2) W(y_0, \lambda) = (\pi/3)^2 Q W(y_0, \lambda). \tag{36}$$

Следовательно, на S' в силу (34) – (36) всегда справедливо неравенство

$$|P(\theta, y_0, \lambda)| \geq |\Delta_m(y_0, \lambda)| - |\Delta(y_0, \lambda) - \Delta_m(y_0, \lambda)| > 0,$$

т. е. вектор-функция $P(\theta, y_0, \lambda)$ на S' при $0 \leq \theta \leq 1$ не принимает нулевого значения, что означает гомотопность векторных полей $\Delta(y_0, \lambda)$ и $\Delta_m(y_0, \lambda)$.

4. Необходимые условия существования решения краевых задач с параметром. Предварительно докажем лемму, оценивающую близость предельных функций $x^*(t, y_0', \lambda')$ и $x^*(t, y_0'', \lambda'')$ для точек $(y_0', \lambda'), (y_0'', \lambda'') \in G \times I$, а также теорему о непрерывной зависимости определяющей функции $\Delta(y_0, \lambda)$ вида (32) от переменных y_0, λ.

Лемма. *Пусть выполнены условия теоремы* 1.

Тогда для любых точек $(y_0', \lambda'), (y_0'', \lambda'') \in G \times I$ *для отклонения предельных функций последовательностей* $x_m(t, y_0', \lambda'), x_m(t, y_0'', \lambda'')$ *вида* (12) *справедливо неравенство*

$$|x^*(t, y_0', \lambda') - x^*(t, y_0'', \lambda'')| \leq [E + \tilde{\alpha}_1(t)(K_1 + |\tilde{\lambda}_1|K_2)(E - \tilde{Q})^{-1}] \times$$
$$\times [|x_0' - x_0''| + b_1(\lambda_2', \lambda_2'', y_0', y_0'')] + \tilde{\alpha}_1(t)(E - \tilde{Q})^{-1}|\lambda_1' - \lambda_1''|M_2, \quad (37)$$

где

$$b_1(\lambda_2', \lambda_2'', y_0', y_0'') = |(1/\lambda_2')[C^{-1}d - (C^{-1}A + \lambda_2' E)x_0'] -$$
$$- (1/\lambda_2'')[C^{-1}d - (C^{-1}A + \lambda_2'' E)x_0'']|,$$
$$\tilde{Q} = (T/\pi)(K_1 + \tilde{\lambda}_1 K_2), \quad \tilde{\lambda}_1 = \max(|\lambda_1'|, |\lambda_1''|). \quad (38)$$

Доказательство. Непосредственно из (12) имеем

$$|x_1(t, y_0', \lambda') - x_1(t, y_0'', \lambda'')| \leq |x_0' - x_0''| +$$
$$+ (1 - t/T)\int_0^t |f(t, x_0') - f(t, x_0'')|dt + (t/T)\int_t^T |f(t, x_0') - f(t, x_0'')|dt +$$
$$+ (1 - t/T)\int_0^t |\lambda_1' g(t, x_0') - \lambda_1'' g(t, x_0'')|dt + (t/T)\int_t^T |\lambda_1' g(t, x_0') -$$
$$- \lambda_1'' g(t, x_0'')|dt + |(1/\lambda_2')[C^{-1}d - (C^{-1}A + \lambda_2' E)x_0'] - (1/\lambda_2'')[C^{-1}d -$$
$$- (C^{-1}A + \lambda_2'' E)x_0'']| \leq [E + \alpha_1(t)(K_1 + \tilde{\lambda}_1 K_2)]|x_0' - x_0''| +$$
$$+ \alpha_1(t)|\lambda_1' - \lambda_1''|M_2 + b_1(\lambda_2', \lambda_2'', y_0', y_0'').$$

По методу математической индукции можно получить

$$|x_m(t, y_0', \lambda') - x_m(t, y_0'', \lambda'')| \leq [E + \alpha_1(t)(K_1 + \tilde{\lambda}_1 K_2) + \ldots$$
$$\ldots + \alpha_m(t)(K_1 + \tilde{\lambda}_1 K_2)^m]|x_0' - x_0''| + [\alpha_1(t)E + \alpha_2(t)(K_1 + \tilde{\lambda}_1 K_2) + \ldots$$
$$\ldots + \alpha_m(t)(K_1 + \tilde{\lambda}_1 K_2)^{m-1}]|\lambda_1' - \lambda_1''|M_2 + [E + \alpha_1(t)(K_1 + \tilde{\lambda}_1 K_2) + \ldots$$
$$\ldots + \alpha_{m-1}(t)(K_1 + \tilde{\lambda}_1 K_2)^{m-1}]\, b_1(\lambda_2', \lambda_2'', y_0', y_0'').$$

Из последнего соотношения при $m \to \infty$ с учетом (10), (21), (22) имеем

$$|x^*(t, y_0', \lambda') - x^*(t, y_0'', \lambda'')| \leq [E + \tilde{\alpha}_1(t)(K_1 + \tilde{\lambda}_1 K_2)(E - \tilde{Q})^{-1}] \times$$
$$\times [|x_0' - x_0''| + b_1(\lambda_2', \lambda_2'', y_0', y_0'')] + \tilde{\alpha}_1(t)(E - \tilde{Q})^{-1}|\lambda_1' - \lambda_1''|M_2,$$

т. е. (37) действительно выполняется.

Теорема 5. *При выполнении условий теоремы* 1 *определяющая функция* $\Delta(y_0, \lambda)$ *вида* (32) *краевой задачи с параметрами* (1) – (3) *определена, непрерывна в области* $G \times I$ *и для любых точек* $(y_0', \lambda'), (y_0'', \lambda'') \in G \times I$ *выполняется неравенство*

$$|\Delta(y_0', \lambda') - \Delta(y_0'', \lambda'')| \leq (1/T)\, b_1(\lambda_2', \lambda_2'', y_0', y_0'') + (K_1 + \tilde{\lambda}_1 K_2)[E + \\ + (\pi/3)^2 \tilde{Q}(E - \tilde{Q})^{-1}][|x_0' - x_0''| + b_1(\lambda_2', \lambda_2'', y_0', y_0'')] + \\ + [E + (\pi/3)^2 \tilde{Q}(E - \tilde{Q})^{-1}]\,|\lambda_1' - \lambda_1''|M_2. \tag{39}$$

Доказательство. Для всех точек $(y_0, \lambda) \in G \times I$ существует предел равномерно сходящейся последовательности функций (12), являющейся также непрерывной функцией. Поэтому при изменении (y_0, λ) в области $G \times I$ функция $\Delta(y_0, \lambda)$ непрерывна и ограничена

$$|\Delta(y_0, \lambda)| \leq (1/(|\lambda_2|T))|C^{-1}d - (C^{-1}A + \lambda_2 E)x_0| + M(\lambda_1).$$

Из (32) и оценки (37) имеем

$$|\Delta(y_0', \lambda') - \Delta(y_0'', \lambda'')| \leq (1/T)\, b_1(\lambda_2', \lambda_2'', y_0', y_0'') + \\ + (1/T)(K_1 + \tilde{\lambda}_1 K_2) \int_0^T |x^*(t, y_0', \lambda') - x^*(t, y_0'', \lambda'')|dt + |\lambda_1' - \lambda_1''|M_2 \leq \\ \leq (1/T)\, b_1(\lambda_2', \lambda_2'', y_0', y_0'') + (K_1 + \tilde{\lambda}_1 K_2)[E + \\ + (\pi T/9)(K_1 + \tilde{\lambda}_1 K_2)(E - \tilde{Q})^{-1}][|x_0' - x_0''| + b_1(\lambda_2', \lambda_2'', y_0', y_0'')] + \\ + [E + (\pi T/9)(K_1 + \tilde{\lambda}_1 K_2)(E - \tilde{Q})^{-1}]\,|\lambda_1' - \lambda_1''|M_2 = \\ = (1/T)\, b_1(\lambda_2', \lambda_2'', y_0', y_0'') + (K_1 + \tilde{\lambda}_1 K_2)[E + \\ + (\pi/3)^2 \tilde{Q}(E - \tilde{Q})^{-1}][|x_0' - x_0''| + b_1(\lambda_2', \lambda_2'', y_0', y_0'')] + \\ + [E + (\pi/3)^2 \tilde{Q}(E - \tilde{Q})^{-1}]\,|\lambda_1' - \lambda_1''|M_2,$$

т. е. неравенство (39) выполняется.

Необходимые условия разрешимости краевой задачи (1) – (3) содержатся в следующем утверждении.

Теорема 6. *Предположим, что краевая задача с параметрами* (1) – (3) *удовлетворяет условиям теоремы* 1.

Тогда для того чтобы некоторая область

$$A'' = G'' \times I'' \subset G \times I, \; I'' = I_1'' \times I_2''$$

содержала точку (y_0^*, λ^*), *сводящую при* $\lambda = \lambda^*$ *краевую задачу* (1) – (3) *к задаче Коши* (31), *необходимо, чтобы для всех номеров* m *и произвольной точки* $(\overline{y}_0, \overline{\lambda})$ *из множества* A'' *выполнялось неравенство*

$$|\Delta_m(\overline{y}_0, \overline{\lambda})| = |(1/(\overline{\lambda}_2 T))[C^{-1}d - (C^{-1}A + \overline{\lambda}_2 E)\,\overline{x}_0] - \\ - \frac{1}{T}\int_0^T [f(t, x_m(t, \overline{y}_0, \overline{\lambda})) + \overline{\lambda}_1 g(t, x_m(t, \overline{y}_0, \overline{\lambda}))]dt| \leq \\ \leq \sup_{(y_0, \lambda) \in A''} \{(1/T)\, b_1(\overline{\lambda}_2, \lambda_2, \overline{y}_0, y_0) + (K_1 + \tilde{\lambda}_1 K_2)[E +$$

$$+ (\pi/3)^2 Q(E-Q)^{-1}][\,|\,\overline{x}_0 - x_0\,| + b_1(\overline{\lambda}_2, \lambda_2, \overline{y}_0, y_0)] +$$

$$+ [E + (\pi/3)^2 Q(E-Q)^{-1}]\,|\,\overline{\lambda}_1 - \lambda_1\,|M_2\} + (\pi/3)\,\overline{Q}\,W(\overline{y}_0, \overline{\lambda}), \tag{40}$$

где $b_1(\overline{\lambda}_2, \lambda_2, \overline{y}_0, y_0)$ *задается по формуле* (38), $\overline{x}_0 = (x_{01}, x_{02}, \overline{y}_0)$, *а*

$$W(\overline{y}_0, \overline{\lambda}) = \overline{Q}^m (E-\overline{Q})^{-1} M(\overline{\lambda}_1) + (K_1 + |\overline{\lambda}_1|K_2)\,\overline{Q}^{m-1}(E-\overline{Q})^{-1}]\,\beta_1(x_0, \overline{\lambda}_2),$$

где $\overline{Q} = (T/\pi)(K_1 + |\overline{\lambda}_1|K_2)$, $M(\overline{\lambda}_1) = (M_1 + |\overline{\lambda}_1|M_2)$.

Доказательство. Согласно сделанным предположениям функция $x = x^*(t)$, проходящая при $t = 0$ через точку $x^*(0) = (x_{01}, x_{02}, y_0^*)$, является при $\lambda = \lambda^*$ решением краевой задачи с параметрами (1) – (3). Но тогда согласно теореме 3 точка (y_0^*, λ^*) является решением определяющего уравнения (32), т. е.

$$\Delta(y_0^*, \lambda^*) = 0. \tag{41}$$

Если неравенство (39) записать для точек $(y_0', \lambda') = (\overline{y}_0, \overline{\lambda})$, $(y_0'', \lambda'') = (y_0^*, \lambda^*)$, где $(\overline{y}_0, \overline{\lambda})$ — произвольная точка из области A'', то в силу (41) имеем

$$|\Delta(\overline{y}_0, \overline{\lambda})| \le (1/T)\, b_1(\overline{\lambda}_2, \lambda_2^*, \overline{y}_0, y_0^*) + (K_1 + \tilde{\lambda}_1 K_2)[E +$$

$$+ (\pi/3)^2 \tilde{Q}(E-\tilde{Q})^{-1}][\,|\,\overline{x}_0 - x_0^*\,| + b_1(\overline{\lambda}_2, \lambda_2^*, \overline{y}_0, y_0^*)] +$$

$$+ [E + (\pi/3)^2 \tilde{Q}(E-\tilde{Q})^{-1}]\,|\,\overline{\lambda}_1 - \lambda_1^*\,|M_2, \tag{42}$$

где $\tilde{\lambda}_1 = \max(|\,\overline{\lambda}_1\,|, |\,\lambda_1^*\,|)$. Одновременно по формуле (36) при $(y_0, \lambda) = (\overline{y}_0, \overline{\lambda})$ находим

$$|\Delta_m(\overline{y}_0, \overline{\lambda})| \le |\Delta_m(\overline{y}_0, \overline{\lambda}) - \Delta(\overline{y}_0, \overline{\lambda})| + |\Delta(\overline{y}_0, \overline{\lambda})| \le$$

$$\le |\Delta(\overline{y}_0, \overline{\lambda})| + (\pi/3)^2\,\overline{Q}\,W(\overline{y}_0, \overline{\lambda}). \tag{43}$$

Объединение неравенств (42), (43) приводит к доказываемому соотношению (40).

1. *Лучка А. Ю.* Краевая задача для дифференциальных уравнений с параметрами и ее решение проекционным методом // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1989. – № 9. – С. 12 – 15.
2. *Лучка А. Ю.* Применение итерационных процессов к краевым задачам для дифференциальных уравнений с параметрами // Там же. – № 10. – С. 22 – 27.
3. *Ронто Н. И., Ронто В. А.* Об одном методе исследования краевых задач с параметрами // Краевые задачи мат. физики. – Киев: Наук. думка, 1990. – С. 3 – 10.
4. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы исследования решений краевых задач. – Киев: Наук. думка, 1985. – 224 с.
5. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы исследования периодических решений. – Киев: Выща шк., 1976. – 180 с.
6. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1992. – 280 с.
7. *Приближенное* решение операторных уравнений / М. А. Красносельский, Г. М. Вайникко, П. П. Забрейко и др. – М.: Наука, 1969. – 456 с.

Получено 22.01.93