УДК 517.538: 517.574

М. А. Гирнык, канд. физ.-мат. наук (Львов. торг.-экон. ин-т)

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИИ, СУБГАРМОНИЧЕСКОЙ В КРУГЕ, ЛОГАРИФМОМ МОДУЛЯ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

The result of R. S. Yulmukhametov on approximation of a subharmonic function by the logarithm of the modulus of an analytic function is supplemented with an estimate of the exceptional set in the important case where a disk is considered. We show that this approximation, in a certain sense, cannot be improved.

Результат Р. С. Юлмухаметова про наближення субгармонічної в обмеженій області функції логарифмом модуля аналітичної функції у важливому випадку круга доповнено оцінкою виняткової множини. Показано також непокращуваність у певному сенсі такої апроксимації.

Будем без пояснений применять стандартные обозначения и основные понятия теории субгармонических функций (см., например, [1]). Обозначим $D(z; r) := \{w : |w - z| < r\}$; $S(z; r) := \{w : |w - z| = r\}$; $\operatorname{diam} E$ — диаметр множества E; $\operatorname{int} \Gamma$ — внутренность замкнутой кривой без самопересечений Γ; C (возможно, с индексами) — постоянные, в скобках указываем зависимость от параметров; $SH(\Omega)$ — множество функций, субгармонических в области Ω; $A(\Omega)$ — множество функций, аналитических в области Ω; $B(r; u) := \max\{u(z) : |z| = r\}$, где $u \in SH(D(0, 1))$; μ_u — мера Риса функции $u \in SH(\Omega)$; $\mu_f := \mu_{\ln|f|}$ для функции $f \in A(\Omega)$; $\mu_u(r) := \mu_u(D(0; r))$.

Определим порядок функции $\lambda(r) \nearrow \infty$ при $r \uparrow 1$ равенством

$$\rho[\lambda] := \varlimsup_{r \uparrow 1} \ln \lambda(r) (-\ln(1 - r))^{-1}.$$

Сформулируем результаты, полученные в данной работе. Отметим, что они могут иметь применения при построении аналитических в круге функций с заданными асимптотическими свойствами.

Теорема 1. *Пусть функция* $u \in SH(D(0; 1))$ *имеет конечный порядок* $\rho = \rho[B(r; u)]$ *и* $\alpha > \rho + 2$. *Существуют функция* $f \in A(D(0; 1))$, *постоянная* $C(\alpha)$ *и множество* $E(\alpha)$ *такие, что выполнено неравенство*

$$|u(z) - \ln|f(z)|| \le C(\alpha)(-\ln(1 - |z|)), \quad z \notin E(\alpha), \tag{1}$$

где множество $E(\alpha) \subset U_j D(z_j; t_j)$ *и*

$$\sum_{R < |z_j| < 1} t_j = O\left((1 - R)^{-\rho - 1 + \alpha}\right), \quad R \uparrow 1. \tag{2}$$

Теорема 2. *Пусть* $\{a_n\}$ — *нули функции* $f \in A(D(0; 1))$ *и круги* $D(a_n; (1 - |a_n|)^{5/2})$ *не пересекаются. Тогда*

$$\varlimsup_{R \uparrow 1} \max\left\{\left|(1 - |z|)^{-1} - \ln|f(z)|\right| : |z| \le R,\right.$$

$$\left.|z - a_n| \ge (1 - |a_n|)^{5/2}\right\}(-\ln(1 - R))^{-1} \ge 1/2.$$

***Доказательство теоремы* 1.** Стандартно определим множество точек $(\beta; s)$, нормальных относительно меры μ, условием

$$\operatorname{Norm}(\beta; s; \mu) := \{z : \mu(z; t)) := \mu(D(z; t)) \le \beta t \quad \forall t \in]0; s[\}.$$

Полагаем

$$\operatorname{Norm}(\beta; s; \mu_1; \ldots; \mu_n) := \bigcap_{j=1}^{n} \operatorname{Norm}(\beta; s; \mu_j).$$

Как показал Р. С. Юлмухаметов [2, с. 275], для произвольной функции $u \in SH(\Omega)$, где Ω — ограниченная область в $\mathbb{C}$, существует функция $f \in A(\Omega)$, удовлетворяющая неравенству

$$|u(z) - \ln|f(z)|| \le C_1|\ln s| + C_2|\ln \operatorname{diam}\Omega| + C_3 + \beta s(|\ln s| + 1),$$

если $z \in \operatorname{Norm}(\beta; s; \mu_u; \ldots; \mu_f)$, причем постоянные C_1, C_2, C_3 не зависят от области Ω и функции u. Согласно этому утверждению в условиях теоремы 1 существует функция $f \in A(D(0; 1))$, удовлетворяющая неравенству (1) для точек $z \in \operatorname{Norm}((1-|z|)^{-\alpha-\kappa}; (1-|z|)^{\alpha+\kappa}; \mu_u; \mu_f))$, где $\kappa = (\alpha - \rho - 2)/2$. Обозначим $\nu = \mu_u + \mu_f$.

Далее будет показано, что справедливо неравенство

$$\nu(r) \le C(\alpha)(1-r)^{-\rho-1-\kappa}. \tag{3}$$

В предположении, что выполнено соотношение (3), оценим величину исключительного множества

$$E(\alpha) := D(0; 1) \setminus \operatorname{Norm}((1-|z|)^{-\alpha-\kappa}; (1-|z|)^{\alpha+\kappa}; \nu).$$

По определению нормальной точки относительно меры каждая точка $z \in E(\alpha)$ является центром круга $D(z; t(z))$ такого, что

$$\nu(D(z; t(z)) \ge t(z)((1-|z|)^{-\alpha-\kappa}, \quad t(z) \in]0; (1-|z|)^{\alpha+\kappa}[. \tag{4}$$

По теореме о покрытии [3, с. 246] из покрытия $\{D(z; t(z)\}$ множества $E(\alpha)$ можно выбрать не более чем счетное подпокрытие $\{D(z_j; t_j)\}$, кратность которого не превышает шести (здесь $t_j := t(z_j)$). Обозначим $I_n := \{j : |z_j| \in]1 - 2^{-n}; 1 - 2^{-n-1}]\}$, $n \in \mathbb{N}$. Применяя оценку (4), имеем

$$\sum_{j \in I_n} \nu(D(z_j; t_j)) \ge \sum_{j \in I_n} (1-|z_j|)^{-\alpha-\kappa} t_j \ge 2^{n(\alpha+\kappa)} \sum_{j \in I_n} t_j. \tag{5}$$

С другой стороны, как следует из неравенств (3), (4),

$$\sum_{j \in I_n} \nu(D(z_j; t_j)) \le 6C(\alpha) 2^{(\rho+1+\kappa)(n+1)}. \tag{6}$$

Из неравенств (5) и (6) легко выводится оценка (2). Осталось доказать (3). Не уменьшая общности, можем считать $u(0) = 0$, тогда из формулы Пуассона – Иенсена [1, с. 138 – 146] следует

$$\int_r^{(1+r)/2} \mu_u(t) t^{-1} dt \le \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u\left(\frac{(1+r)}{2} e^{i\varphi}\right) d\varphi.$$

Отсюда и из определения ρ легко получаем оценку

$$\mu_u(r) \le C(\alpha)(1-r)^{-\rho-1-\kappa}. \tag{7}$$

Поэтому для множества

$$E(\alpha; u) := D(0; 1) \setminus \operatorname{Norm}((1-|z|)^{-\alpha-\kappa}; (1-|z|)^{\alpha+\kappa}; \mu_u)$$

выполняется соотношение (2). В силу замечания из [1, с. 275] функция $f \in A(D(0; 1))$, построенная согласно теореме Р. С. Юлмухаметова, удовлетворяет оценке сверху

$$\ln|f(z)| \le u(z) + C(\alpha)(-\ln(1-|z|)) \le$$
$$\le 2(1-|z|)^{-\rho-\kappa}, \quad z \notin E(\alpha; u). \tag{8}$$

Из оценки (7) и доказательств неравенств (5), (6) следует, что для любой точки $z \in D(0; 1)$ существует окружность с центром в начале координат и радиусом длины из промежутка $[|z|; (1+|z|)/2]$, все точки которой принадлежат множеству $\mathrm{Norm}((1-|z|)^{-\alpha-\kappa}; (1-|z|)^{\alpha+\kappa}; \mu_u)$. Тогда из (8) получаем неравенство

$$\ln|f(z)| \le 2(1-(1+|z|)/2)^{-\rho-\kappa} = C(\alpha)(1-|z|)^{-\rho-\kappa},$$

которое выполнено для всех $z \in D(0; 1)$. Согласно теореме Пуассона – Иенсена выводим неравенство вида (7) для меры $\mu_f(r)$, а из него и (7) следует оценка (3).

Доказательство теоремы 2. Отметим, что функция $u(z) := (1-|z|)^{-1} \in \in SH(D(0; 1))$. Обозначим через

$$H_R(z) := (1-R-(1-R)^{3/2})^{-1} \times$$
$$\times \frac{\ln|z| - \ln R}{\ln\left(R+(1-R)^{3/2}\right) - \ln R} + (1-R)^{-1} \frac{\ln|z| - \ln\left(R+(1-R)^{3/2}\right)}{\ln R - \ln\left(R+(1-R)^{3/2}\right)}$$

ее наименьшую гармоническую мажоранту [1, с. 144] в кольце $\{z: R < |z| < R + (1-R)^{3/2}\}$, т. е. гармоническая функция $H_R(z) = u(z)$ на границе кольца и $u(z) < H_R(z)$ внутри него. Оказывается, и это один из главных моментов доказательства, что

$$\max\{|H_R(z) - (1-|z|)^{-1}| : R \le |z| \le R + (1-R)^{3/2}\} \le C, \tag{9}$$

где постоянная C не зависит от R. Действительно, функция $H_R(t) - (1-t)^{-1}$ наибольшее значение на промежутке $[R; R+(1-R)^{3/2}]$ принимает в нуле производной

$$t_0 = \frac{1}{2}((2+\ln(1+(1-R)^{3/2}/R)(1-R)^{-1/2}(1-R-(1-R)^{3/2}) -$$
$$-(4\ln(1+(1-R)^{3/2}/R)(1-R)^{-1/2}(1-R-(1-R)^{3/2}) +$$
$$+\ln^2(1+(1-R)^{3/2}/R)(1-R)^{-1}(1-R-(1-R)^{3/2})^2)^{1/2}.$$

Обычными средствами анализа можно показать, что при $R \uparrow 1$ выполнены соотношения

$$1-t_0 = 1-R-\frac{1}{2}(1-R)^{3/2} + O((1-R)^2),$$
$$H(t_0) - (1-t_0)^{-1} = O(1).$$

Далее, пусть $f(a) = 0$. Обозначим через Γ кривую, составленную из дуг окружности $S := S(a; (1-|a|)^{3/2})$ и из дуг окружностей $S(a_n; (1-|a_n|)^{5/2})$, пересекающихся с окружностью S, так, чтобы кривая Γ была простой, замкнутой, содержащей внутри точку a и лежащей внутри S. Пусть H и H_f — функции, гармонические внутри Γ и равные на Γ соответственно $(1-|z|)^{-1}$ и $\ln|f(z)|$.

Предположим, что утверждение теоремы 2 не верно и при некотором $\sigma < < 1/2$ для всех $R \in]R_0; 1[$ выполняется неравенство

$$\max\{|(1-|z|)^{-1}-\ln|f(z)||:\ |z|\le R,\ |z-a_n|\ge$$
$$\ge(1-|a_n|)^{5/2},\ n=1,2,\dots\}\ \le\ -\sigma\ln(1-R). \qquad (10)$$

Тогда при a, достаточно близком к 1, для всех $z\in\operatorname{int}\Gamma$ имеем

$$|H(z)-(1-|z|)^{-1}|\ \le\ C. \qquad (11)$$

Действительно, $\operatorname{int}\Gamma\subset\operatorname{int}S\subset\{z:\ (R<|z|<R+(1-R)^{3/2}\}$, где $R=1-(1-|a|)2^{2/3}$. Следовательно, по определению наименьшей гармонической мажоранты и в силу неравенства (9) $0\le H(z)-(1-|z|)^{-1}\le H_R(z)-(1-|z|)^{-1}\le C$. Из принципа максимума для гармонических функций следует неравенство $(\sigma<\sigma_1<1/2)$

$$|H_f(z)-H(z)|\ \le\ -\sigma_1\ln(1-|z|),\quad z\in\operatorname{int}\Gamma. \qquad (12)$$

Действительно, на Γ соотношение (12) выполняется по определению функций H, H_f и в силу (10). Далее,

$$|H_f(z)-H(z)|\ \le\ \max\{|H_f(z)-H(z)|:\ z\in\Gamma\}\ =$$
$$=|H_f(z_0)-H(z_0)|\ \le\ -\sigma\ln(1-|z_0|),$$

где $z_0\in\Gamma$. Отсюда и из неравенства $1-|z_0|\ge(1-|z|)/2$ получаем (12). Из соотношений (10) – (12) следует оценка $(\sigma+\sigma_1<\sigma_2<1)$

$$|H_f(z)-\ln|f(z)||\ \le\ -\sigma_2\ln(1-|z|),\quad z\in\operatorname{int}\Gamma. \qquad (13)$$

По формуле Пуассона – Иенсена, примененной к функции $\ln|f|$,

$$\ln|f(z)|\ =\ H_f(z)\ -\sum_{n:a_n\in\operatorname{int}\Gamma}g(z;a_n;\operatorname{int}\Gamma),$$

где $g(z;w;\operatorname{int}\Gamma)$ — функция Грина области $\operatorname{int}\Gamma$, имеем

$$|H_f(z)-\ln|f(z)||\ =\ \left|\sum_{n:a_n\in\operatorname{int}\Gamma}g(z;a_n;\operatorname{int}\Gamma)\right|. \qquad (14)$$

Используя известные свойства функции Грина односвязной области [4, с. 11], вариационные свойства конформных отображений [5, с. 359] и (14), получаем неравенство

$$|H_f(z)-\ln|f(z)||\ \ge\ g(z;a;\operatorname{int}\Gamma)\ \ge$$
$$\ge g(z;a;\operatorname{int}S(a;(1-|a|)^{3/2}/2))\ =\ \ln\frac{(1-|a|)^{3/2}}{2|z-a|}. \qquad (15)$$

Теперь рассмотрим оценку снизу (15) для точки w такой, что $|w-a|=(1-|a|)^{5/2}$, $|w|<|a|$. Получаем

$$|H_f(w)-\ln|f(w)||\ \ge\ -\ln(1-|a|)-\ln 2\ \ge\ -\ln(1-|w|)-\ln 2,$$

а это противоречит (13).

1. *Хейман У., Кеннеди П.* Субгармонические функции. – М.: Мир, 1980. – 304 с.
2. *Юлмухаметов Р. С.* Аппроксимация субгармонических функций // Anal. Math. – 1985. – **11**, № 3. – P. 257 – 282.
3. *Ландкоф Н. С.* Основы современной теории потенциала. – М.: Наука, 1966. – 331 с.
4. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций. – М.: Наука, 1970. – 592 с.
5. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1973. – 736 с.

Получено 14.10.92