УДК 517.944

М. С. Джабраилов, канд. физ.-мат. наук (Азербайдж. пед. ун-т)

О КОЭРЦИТИВНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ В B-ПРОСТРАНСТВАХ

The coercive solvability of operator-differential equations in anisotropic B-spaces of vector-functions is investigated.

Досліджено коерцитивну розв'язуваність диференціально-операторних рівнянь в анізотропних B-просторах вектор-функцій.

Для пространств $B^s_{p,q}(R)$ теоремы вложения и их применения достаточно широко освещены в математической литературе [1 – 3]. Теоремы вложения в абстрактных функциональных пространствах исследованы в работах [4 – 6].

В работе [7] рассматривались абстрактные функциональные пространства типа О. В. Бесова (B-пространства). Показано существование смешаных производных функций из этих пространств и установлены их оценки в B-нормах, связанных с нормой графика позитивных операторов. В данной работе эти результаты применяются для исследования коэрцитивной разрешимости дифференциально-операторных уравнений.

Пусть A — позитивный оператор [3] в гильбертовом пространстве H, $-\infty < \theta < \infty$. Положим

$$H(A^\theta) = \{u\colon u \in \mathfrak{D}(A^\theta),\ \|u\|_{H(A^\theta)} = \|A^\theta u\|_H + \|u\|_H\}.$$

Через $L_p(\Omega: E)$ обозначим пространство функций u со значениями из E, измеримых в сильном смысле на $\Omega \subset R^n$ с соответствующей нормой [4].

Пусть H_0 и H — гильбертовы пространства, H_0 плотно вложено в H, а $[H_0, H]_\theta$, $0 \le \theta \le 1$, — интерполяционные пространства между H_0 и H (см. [4]).

Обозначим через $S(R^n: H)$ класс бесконечно дифференцируемых функций u со значениями из H таких, что для всех m и $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ $\sup\limits_{x \in R^n} (1+|x|^m)\|\mathfrak{D}^\alpha u\|_H < C$, а $S'(R^n: H)$ — пространство всех линейных непрерывных отображений из $S(R^n: H)$ в H. Обозначим также через $L^*_q(E) = L_q(0, T: E)$, $0 < T < \infty$, пространство функций $u(t)$ со значениями из E, сильно измеримых на $[0, T]$ с нормой $\|u\|_{L^*_q(E)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|^2_E \frac{dt}{t}\right)^{1/q} < \infty$ при $1 < q < \infty$,

$$\|u\|_{L^*_\infty} = \sup_{0 \le t \le T} \|u(t)\|_E.$$

Преположим, что $s = (s_1, \dots, s_n)$, $0 < s_k$, — произвольные числа, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in R^n$, а σ_k — произвольные положительные числа, и $\sigma_k > s_k/2$, $k = 1, \dots, n$. Пусть

$$B^s_{p,q}(R^n: H_0, H) = \Big\{u\colon u \in S^1(R^n: H_0),\ \|u\|_{B^s_{p,q}(R^n: H_0, H)} =$$

$$= \|t\mathfrak{F}^{-1} e^{-t|\xi|^2}\mathfrak{F} u\|_{L^*_q(L_p(R^n: H))} +$$

$$+ \left\| \mathfrak{F}^{-1} \sum_{k=1}^{n} t^{\sigma_k - s_k/2} (1+\xi_k^2)^{\sigma_k} e^{-t|\xi|^2} \mathfrak{F} u \right\|_{L_q^\bullet(L_p(R^n:\, H))} < \infty \Big\},$$

где $\mathfrak{F}$ — преобразование, а $\mathfrak{F}^{-1}$ — обратное преобразование Фурье.

При $H_0 = H$ пространство $B_{p,q}^s(R^n: H_0, H)$ обозначим через $B_{p,q}^s(R^n: H)$.

Рассмотрим в $B_{p,q}^s(R^n: H)$ дифференциально-операторнсе уравнение

$$L_\lambda u = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{l_k} \mathfrak{D}_k^{2l_k} u + A_\lambda u + \sum_{|\alpha:\, 2l| < 1} A_\alpha(x) \mathfrak{D}_u^\alpha = f, \tag{1}$$

где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $2l = (2l_1, \ldots, 2l_n)$, $|\alpha: 2l| = \sum_{k=1}^n \alpha_k/(2l_k)$, $A_\lambda = A - \lambda I$, I — единичный оператор, а A и $A_\alpha(x)$ — линейные неограниченные операторы в H.

Будем исследовать коэрцитивную разрешимость уравнения (1) в пространстве $B_{p,q}^s(R^n: H)$. Сначала рассмотрим уравнение

$$L_{0,\lambda} u = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{l_k} \mathfrak{D}_k^{2l_k} u + A_\lambda u = f. \tag{2}$$

Пусть c — множество комплексных чисел,

$$S(\varphi) = \{\lambda: \lambda \in c,\ |\arg\lambda - \pi| < \pi - \varphi,\ 0 < \varphi \le \pi\}$$

и для каждого $\lambda \in S(\varphi)$ выполняется оценка

$$\|(A - \lambda I)^{-1}\|_{\mathfrak{L}(H)} \le M_\varphi (1 + |\lambda|)^{-1}. \tag{3}$$

Функция $u \in B_{p,q}^{2l+s}(R^n: H(A), H)$, удовлетворяющая уравнению (1) почти всюду на R^n, называется решением уравнения (1).

Теорема 1. *Пусть выполнено* (3), *тогда для любых* $f \in B_{p,q}^s(R^n: H)$ *и* $\lambda \in S(\varphi)$, $\varphi \in (\pi/2, \pi]$ *существует единственное решение* $u(x)$ *уравнения* (2), *принадлежащее пространству* $B_{p,q}^{2l+s}(R^n: H(A), H)$ *и выполняется оценка*

$$\|u\|_{B_{p,q}^{2l+s}(R^n:\, H(A),\, H)} \le c\, \|f\|_{B_{p,q}^s(R^n:\, H)}. \tag{4}$$

Доказательство. Так как для каждого $\xi \in R^n$ — $\sum_{k=1}^n \xi_k^{2l_k} \in S(\varphi)$, то оператор $A + \sum_{k=1}^n \xi_k^{2l_k}$ обратим. Поэтому, применяя в уравнении (2) преобразование Фурье, получаем, что для каждого $f \in B_{p,q}^s(R^n: H)$

$$u(x) = \mathfrak{F}^{-1} \left(A + \sum_{k=1}^{n} \xi_k^{2l_k} - \lambda \right)^{-1} \mathfrak{F} f$$

удовлетворяет уравнению (2).

Докажем, что для произвольного $t \in (0, \infty)$ выполняется оценка (4).

Сперва покажем, что почти при всех $t \in (0, \infty)$ справедлива оценка

$$\left\| t\, \mathfrak{F}^{-1} e^{-t|\xi|^2} A \left(A + \sum_{k=1}^{n} \xi_k^{2l_k} - \lambda \right) \mathfrak{F} f \right\|_{L_p(R^n:\, H)} +$$

$$+ \left\| t\,\mathfrak{F}^{-1} e^{-t|\xi|^2} \sum_{k=1}^{n} \left(1+\xi_k^2\right)^{l_k + s_k/2+1} \left(A + \sum_{k=1}^{n} \xi_k^{2l_k} - \lambda\right)^{-1} \mathfrak{F} f \right\|_{L_p(R^n:\, H)} \le$$

$$\le c \left\| t\,\mathfrak{F}^{-1} e^{-t|\xi|^2} \sum_{k=1}^{n} \left(1+\xi_k^2\right)^{s_k/2+1} \mathfrak{F} f \right\|_{L_p(R^n:\, H)}. \tag{5}$$

Для этого достаточно показать, что оператор-функции

$$Q_1(\xi) = A\left(A + \sum_{k=1}^{n} \xi_k^{2l_k} - \lambda\right)^{-1} \left[\sum_{k=1}^{n} \left(1+\xi_k^2\right)^{s_k/2+1}\right]^{-1},$$

$$Q_2(\xi) = \sum_{k=1}^{n} \left(1+\xi_k^2\right)^{l_k+s_k/2+1} \left(A + \sum_{k=1}^{n} \xi_k^{2l_k} - \lambda\right) \left[\sum_{k=1}^{n} \left(1+\xi_k^2\right)^{s_k/2+1}\right]^{-1}$$

являются мультипликаторами в $L_p(R^n:\, H)$, $1 < p < \infty$. Так как для каждого $\xi \in R^n$, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $\xi_j \ne 0$ и произвольного $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_j \in \in \{0, 1\}$, справедливы оценки

$$|\xi_1|^{\alpha_1} \ldots |\xi_n|^{\alpha_n} \| \mathfrak{D}^{\alpha} Q_1(\xi) \|_{\mathfrak{L}(H)} \le c, \tag{6}$$

$$|\xi_1|^{\alpha_1} \ldots |\xi_n|^{\alpha_n} \| \mathfrak{D}^{\alpha} Q_2(\xi) \|_{\mathfrak{L}(H)} \le c, \tag{7}$$

то в силу теоремы о мультипликаторах [5] оператор-функции $Q_1(\xi)$ и $Q_2(\xi)$ являются мультипликаторами в $L_p(R^n:\, H)$. Учитывая это, нетрудно получить оценку (5), из которой следует утверждение теоремы.

Теорема 2. *Пусть выполнено* (3) *и*

$$A_\alpha(x) A^{-(1-|\alpha:\, 2l|-\mu)} \in L_\infty(R^n:\, \mathfrak{L}(H))$$

при некотором $0 < \mu < 1 - |\alpha:\, 2l|$. *Тогда для произвольных* $f \in B^s_{p,q} \times \times (R^n:\, H)$, $\lambda \in S(\varphi)$, $\varphi \in (\pi/2, \pi]$ *и достаточно больших* $|\lambda| > 0$ *существует единственное решение* $u(x)$, *принадлежащее пространству* $B^{2l+s}_{p,q} \times \times (R^n:\, H(A), H)$, *и выполняется оценка*

$$\|u\|_{B^{2l+s}_{p,q}(R^n:\, H(A),\, H)} \le C \|f\|_{B^s_{p,q}(R^n:\, H)}. \tag{8}$$

Доказательство. Обозначим через L и L_0 соответственно дифференциальные операторы в $B^s_{p,q}(R^n:\, H)$, порожденные задачами (1) и (2), т. е.

$$\mathfrak{D}(L) = \mathfrak{D}(L_0) = B^{2l+s}_{p,q}(R^n:\, H(A), H),$$

$$L_0 u = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{l_k} \mathfrak{D}_k^{2l_k} u + Au, \tag{9}$$

$$L_1 u = \sum_{|\alpha:\, 2l| < 1} A_\alpha(x) \mathfrak{D}^\alpha u, \quad Lu = L_0 u + L_1 u.$$

Из теоремы 1 следует, что оператор $L_0 - \lambda I$ имеет ограниченно обратный из $B^s_{p,q}(R^n:\, H)$ в $B^{2l+s}_{p,q}(R^n:\, H(A), H)$. Поэтому из равенства (9) получаем

$$L - \lambda I = [I + L_1(L_0 - \lambda I)^{-1}](L_0 - \lambda I). \tag{10}$$

В силу теоремы 1 из работы [8] для произвольных $u \in B^{2l+s}_{p,q}(R^n:\, H(A), H)$

и $\lambda \in S(\varphi)$ имеем

$$\|L_1 u\|_{B^s_{p,q}(R^n:\,H)} \le \varepsilon \|(L_0 - \lambda I)u\|_{B^s_{p,q}(R^n:\,H)} + \\ + C\|t\mathfrak{F}^{-1}e^{-t|\xi|^2}\mathfrak{F}u\|_{L^*_q(L_q(R^n:\,H))}. \tag{11}$$

Далее, используя теоремы о мультипликаторах [5], для любого $\lambda \in S(\varphi)$, $\varphi \in \in (\pi/2, \pi]$ из (11) получаем утверждение теоремы.

Теорема 3. *Пусть выполнено* (3). *Тогда при произвольном* $\lambda \in S(\varphi)$, $\varphi \in \in (\pi/2, \pi]$ *для резольвенты* $(L_0 - \lambda I)^{-1}$ *справедлива оценка*

$$\|\mathfrak{D}^\alpha(L_0 - \lambda I)^{-1}f\|_{B^s_{p,q}(R^n:\,H)} \le C(1+|\lambda|)^{-(1-|\alpha:\,2l|)}\|f\|_{B^s_{p,q}(R^n:\,H)}. \tag{12}$$

Доказательство. Из теоремы 1 следует, что для каждого $\lambda \in S(\varphi)$, $\varphi \in \in (\pi/2, \pi]$, существует резольвента $(L_0 - \lambda I)^{-1}$ неравенства (12). Доказывая, что оператор функции

$$Q_\lambda(\xi) = (1+|\lambda|)^{1-|\alpha:\,2l|}\xi_1^{\alpha_1}\ldots\xi_n^{\alpha_n}\left(A_\lambda + \sum_{k=1}^n \xi_k^{2l_k}\right)^{-1}$$

является мультипликатором в $L_p(R^n:\,H)$ равномерно по $\lambda \in S(\varphi)$, устанавливаем справедливость неравенства (12).

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы* 3 *и при некотором* $0 < \mu < < 1 - |\alpha:\,2l|$, $A_\alpha(x)A^{-(1-|\alpha:\,2l|)} \in L_\infty(R^n:\,\mathfrak{L}(H))$. *Тогда для каждого* $\lambda \in \in S(\varphi)$, $\varphi \in (\pi/2, \pi]$ *и при достаточно больших* $|\lambda| > 0$ *для резольвенты* $(L - \lambda I)^{-1}$ *справедлива оценка*

$$\|\mathfrak{D}^\alpha(L - \lambda I)^{-1}\|_{\mathfrak{L}(B^s_{p,q}(R^n:\,H))} \le \mu_\varphi(1+|\lambda|)^{-(1-|\alpha:\,2l|)}.$$

Теорема 4 доказывается аналогично теореме 2 с применением теории возмущений линейных операторов [3].

Автор считает своим долгом выразить глубокую благодарность проф. В. Б. Шахмурову за обсуждение результатов и ценные замечания.

1. *Бесов О. В.* О коэрцитивности в неизотропном пространстве С. Л. Соболева // Мат. сб. – 1967. – **73**, №4. – С. 585 – 599.
2. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложений. – М.: Наука, 1975. – 480 с.
3. *Трибель X.* Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1980. – 664 с.
4. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Е.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. – М.: Мир, 1971. – 371 с.
5. *Лизоркин П. И.* (L_p, L_q)-мультипликаторы интегралов Фурье // Докл. АН СССР. – 1963. – **152**, №4. – С. 808 – 811.
6. *Шахмуров В. Б.* Коэрцитивные краевые задачи для вырождающихся дифференциально-операторных уравнений // Там же. – 1985. – **280**, №5. – С. 281 – 283.
7. *Джабраилов М. С.* О некоторых векторнозначных *B*-пространствах // Докл. АН АзССР. – 1989. – №1. – С. 3 – 5.

Получено 21.09.92