УДК 519.21

Н. В. Москальцова, асп.,
В. М. Шуренков, д-р физ.-мат. наук (Киев. автодор. ин-т)

ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ СПЕЦИАЛЬНЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ ОТ ЭРГОДИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ*

The central limit theorem for $\mathcal{E}$-finite bounded functions of ergodic Markov chains is proved. Two useful corollaries are given.

Доведено центральну граничну теорему для $\mathcal{E}$-фінітних обмежених функцій від ергодичних ланцюгів Маркова, а також два корисних наслідки.

Данная работа является продолжением работ [1–3]. Будем рассматривать однородную цепь Маркова X_n в некотором измеримом фазовом пространстве $(E, \mathfrak{A})$ со счетно-порожденной σ-алгеброй $\mathfrak{A}$. Цепь X_n будем считать эргодической со стационарной вероятностной мерой π и переходными вероятностями за n шагов $Q^n(x, A)$. Кроме того, пусть $\nu_n(D)$ — число посещений цепью множества $D \in \mathfrak{A}$ за n шагов, $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(X_k)$, где f — некоторая $\mathfrak{A}$-измеримая функция.

Как и в работе [3], класс $\mathfrak{A}$-измеримых множеств $\mathcal{E}$ будем называть мизерным, если он замкнут относительно конечного объединения своих множеств и содержит все $\mathfrak{A}$-измеримые подмножества своих элементов. По-прежнему, $\mathfrak{A}$-измеримую функцию f будем называть $\mathcal{E}$-финитной, если $f = 0$ вне некоторого множества из мизерного класса $\mathcal{E}$. Неотрицательное ядро W будем считать $\mathcal{E}$-ограниченным, если $\sup_x W(x, D) < \infty$ для всех $D \in \mathcal{E}$. Сохраним обозначения $Wf(x) = \int_E W(x, dy) f(y)$ и $\langle \pi, f \rangle = \int_E \pi(dx) f(x)$ и сформулируем результат.

Теорема. *Существуют мизерный полный класс $\mathcal{E}$ и неотрицательное $\mathcal{E}$-ограниченное ядро V такие, что для любой $\mathcal{E}$-финитной ограниченной функции f с $\langle \pi, f \rangle = 0$ случайная величина $S_n / \sqrt{n}$ асимптотически нормальна с нулевым средним и дисперсией*

$$b^2 = \langle \pi, f^2 \rangle + 2 \langle \pi, f V f \rangle.$$

Доказательство. Покажем, что существует множество $D \in \mathfrak{A}$ такое, что

$$\varlimsup_{t \uparrow 1} (1 - t)^2 \sum_{n \geq 1} t^n \int_D \pi(dx) \mathbb{P}_x S_n^2 < \infty, \tag{1}$$

$$\varlimsup_{t \uparrow 1} (1 - t) \left| \sum_{n \geq 1} t^n \int_D \pi(dx) \mathbb{P}_x S_n \right| < \infty. \tag{2}$$

Тогда согласно теореме 1 из [4] (гл. 3, § 2) будет справедлива и сформулированная теорема.

Так как

* Выполнена при финансовой поддержке Государственного комитета Украины по вопросам науки и технологий.

$$\mathbb{P}_x S_n = \mathbb{P}_x \sum_{k=0}^{n-1} f(X_k) = \sum_{k=0}^{n-1} Q^k f(X_k),$$

то

$$(1-t) \sum_{n \geq 1} t^n \mathbb{P}_x S_n = \sum_{k \geq 0} Q^k f(x) \sum_{n \geq k+1} (1-t) t^n =$$
$$= \sum_{k \geq 0} t^{k+1} Q^k f(x) = t R_t f(x).$$

В работе [3] доказано, что для всех x $R_t f(x) \to W f(x)$ при $t \uparrow 1$, а также, что $|R_t f(x)| \leq C$ равномерно по t. Поэтому (2) выполнено для всех $D \in \mathfrak{A}$. Для доказательства (1) рассмотрим

$$\mathbb{P}_x S_n^2 = \mathbb{P}_x \sum_{k=0}^{n-1} f^2(X_k) + 2\, \mathbb{P}_x \sum_{0 \leq k < l < n} f(X_k) f(X_l).$$

Используя те же рассуждения, что и в цепочке равенств (1)–(3) из [2], получаем

$$(1-t)^2 \sum_{n \geq 1} t^n \mathbb{P}_x S_n^2 = 2(1-t) \sum_{k \geq 0} t^{k+1} \mathbb{P}_x f(X_k) R_t f(X_k) -$$
$$- (1-t) \sum_{k \geq 0} t^{k+1} \mathbb{P}_x f^2(X_k). \tag{3}$$

По условию теоремы функция f является $\mathcal{E}$-финитной, поэтому $\langle \pi, f^2 \rangle$ конечно и обе функции под знаком условного математического ожидания $\mathbb{P}_x$ в правой части (3) являются $\mathcal{E}$-финитными. Учитывая все изложенное выше, после интегрирования и предельного перехода при $t \uparrow 1$ из (3) устанавливаем справедливость условия (1).

Таким образом, случайная величина $\frac{1}{\sqrt{n}} S_n$ асимптотически нормальна и согласно [4, с. 322] имеет в пределе нулевое среднее и дисперсию

$$b^2 = c\, \mathbb{P}_\rho S_\tau^2 + 2c\, \mathbb{P}_\rho S_{\tau_1} \left(S_{\tau_2} - S_{\tau_1} \right), \tag{4}$$

где $c > 1/(\mathbb{P}_\rho \tau)$, $\tau = \min\{k \geq 1 : X_k = 0\}$, а $\rho(A) = \mathbb{P}_x\{X_\tau \in A\}$. Так как

$$\mathbb{P}_\rho S_\tau^2 = \mathbb{P}_\rho \sum_{k=0}^{\tau-1} f^2(X_k) + 2\, \mathbb{P}_\rho \sum_{j=0}^{\tau-1} f(X_j) \sum_{k=j+1}^{\tau-1} f(X_k) =$$
$$= \frac{1}{c} \langle \pi, f^2 \rangle + \frac{2}{c} \langle \pi, f V f \rangle,$$

где

$$V(x, A) = \sum_{k \geq 0} \mathbb{P}_x \{X_k \in A,\ k < \tau\},$$

то осталось показать, что в рассматриваемом случае второе слагаемое в правой части (4) равно нулю. В самом деле,

$$\mathbb{P}_\rho S_{\tau_1} \left(S_{\tau_2} - S_{\tau_1} \right) = \mathbb{P}_\rho \left[S_\tau \mathbb{P}_{X_\tau} S_\tau \right] = \mathbb{P}_\rho \tau \int \pi(dx) f(x)\, \mathbb{P}_x \mathbb{P}_{X_\tau} S_\tau = 0,$$

и теорема доказана.

***Следствие* 1.** *Случайная величина*

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\nu_n(D)-\frac{\pi(D)}{\pi(C)}\nu_n(C)\right),$$

где $C, D \in \mathcal{E}$, *асимптотически нормальна с нулевым средним и дисперсией*

$$\frac{\pi(D)}{\pi(C)}[\pi(C)+\pi(D)-\pi(CD)]+2\int_D \pi(dx)\left[V(x,D)-\frac{\pi(D)}{\pi(C)}V(x,C)\right]-$$

$$-\frac{2\pi(D)}{\pi(C)}\int_C \pi(dx)\left[V(x,D)-\frac{\pi(D)}{\pi(C)}V(x,C)\right].$$

Доказательство. Справедливость следствие очевидна, если принять в теореме

$$f(x) = I_D(x)-\frac{\pi(D)}{\pi(C)}I_C(x)$$

и заметить, что эта функция удовлетворяет всем условиям теоремы.

***Следствие* 2.** *Если* $\mathfrak{A}$*-измеримая функция* g *и множество* $D \in \mathcal{E}$ *таковы, что* $\pi(D) > 0$ *и* $\int_D \pi(dx)g(x) = 0$, *то* $\frac{1}{\sqrt{n}}\int_D g(x)\nu_n(dx)$ *асимптотически нормальна с нулевым средним и дисперсией*

$$\int_D \pi(dx)g(x)\left[g(x)+2\int_D V(x,dy)g(y)\right].$$

Доказательство. Если положить в теореме $f(x) = g(x)I_D(x)$, то

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} g(X_k)I_D(X_k) = \int_D g(x)\nu_n(x),$$

$$\langle \pi, f^2\rangle = \int_D \pi(dx)g^2(x), \quad \langle \pi, fVf\rangle = \int_D \pi(dx)g(x)\int_D V(x,dy)g(y),$$

и следствие 2 доказано.

1. *Москальцова Н. В., Шуренков В. М.* Об асимптотике потенциала счетной эргодической цепи Маркова // Укр. мат. журн. – 1993. – **45**, № 2. – С. 265 – 270.
2. *Москальцова Н. В., Шуренков В. М.* Центральная предельная теорема для центрированных частот счетной эргодической цепи Маркова // Там же. – № 12. – С. 1713 – 1715.
3. *Москальцова Н. В., Шуренков В. М.* Про потенціали ергодичних ланцюгів Маркова // Там же. – 1994. – **46,** № 4. – С. 446 – 449.
4. *Шуренков В. М.* Эргодические процессы Маркова. – М.: Наука, 1989. – 336 с.

Получено 10.12.92