УДК 517.9

В. И. Савкин, канд. физ.-мат. наук (Киев. политехн. ин-т)

КРИТЕРИЙ КОНЕЧНОМЕРНОСТИ БАНАХОВА МНОГООБРАЗИЯ С СЕПАРАБЕЛЬНОЙ МОДЕЛЬЮ

An example of a continuous bijective mapping on a separable Banach manifold, which differs from the identical mapping only on the open unit ball and has a discontinuous inverse, is given. A criterion for a Banach manifold with a separable model to be finite-dimensional is obtained in terms of continuity of inverse mappings.

Наведено приклад неперервного бієктивного відображення з розривним оберненим, що діє у сепарабельному банаховому просторі і відрізняється від тотожного лише у відкритій одиничній кулі. Одержано критерій скінченновимірності банахового многовиду з сепарабельною моделлю у термінах неперервності обернених операторів.

Пусть E — банахово пространство. Будем говорить, что хаусдорфово топологическое пространство X является топологическим, или класса C^0, E-многообразием, если каждая точка из X имеет открытую окрестность, гомеоморфную пространству E; пространство E в этом случае называется моделью для X. Если E — n-мерное пространство, то X называется n-мерным топологическим многообразием, или топологическим n-многообразием.

Следующее утверждение является простым следствием теоремы Брауэра об инвариантности области [1, с. 100].

Лемма 1. *Пусть M — произвольное топологическое n-мерное многообразие и $f\colon M \to M$ — непрерывное биективное отображение, действующее в M; тогда обратное отображение $f^{-1}\colon M \to M$ также непрерывно.*

Лемма 2. *В пространстве l_2 действует непрерывное биективное отображение χ, имеющее следующие свойства*:

а) $\chi(\theta) = \theta$;

б) $\chi(x) = x \quad \forall\, x \in l_2 \setminus S_1(\theta)$, *где* $S_1(\theta) = \{x \in l_2\colon \ \|x\| < 1\}$;

в) *отображение* χ^{-1} *разрывно в нуле.*

Доказательство. Определим оператор χ таким образом: пусть $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \in l_2$, тогда

$$\chi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(\|x\|)\, x_n e_n,$$

где

$$q_n(\eta) = \begin{cases} 0, & \eta \le 0; \\ \dfrac{2}{n+1}\eta, & 0 < \eta \le \dfrac{1}{2}; \\ \dfrac{2n}{n+1}\eta - \dfrac{n-1}{n+1}, & \dfrac{1}{2} < \eta \le 1; \\ 1, & \eta > 1, \end{cases}.$$

$\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — стандартный базис пространства l_2.

Покажем, что оператор $y = \chi(x)$ действует в пространстве l_2. Действительно,

$$\sum_{n=1}^{\infty} q_n^2(\|x\|)\, x_n^2 \le q_1^2(\|x\|) \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 = q_1^2(\|x\|)\, \|x\|^2 < \infty.$$

Для доказательства инъективности отображения χ рассмотрим два различных элемента $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ и $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n, \dots)$ из l_2. Предположим, что

$$\chi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(\|x\|) x_n e_n = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(\|\bar{x}_n\|) \bar{x}_n e_n = \chi(\bar{x}). \tag{1}$$

Если $\|x\| = \|\bar{x}\|$, то из формулы (1) следует, что $x_k = \bar{x}_k \quad \forall k \in N$, а это противоречит условию $x \neq \bar{x}$. Пусть $\|x\| < \|\bar{x}\|$; поскольку каждая из функций $q_n(\eta)$ является монотонно возрастающей (неубывающей), то $\forall n \in N$ имеем $|x_n| = \dfrac{q_n(\|\bar{x}\|)}{q_n(\|x\|)} |\bar{x}_n| \geq |\bar{x}_n|$, поэтому $\|x\| \geq \|\bar{x}\|$. Последнее неравенство противоречит нашему предположению $\|x\| < \|\bar{x}\|$. Таким образом, инъективность отображения χ доказана.

Перейдем теперь к доказательству сюръективности оператора χ. Рассмотрим произвольный элемент $y = (y_1, y_2, \dots, y_n, \dots) \in l_2$ и покажем, что существует такой элемент $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in l_2$, для которого $\chi(x) = y$. Если

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)^2 y_n^2 \leq \frac{1}{4},$$

то в качестве прообраза y можно взять элемент $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ с координатами

$$x_k = \frac{(k+1) y_k}{\sqrt{2} \sqrt[4]{\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)^2 y_n^2}} \quad \forall k \in N.$$

Действительно, в этом случае

$$\|x\| = \frac{\sqrt[4]{\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)^2 y_n^2}}{\sqrt{2}} \leq \frac{1}{2}$$

и, следовательно,

$$\chi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(\|x\|) x_n e_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n+1} \|x\| x_n e_n =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n+1} \frac{\sqrt[4]{\sum_{k=1}^{\infty} (k+1)^2 y_k^2}}{\sqrt{2}} \frac{(n+1) y_n}{\sqrt{2} \sqrt[4]{\sum_{k=1}^{\infty} (k+1)^2 y_k^2}} = \sum_{n=1}^{\infty} y_n e_n = y.$$

Для исследования случая, когда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)^2 y_n^2 > \frac{1}{4}; \quad \|y\| < 1$$

(при этом не исключается, что сумма, стоящая в левой части последнего неравенства, может обращаться в бесконечность), рассмотрим на $(0; \infty)$ функцию

$$Q(\eta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n^2}{\left(\frac{1}{n+1} + \frac{2n}{n+1} \eta \right)^2 \left(\frac{1}{2} + \eta \right)^2}.$$

Легко видеть, что функция $Q(\eta)$ в своей области определения является непрерывной и строго убывающей, причем $\lim\limits_{\eta\to\infty} Q(\eta) = 0$. Положим

$$Q(0) = \lim_{\eta\to 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n^2}{\left(\frac{1}{n+1} + \frac{2n}{n+1}\eta\right)^2 \left(\frac{1}{2}+\eta\right)^2} = 4 \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)^2 y_n^2 .$$

В силу нашего предположения $Q(0) > 1$, поэтому существует $1/2 > \eta_0 > 0$ такое, что $Q(\eta_0) = 1$. Пусть

$$x_n = \frac{y_n}{\frac{1}{n+1} + \frac{2n}{n+1}\eta_0} \quad \forall\, n \in N,$$

тогда

$$\frac{x_n^2}{\left(\frac{1}{2}+\eta_0\right)^2} = \frac{y_n^2}{\left(\frac{1}{n+1} + \frac{2n}{n+1}\eta_0\right)^2 \left(\frac{1}{2}+\eta_0\right)^2},$$

поэтому

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n^2}{\left(\frac{1}{n+1} + \frac{2n}{n+1}\eta_0\right)^2 \left(\frac{1}{2}+\eta_0\right)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n^2}{\left(\frac{1}{2}+\eta_0\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}+\eta_0\right)^2}\|x\|^2.$$

Следовательно, $x \in l_2$ и $\|x\| = 1/2 + \eta_0$. Кроме того,

$$\chi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(\|x\|)\, x_n e_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{n+1}\|x\| - \frac{n-1}{n+1} \right) x_n e_n =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2n}{n+1}\left(\frac{1}{2}+\eta_0\right) - \frac{n-1}{n+1} \right] \frac{y_n}{\frac{1}{n+1} + \frac{2n}{n+1}\eta_0} e_n = \sum_{n=1}^{\infty} y_n e_n = y.$$

В случае, когда $\|y\| \ge 1$, имеем

$$\chi(y) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(\|y\|)\, y_n e_n = \sum_{n=1}^{\infty} y_n e_n = y.$$

Таким образом, биективность отображения χ доказана.

Непрерывность оператора $y = \chi(x)$ следует из неравенств: если $\|x\| \le 1/2$, $\|x_0\| \le 1/2$ $\left(x_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, \ldots) \right)$, то

$$\|\chi(x) - \chi(x_0)\| = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n+1}\|x\| x_n e_n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n+1}\|x_0\|\, x_n^0 e_n \right\| =$$

$$= 2\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}\left(\|x\|\, x_n - \|x_0\|\, x_n^0\right)^2} =$$

$$= 2\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}\left[\left(\|x\|\, x_n - \|x\|\, x_n^0\right) + \left(\|x\|\, x_n^0 - \|x_0\|\, x_n^0\right)\right]^2} \le$$

$$\le 2\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}\left(x_n-x_n^0\right)^2\|x\|^2}+2\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}\left(\|x\|-\|x_0\|\right)^2\left(x_n^0\right)^2}\le$$

$$\le\|x\|\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left(x_n-x_n^0\right)^2}+\|x-x_0\|\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left(x_n^0\right)^2}=\|x-x_0\|\left(\|x\|+\|x_0\|\right);$$

в случае, когда $1/2\le\|x\|\le 1$, $1/2\le\|x_0\|\le 1$,

$$\|\chi(x)-\chi(x_0)\|\le\left\|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{n+1}\|x\|x_n e_n-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{n+1}\|x_0\|\,x_n^0 e_n\right\|+$$

$$+\left\|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{n+1}x_n e_n-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{n+1}x_n^0 e_n\right\|\le$$

$$\le 2\left(\|x\|+\|x_0\|\right)\|x-x_0\|+\|x-x_0\|=\left(2\|x\|+2\|x_0\|+1\right)\|x-x_0\|.$$

Итак, отображение χ является непрерывным биективным оператором, действующим в пространстве l_2 и имеющим свойства а) и б).

Докажем, то обратное отображение $x=\chi^{-1}(y)$ разрывно в нуле. В самом деле, рассмотрим последовательность $\{y^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}\subset l_2$, $y^{(k)}=(y_1^{(k)},y_2^{(k)},\ldots$ $\ldots,y_n^{(k)},\ldots)$, где $y_n^{(k)}=0$ при $n\ne k$ и $y_k^{(k)}=1/(2(k+1))$. Очевидно, что $y^{(k)}\to\theta$ при $k\to\infty$. Тем не менее

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)^2\left(y_n^{(k)}\right)^2=\frac{1}{4}\quad\forall\,k\in N;$$

поэтому, полагая

$$x^{(k)}=\left(x_1^{(k)},x_2^{(k)},\ldots,x_n^{(k)},\ldots\right)=\chi^{-1}(y^{(k)}),$$

получаем

$$x_n^{(k)}=\frac{(n+1)y_n^{(k)}}{\sqrt{2}\sqrt[4]{\sum_{m=1}^{\infty}(m+1)^2\left(y_m^{(k)}\right)^2}}=\begin{cases}0, & k\ne n;\\ \dfrac{1}{2}, & k=n.\end{cases}$$

Следовательно, $\|x^{(k)}\|=1/2$ и $x^{(k)}\not\to\theta$ при $k\to\infty$. Лемма доказана.

Теорема. *Пусть E — бесконечномерное сепарабельное банахово пространство. Тогда для любого топологического E-многообразия X существуетнепрерывное биективное отображение A, действующее в этом многообразии, такое, что обратное отображение A^{-1} не является непрерывным.*

Доказательство. В силу теоремы М. И. Кадеца о гомеоморфизме бесконечномерных сепарабельных банаховых пространств [2] можем считать, что моделью для X служит пространство l_2. Пусть x_0 — произвольная точка из X; существует открытая окрестность $W(x_0)$ этой точки и гомеоморфизм φ: $W(x_0)\to l_2$ окрестности $W(x_0)$ на l_2. Тогда нетрудно заметить [3, с. 113] (теорема 3), что искомым отображением будет отображение, определяемое формулой

$$A(x)=\begin{cases}x, & x\in X\setminus\varphi^{-1}(S_1(\theta));\\ \varphi^{-1}\chi\varphi(x), & x\in\varphi^{-1}(S_1(\theta)),\end{cases}$$

где χ — оператор, построенный в лемме 2. Теорема доказана.

Из этой теоремы и леммы 1 получаем следующее утверждение.

Следствие. *Топологическое E-многообразия X с сепарабельной моделью является конечномерным тогда и только тогда, когда для всякого непрерывного биективного отображения $A: X \to X$, действующего в X, обратное отображение A^{-1} также будет непрерывным.*

1. *Дольд А.* Лекции по алгебраической топологии. – М.: Мир, 1976. – 464 с.
2. *Кадец М. И.* Доказательство топологической эквивалентности всех сепарабельных бесконечномерных пространств Банаха // Функцион. анализ и его прил. – 1967. – **1**, вып. 1. – С. 61 – 70.
3. *Куратовский К.* Топология: В 2-х т. – М.: Наука, 1985. –Т. 1. – 596 с.

Получено 29.12.92