УДК 517.9

А. Н. Станжицкий, канд. физ.-мат. наук (Киев. ун-т)

К ВОПРОСУ О ВТОРОЙ ТЕОРЕМЕ БОГОЛЮБОВА ДЛЯ СИСТЕМ СО СЛУЧАЙНЫМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ*

For differential systems with a random right-hand side, conditions of existence of periodic solutions in a neighborhood of the equilibrium of the averaged system are given.

Для систем диференціальних рівнянь з випадковою правою частиною наведені умови існування періодичних розв'язків в околі положень рівноваги усередненої системи.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений со случайной правой частью и малым положительным параметром вида

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X_1(t, x) + \varepsilon^2 X_2(t, x, \xi(t)), \tag{1}$$

где $X_1(t, x)$ и $X_2(t, x, y)$ — функции, определенные и непрерывные по совокупности переменных в $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ соответственно, периодические по t с периодом θ, $\xi(t)$ — измеримый, периодический в узком смысле (в смысле конечномерных распределений) случайный процесс с непрерывными с вероятностью 1 траекториями, заданный на некотором вероятностном пространстве (Ω, F, P). Очевидно, равномерно по t, x существует

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} X_1(s, x)ds = X_0(x) = \frac{1}{\theta}\int_0^\theta X_1(t, x)dt.$$

Для (1) рассмотрим усредненную детерминированную систему

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X_0(x). \tag{2}$$

Вопросам близости соответствующих решений систем (1) и (2) на конечных интервалах времени посвящено много работ. Полученные в этом направлении результаты являются обобщением первой теоремы Боголюбова [1] для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Поведение решений системы (1) на бесконечном интервале времени, что есть содержанием второй теоремы Боголюбова, еще довольно мало изучено. Отметим работы [2, 3], где изучалась устойчивость решений системы (1) по усредненной системе (2).

В данной работе рассмотрим другой аспект теоремы Боголюбова — существование периодических решений системы (1) в окрестности положения равновесия системы (2).

Пусть $y = y_0$ — изолированное положение равновесия системы (2). Обозначим

$$B(t, x) = \int_0^t \left[X_1(s, x) - X_0(x)\right] ds.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема. *Пусть выполняются условия:*

1) $X_1(t, x)$, $X_2(t, x, y)$ *удовлетворяют по* x *условию Липшица для всех* t, y *с константой, независящей от* t *и* y;

2) *существует* $C > 0$ *такое, что* $|X_2(t, y_0, y)| \le C \ \forall t, y$;

* Выполнена при финансовой поддержке Государственного комитета Украины по вопросам науки и технологий.

3) *в некоторой* ρ*-окрестности точки* y_0 *функция* $X_1(t, x)$ *дважды непрерывно дифференцируема по* x, *а* $X_2(t, x, y)$ *непрерывно дифференцируема по* x;

4) *все собственные числа матрицы* $H = (\partial X_0(y_0))/\partial y$ *имеют отличные от нуля вещественные части.*

Тогда для любого процесса $\xi(t)$, *определенного выше, можно указать* ε_0, *что для каждого* ε, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, *уравнение* (1) *имеет периодическое (в узком смысле), периода* θ *решение, периодически связанное с* $\xi(t)$.

Если же собственные числа матрицы H *имеют отрицательные действительные части, то в достаточно малой окрестности точки* y_0 *существует* θ*-периодическое решение системы* (1) $x(t, \varepsilon)$ *такое, что*:

1) *равномерно по* $t \in \mathbb{R}^1$ $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} x(t, \varepsilon) = y_0$ *с вероятностью* 1;

2) $x(t, \varepsilon)$ — *асимптотически устойчивое с вероятностью* 1 *решение с экспоненциальным характером убывания.*

Доказательство. В уравнении (1) сделаем замену

$$x = y + \varepsilon B(t, y). \tag{3}$$

Можно указать $\rho_1 < \rho$ такое, что при $|y - y_0| \le \rho_1$ x будет лежать в ρ-окрестности y_0 при достаточно малых ε.

Имеем

$$\dot{x} = \dot{y} + \varepsilon\frac{\partial B}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial B}{\partial y}\dot{y} = \left[E + \varepsilon\frac{\partial B}{\partial y}\right]\dot{y} = \varepsilon X_0(y) + \varepsilon X_1(t, y + \varepsilon B(t, y)) -$$
$$- \varepsilon X_1(t, y) + \varepsilon^2 X_2(t, y + \varepsilon B(t, y), \xi(t)). \tag{4}$$

Нетрудно заметить, что $E + \varepsilon\,\partial B/\partial y$ имеет обратную при достаточно малых ε, поэтому (4) можно явно разрешить относительно $\dot{y}$:

$$\frac{dy}{dt} = \varepsilon X_0(y) + \varepsilon X_1(t, y + \varepsilon B(t, y)) - \varepsilon X_1(t, y) + \varepsilon^2 R(t, y, \omega), \tag{5}$$

где $R(t, y, \omega)$ — функция, ограниченная с вероятностью 1 вместе со своими частными производными по y в ρ_1-окрестности точки y_0 некоторой неслучайной константой (поскольку X_2 растет не быстрее линейной по x функции).

Переходя в (5) к переменной z по формуле $y = y_0 + z$, в ρ_1-окрестности y_0 получаем

$$\frac{dz}{dt} = \varepsilon\frac{\partial X_0(y_0)}{\partial y}z + \left\{\varepsilon\left[X_0(y_0 + z) - X_0(y_0) - \frac{\partial X_0(y_0)}{\partial y}z\right] + \right.$$
$$\left. + \varepsilon\left[X_1(t, y_0 + z + \varepsilon B(t, y_0 + z)) - X_1(t, y_0 + z)\right]\right\} + \varepsilon^2 R(t, z, \omega). \tag{6}$$

В силу условий теоремы имеем

$$\left\| \frac{\partial X_0(y_0 + z)}{\partial y} - \frac{\partial X_0(y_0)}{\partial y} \right\| \le r(z) \to 0, \quad |z| \to 0.$$

При $z = 0$

$$|X_1(t, y_0 + \varepsilon B(t, y_0)) - X_1(t, y_0)| \le L\varepsilon B(t, y_0) \to 0, \quad \varepsilon \to 0.$$

Для частных производных имеем оценку

$$\left\| \frac{\partial X_1(t, y_0 + z + \varepsilon B(t, y_0 + z))}{\partial z} \left(E + \varepsilon \frac{\partial B(t, y_0 + z)}{\partial z} \right) - \frac{\partial X_1(t, y_0 + z)}{\partial z} \right\| \le$$

$$\le L\varepsilon B(t, y_0 + z) + \varepsilon C_1 \to 0, \quad \varepsilon \to 0.$$

Поэтому частные производные по z от функции в фигурных скобках не превышают $\lambda(\varepsilon, \sigma) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, $\sigma \to 0$ для $|z| \le \sigma < \rho_1$.

Тогда (6) примет вид

$$\frac{dz}{dt} = \varepsilon H z + \varepsilon \Phi(t, z, \omega, \varepsilon). \tag{7}$$

Переходя в (7) к „медленному" времени $\tau = \varepsilon t$ и заменяя снова τ на t, окончательно получаем

$$\frac{dz}{dt} = Hz + Q(t, z, \omega, \varepsilon), \tag{8}$$

где $Q(t, z, \omega, \varepsilon) = \Phi(t/\varepsilon, z, \omega, \varepsilon)$.

Очевидно, $Q(t, z, \omega, \varepsilon)$ имеет следующие свойства:

1) $Q(t, z, \omega, \varepsilon)$ определена в области $t \in \mathbb{R}^1$ при $|z| \le \rho_1$ и достаточно малых ε;

2) $\sup_{t \in \mathbb{R}^1} |Q(t, 0, \omega, \varepsilon)| \le M(\varepsilon)$ с вероятностью 1, где $M(\varepsilon) \to 0$, $\varepsilon \to 0$;

3) $|Q(t, z, \omega, \varepsilon) - Q(t, z', \omega, \varepsilon)| \le \lambda(\varepsilon, \sigma)|z - z'|$ с вероятностью 1.

Введем аналогично [1] функцию Грина $J(t)$ для линейной части (8). Очевидно, что существуют $K > 0$ и $\alpha > 0$ такие, что $\|J(t)\| \le K e^{-\alpha|t|}$.

Зафиксируем некоторое положительное число $d \le \rho_1$ и рассмотрим класс непрерывных с вероятностью 1 случайных процессов $\zeta(t)$, определенных на $\mathbb{R}^1$, со значениями в $\mathbb{R}^n$ и удовлетворяющих с вероятностью 1 неравенству

$$\sup_{t \in \mathbb{R}^1} |\zeta(t)| \le d. \tag{9}$$

Обозначим этот класс процессов через $C(d)$. Будем решать в этом классе интегральное уравнение

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} J(z) Q(t + z, F(t + z), \omega, \varepsilon) dz. \tag{10}$$

Рассмотрим оператор $S_t(F) = \int_{-\infty}^{\infty} J(z) Q(t + z, F(t + z), \omega, \varepsilon) dz$ на классе $C(d)$.

Согласно свойствам Q имеем

$$|Q(t + z, F(t + z), \omega, \varepsilon)| \le |Q(t + z, 0, \omega, \varepsilon)| + |Q(t + z, F(t + z), \omega, \varepsilon) -$$

$$- Q(t + z, 0, \omega, \varepsilon)| \le M(\varepsilon) + \lambda(\varepsilon, d) d$$

с вероятностью 1. Поэтому с учетом свойств функции $J(t)$ получаем, что с вероятностью 1

$$\sup_{t \in \mathbb{R}^1} |S_t(F)| \le \{M(\varepsilon) + \lambda(\varepsilon, d) d\} \int_{-\infty}^{\infty} K e^{-\alpha|z|} dz =$$

$$= \frac{2K}{\alpha} \{M(\varepsilon) + \lambda(\varepsilon, d) d\}. \tag{11}$$

Для двух процессов из класса $C(d)$ находим

$$|S_t(\bar{F}) - S_t(F)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} J(z) \{ Q(t+z,\ \bar{F}(t+z),\ \omega,\ \varepsilon) - \right.$$

$$\left. - Q(t+z,\ F(t+z),\ \omega,\ \varepsilon) \} \, dz \right| \le \lambda(\varepsilon, d) \int_{-\infty}^{\infty} K e^{-\alpha|z|} \times$$

$$\times |\bar{F}(t+z) - F(t+z)| \, dz \le \frac{2K\lambda(\varepsilon, d)}{\alpha} \sup_{t \in \mathbb{R}^1} |\bar{F}(t) - F(t)|.$$

Подберем теперь d как функцию параметра ε так, чтобы $d(\varepsilon) \to 0$, $\varepsilon \to 0$, и чтобы для достаточно малых ε выполнялись неравенства

$$\frac{2K}{\alpha} \{ M(\varepsilon) + \lambda(\varepsilon, d) d \} \le d, \tag{12}$$

$$\frac{4\lambda(\varepsilon, d)}{\alpha} K \le 1. \tag{13}$$

Такой подбор $d = d(\varepsilon)$ возможен, поскольку $M(\varepsilon) \to 0$, $\lambda(\varepsilon, d) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, $d \to 0$. Поэтому с вероятностью 1 получаем

$$\sup_{t \in \mathbb{R}^1} |S_t(F)| \le d(\varepsilon), \tag{14}$$

$$\sup_{t \in \mathbb{R}^1} |S_t(\bar{F}) - S_t(F)| \le \frac{1}{2} \sup_{t \in \mathbb{R}^1} |\bar{F}(t) - F(t)|. \tag{15}$$

Решим уравнение (10) методом последовательных приближений. Пусть

$$F_0 = 0,\ F_1 = S_t(F_0),\ \ldots,\ F_{n+1} = S_t(F_n). \tag{16}$$

Из (14) следует, что все члены последовательности принадлежат классу $C(d)$. А из (15) имеем $\sup_{t \in \mathbb{R}^1} |F_{n+1}(t) - F_n(t)| \le (1/2)^n$, что влечет с вероятностью 1 равномерную по $t \in \mathbb{R}^1$ сходимость ряда $F_0(t) + \sum_{n=0}^{\infty} [F_{n+1}(t) - F_n(t)]$. Его сумма есть с вероятностью 1 равномерным пределом $F_n(t)$, значит, $F_n(t)$ сходится к некоторому случайному процессу $F(t)$, принадлежащему классу $C(d)$. Переходя к пределу в (16), убеждаемся, что $F(t)$ является решением уравнения (10). Единственность этого решения в классе $C(d)$ следует из оценки (15).

Согласно [1], оно будет и решением системы (8). Тогда и система (1) имеет решение $x(t, \varepsilon)$, для которого

$$\sup_{t \in \mathbb{R}^1} |x(t, \varepsilon) - y_0| \le \rho$$

с вероятностью 1, а согласно [4], этого достаточно для существования периодического решения системы (1).

Доказательство второй части теоремы следует из таких рассуждений. Назовем решением типа S любое решение уравнения (8), для которого выполняется следующее условие: если при некотором $t = t_0$ $z(t_0) = z_0$, причем $|z_0| \le \rho_1$, то $|z(t)| \le \rho_2$ $\forall\, t > t_0$, $\rho_1 \le \rho_2 < \rho$. Тогда для любых решений типа S $z(t)$ и $f(t)$, согласно [1], справедлива с вероятностью 1 оценка

$$|f(t)-z(t)| \le K_1 e^{-\alpha(t-t_0)}|f(t_0)-z(t_0)| \quad \forall\, t \ge t_0.$$

Но в случае отрицательных действительных частей всех собственных чисел матрицы H вся ρ_1-окрестность $f(t_0)$ (где $f(t)$ — искомое в теореме решение, а оно принадлежит типу S) состоит из начальных условий решений типа S при всех t_0. Отсюда следует второе утверждение теоремы, поскольку, согласно [4], начальное условие периодического решения принадлежит ρ_1-окрестности $f(t_0)$.

Замечание. Если в системе (1) X не зависит от t, а $\xi(t)$ — стационарный в узком смысле процесс, то условия теоремы обеспечивают существование стационарного и стационарно связанного с $\xi(t)$ решения, которое имеет те же свойства, что и периодическое решение приведенной теоремы.

В качестве иллюстрации полученной теоремы приведем пример исследования гармонического осциллятора, подверженного малым случайным возмущениям и описываемого уравнением

$$\ddot{x} + \mu^2 x = \varepsilon\varphi(\nu t, x, \dot{x}, \varepsilon, \omega) = \varepsilon f(\nu t, x, \dot{x}) + \varepsilon^2 f_1(\nu t, x, \dot{x}, \xi(\nu t)), \quad (17)$$

где f и f_1 — периодические по νt периода 2π функции, а $\xi(\nu t)$ — 2π-периодический по νt случайный процесс. Ограничимся рассмотрением резонансного случая, когда $\mu^2 = (p\nu/q)^2 + \varepsilon\Delta$, где p и q — взаимно простые числа.

Выполняя в (17), согласно [1], замену переменных

$$\begin{aligned} x &= \zeta\cos\frac{p}{q}\nu t + \eta\sin\frac{p}{q}\nu t, \\ \dot{x} &= -\zeta\frac{p}{q}\nu\sin\frac{p}{q}\nu t + \eta\frac{p}{q}\nu\cos\frac{p}{q}\nu t, \end{aligned} \quad (18)$$

получаем уравнения типа (1) в стандартной форме

$$\begin{aligned} \dot{\zeta} &= \varepsilon X_1(t,\zeta,\eta) + \varepsilon^2 X_2(t,\zeta,\eta,z(t,\omega)), \\ \dot{\eta} &= \varepsilon Y_1(t,\zeta,\eta) + \varepsilon^2 Y_2(t,\zeta,\eta,z(t,\omega)), \end{aligned} \quad (19)$$

где X_1 и Y_1 — те же функции, что и в § 7 из [1], а X_2 и Y — функции, имеющие порядок малости ε^2, $z(t,\omega) = \xi(\nu t)$. Поэтому правые части (19) являются периодическими по t с периодом $2\pi q/\nu$.

Усредненные уравнения, соответствующие (19), будут иметь вид

$$\begin{aligned} \dot{\zeta} &= \varepsilon X_0(\zeta,\eta), \\ \dot{\eta} &= \varepsilon Y_0(\zeta,\eta), \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$X_0(\zeta,\eta) = \frac{\nu}{2\pi q}\int_0^{2\pi q/\nu} X_1(t,\zeta,\eta)\,dt, \quad Y_0(\zeta,\eta) = \frac{\nu}{2\pi q}\int_0^{2\pi q/\nu} Y_1(t,\zeta,\eta)\,dt.$$

Предположим, что система

$$\begin{aligned} X_0(\zeta,\nu) &= 0, \\ Y_0(\zeta,\nu) &= 0 \end{aligned}$$

имеет отличное от нулевого решение

$$\zeta = \zeta_0, \quad \eta = \eta_0 \tag{21}$$

и в окрестности эллипса

$$x^2 + \frac{\dot{x}^2}{\left(\frac{p}{q}\nu\right)^2} = a_0^2, \tag{22}$$

где $a_0^2 = \zeta_0^2 + \eta_0^2$, функция φ дважды непрерывно дифференцируема по x, $\dot{x}$, а $f_1(\nu t, x, \dot{x}, y)$ на эллипсе (22) ограничена для каждого t, $y \in \mathbb{R}^1$ некоторой константой. Если потребовать выполнения глобального условия Липшица для функции φ по x и $\dot{x}$ и отрицательности собственных чисел матрицы

$$\begin{pmatrix} X'_{0\zeta}(\zeta_0, \eta_0) & X'_{0\eta}(\zeta_0, \eta_0) \\ Y'_{0\zeta}(\zeta_0, \eta_0) & Y'_{0\eta}(\zeta_0, \eta_0) \end{pmatrix},$$

то на основании приведенной теоремы можно утверждать, что в рассматриваемом случае при достаточно малых ε уравнение (1) имеет периодическое решение с периодом $2\pi q/\nu$, периодически связанное с $\xi(\nu t)$, которое с вероятностью 1 близко к гармоническому $x = a_0 \cos((p\nu t)/q + \varphi_0)$, где $a_0 = \sqrt{\zeta_0^2 + \eta_0^2}$, $\varphi = -\operatorname{arctg}\dfrac{\eta_0}{\zeta_0}$.

1. *Митропольский Ю. А.* Метод усреднения в нелинейной механике. – Киев: Наук. думка, 1971. – 440 с.
2. *Королюк В. С.* Устойчивость автономной динамической системы с быстрыми марковскими переключениями // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, №9. – С. 1176 – 1181.
3. *Царьков Е. Ф.* Случайные возмущения дифференциально-функциональных уравнений. – Рига: Зинатне, 1989. – 421 с.
4. *Хасьминский Р. З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайном возмущении их параметров. – М.: Наука, 1969. – 367 с.

Получено 26.04.93