УДК 517.988, 517.947

Ю. В. Богданский, канд. физ.-мат. наук (Киев. политехн. ин-т)

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА С СУЩЕСТВЕННО БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫМ ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ ОПЕРАТОРОМ

In a special class of domains in an infinite-dimensional Hilbert space, the solvability of the Dirichlet problem for the Poisson equation with an elliptic operator of the form $(Lu)(x) = j(x)(u''(x))$ vanishing on cylindrical functions is proved.

У спеціальному класі областей нескінченновимірного гільбертового простору доведена розв'язність задачі Діріхле для рівняння Пуассона з еліптичним оператором, що має вигляд $(Lu)(x) = j(x)(u''(x))$ та дорівнює нулю на циліндричних функціях.

1. Пусть H — счетномерное вещественное гильбертово пространство; $B_c(H)$ — банахово (в смысле операторной нормы) пространство самосопряженных ограниченных линейных операторов в H.

На пространстве $C^2(H)$ определим линейный эллиптический дифференциальный оператор второго порядка $(Lu)(x) = 2^{-1}j(x)(u''(x))$, где $j(x)$ при каждом $x \in H$ — неотрицательный линейный функционал на $B_c(H)$, обращающийся в 0 на конечномерных операторах (тем самым $Lu = 0$ для любой цилиндрической функции из $C^2(H)$). Примером такого оператора может служить продолженный на все $C^2(H)$ оператор Лапласа – Леви.

В настоящей работе рассматривается первая краевая задача для уравнения Пуассона $Lu = v$ в специальном классе областей пространства H. Для оператора Лапласа – Леви аналогичная задача исследовалась в работах Е. М. Полищука, М. Н. Феллера (ссылки далее по тексту).

Пусть $\mathfrak{A}$ — алгебра дважды непрерывно дифференцируемых (по Фреше) функций на H с ограниченными носителями, удовлетворяющих условиям:

а) для каждой $u \in \mathfrak{A}$ существуют компакт $\mathfrak{N} \subset B_c(H)$ и число $\alpha > 0$ такие, что $u''(x) \in \mathfrak{N} + \Gamma_\alpha$ при каждом $x \in H$ (Γ_α — множество операторов Гильберта – Шмидта из $B_c(H)$, для которых гильберто-шмидтовская норма не превышает α);

б) $u''(\cdot)$ равномерно непрерывна на H.

Будем говорить, что функция $u \in C^3(H)$ принадлежит классу $\mathfrak{A}_1$, если: а$_1$) $u \in \mathfrak{A}$; б$_1$) для любого $h \in H$ функция $(u'(\cdot), h) = v_h(\cdot) \in \mathfrak{A}$, причем существуют компакт $\mathfrak{N} \subset B_c(H)$ и $\alpha > 0$ такие, что $v_h''(x) \in \mathfrak{N} + \Gamma_\alpha$ для всех $h \in \{h \mid \|h\| = 1\}$ и $x \in H$.

Очевидно, $\mathfrak{A}_1$ — подалгебра в $\mathfrak{A}$. При этом для любой функции $q \in C^\infty(\mathbb{R})$ $(q(0) = 0)$: $q \circ u \in \mathfrak{A}(\mathfrak{A}_1)$, если $u \in \mathfrak{A}(\mathfrak{A}_1)$.

Если G — открытое множество в H, то можно аналогично ввести в рассмотрение алгебру функций $\mathfrak{A}(G)$: $\mathfrak{A}(G) \subset C^2(G)$; при этом выполняются условия а) и б) с заменой H на G. Аналогично вводится алгебра $\mathfrak{A}_1(G)$.

Если S — гладкая поверхность в H конечной коразмерности, то можно корректно ввести алгебру функций $\mathfrak{A}(S) \subset C^2(S)$ на поверхности S: выполнение условий а) и б) с заменой H на S при естественном отождествлении гессиана функции на S с оператором из $B_c(H)$.

Легко видеть, что для $\varphi \in \mathfrak{A}$: $\varphi|_S \in \mathfrak{A}(S)$; $\varphi|_G \in \mathfrak{A}(G)$. Будем говорить, что S — поверхность класса $\mathfrak{A}$ ($\mathfrak{A}_1$), если S — поверхность уровня функции $g \in \mathfrak{A}(S_\varepsilon)$ (соответственно $g \in \mathfrak{A}_1(S_\varepsilon)$), S_ε — ε-окрестность S, и при этом

$$\| g'(x)\| \geq \delta > 0 \tag{1}$$

для всех $x \in S$ и некоторого $\delta > 0$.

Лемма 1. *Пусть G — ограниченная область в H, граница которой S является поверхностью класса $\mathfrak{A}(\mathfrak{A}_1)$. Тогда $G = \{x \mid f(x) > 1\}$ и $S = \{x \mid f(x) = 1\}$ для некоторой функции $f \in \mathfrak{A}(\mathfrak{A}_1)$.*

Доказательство. В силу условия (1) и ограниченности $g''(\cdot)$ можно подобрать функцию $q \in C^\infty(\mathbb{R})$ и $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon)$ такие, что

$$(q \circ g)(x) = \begin{cases} 0 & \text{на} \quad \left(S_\varepsilon \setminus S_{\varepsilon_1}\right) \setminus G, \\ 2 & \text{на} \quad \left(S_\varepsilon \setminus S_{\varepsilon_1}\right) \cap G, \\ 1 & \text{на} \quad S, \end{cases}$$

причем $(q \circ g)(x) > 1$ в $S_\varepsilon \cap G$ и $(q \circ g)(x) < 1$ в $S_\varepsilon \setminus \overline{G}$, а затем доопределить ее: $f(x) = 2$ в $G \setminus S_{\varepsilon_1}$ и $f(x) = 0$ в $H \setminus G \setminus S_{\varepsilon_1}$.

Лемма 2. *Пусть S — поверхность класса $\mathfrak{A}_1$ и $\varphi \in \mathfrak{A}(S)$. Тогда существуют $\varepsilon > 0$ и $\psi \in \mathfrak{A}(S_\varepsilon)$ такие, что $\varphi = \psi|_S$.*

Идея доказательства. Вблизи $S = \{x \mid f(x) = 0\}$ рассмотрим векторное поле $z(x) = f'(x) / \|f'(x)\|^2$. Пусть $\Phi(t; x)$ — поток z (он определен в некоторой ε-окрестности S_ε поверхности S). Если $x(t)$ — интегральная кривая z, то $df(x(t))/dt \equiv 1$, а потому $\Phi(-f(x); x) \in S$ для $x \in S_\varepsilon$. Функцию ψ определим формулой: $\psi(x) = \varphi(\Phi(-f(x); x))$. Идейно простые, но технически трудоемкие выкладки доказывают, что $\psi \in \mathfrak{A}(S_\varepsilon)$.

Следствие 1. *Пусть G — ограниченная область с границей S класса $\mathfrak{A}_1$. Тогда любая функция $\varphi \in \mathfrak{A}(S)$ продолжима на все H до функции $h \in \mathfrak{A}$.*

Доказательство. После продолжения φ до $\psi \in \mathfrak{A}(S_\varepsilon)$ ее следует умножить на функцию вида $q \circ f$, обращающуюся в 0 вне $S_{\varepsilon/2}$ и равную 1 на S (здесь $G = \{x \mid f(x) > 1\}$; $S = \{x \mid f(x) = 1\}$). Вне S_ε ее доопределим нулем.

Лемма 3. *Пусть G — ограниченная область в H с границей S класса $\mathfrak{A}_1$; $\varphi \in \mathfrak{A}(G)$. Тогда для любого $\alpha > 0$ существует $h_\alpha \in \mathfrak{A}$ такая, что $h_\alpha|_{G \setminus S_\alpha} = \varphi|_{G \setminus S_\alpha}$ и $|h_\alpha(x) - \varphi(x)| < \alpha$ для $x \in G \cap S_\alpha$.*

Доказательство. Пусть $G = \{x \mid f(x) > 1\}$; $S = \{x \mid f(x) = 1\}$; $f \in \mathfrak{A}_1$. Равномерная непрерывность φ, φ' и φ'' позволяет доопределить их по непрерывности на все $\overline{G}$. При этом на S получаем функцию из алгебры $\mathfrak{A}(S)$, которая в силу следствия 1 продолжается на H до функции $\psi \in \mathfrak{A}$. Функцию h_α определим в G в виде $(q \circ f) \cdot \varphi + ((1 - q) \circ f) \cdot \psi$, $q \in C^\infty(\mathbb{R})$; $0 \leq q(s) \leq 1$ в $\mathbb{R}$; $q(s) = 1$ при $s > 1 + \beta$; $q(s) = 0$ при $s < 1 + \beta/2$, что при достаточно малом $\beta > 0$ гарантирует в силу условия (1) выполнение требуемых условий в области G. При этом вне G полагаем $h_\alpha = \psi$.

Наряду с алгебрами $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}(G)$, $\mathfrak{A}(S)$ будем рассматривать их замыкания в норме равномерной сходимости: X, $X(G)$, $X(S)$. Для этих пространств справедливы аналоги лемм 2, 3 и следствия 1.

2. Пусть $j_1, j_2, \ldots, j_m \in B_c(H)^*$; $j_k > 0$ и существенно бесконечномерны в том смысле, что $j_k(C) = 0$ для любого конечномерного $C \in B_c(H)$, $k = 1, 2, \ldots, m$; α_k — ограниченные функции на H, $\alpha_k(x) > \varepsilon$ при некотором $\varepsilon > 0$ и всех $x \in H$ и на любом шаре $B \subset H$: $\alpha_k|_B \in \mathfrak{A}(B)$, $k = 1, \ldots, m$.

На X определим дифференциальный оператор L формулой

$$(Lu)(x) = \frac{1}{2} j(x)(u''(x)) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m} \alpha_k(x) j_k(u''(x)) \tag{2}$$

с областью определения $\mathfrak{A}$. Он замыкаем, его замыкание $\overline{L}$ — генератор сжимающей (C_0)-полугруппы $U(t)$ [1]. При этом $U(t)uv = U(t)uU(t)v$ для u, $v \in X$ [1, 2].

В дальнейшем будем предполагать, что $j(x) = j$ для всех $x \in H$ (случай постоянных коэффициентов). В этом случае $U(t)\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}$, $t \geq 0$. И хотя утверждения теорем 1 и 2 остаются верными для общего случая операторов вида (2), предложенное упрощение позволит избежать излишних технических подробностей, связанных с анализом гладкости исследуемых функций. Основанием для такого подхода может служить то обстоятельство, что и в случае постоянных коэффициентов результаты являются новыми.

Пусть X_R — множество функций из X с носителями в шаре $\{x \mid \|x\| \leq R\}$. Тогда существует $T \in (0, \infty)$ такое, что для каждой $u \in X_R$: $U(t)u = 0$ при $t \geq T$ [2]. Поэтому $X_R \subset \operatorname{Im} \overline{L}$ ($\mathfrak{A} \cap X_R \subset \operatorname{Im} L$); $\overline{L}$ обратим и при этом $\overline{L}^{-1}u = -\int_0^\infty U(t)u\,dt = -\int_0^T U(t)u\,dt$ для $u \in X_R$.

Пусть G — ограниченная область в H с границей S класса $\mathfrak{A}(\mathfrak{A}_1)$. При этом в силу леммы 1 можно считать $G = \{x \mid f(x) > 1\}$; $f \in \mathfrak{A}(\mathfrak{A}_1)$.

Оператор L_G определим на $\mathfrak{A}(G)$ формулой $(L_G u)(x) = (1/2) j(x)(u''(x))$, $x \in G$, где $j: H \to B_c(H)^*$ определено формулой (2). При этом $D(L_G) = \{u \in \mathfrak{A}(G) \mid L_G u \in X(\overline{G})\}$. В силу принципа максимума [3, 4] L_G замыкаем.

Пусть $\varphi \in X(S)$. Поставим задачу отыскания функции $u \in C(\overline{G})$ такой, что $u|_S = \varphi$; $u|_G \in X(G)$; $\overline{L}_G u = 0$ в G.

Поставленная задача для специального класса областей („фундаментальные области") для оператора Лапласа – Леви (специальный случай оператора (2) с постоянными коэффициентами) исследовалась в работах [5, 6].

В предлагаемой работе задача для оператора с переменными коэффициентами решается в L-выпуклых областях (определение ниже). При этом оказывается, что эти области всегда можно истолковывать как фундаментальные в смысле работ [5, 6].

Определение 1. *Ограниченную область G с границей $S = \{x \mid f(x) = 1\}$ класса $\mathfrak{A}$ назовем L-выпуклой, если $Lf(x) < -\alpha < 0$ для всех $x \in S$ и некоторого $\alpha > 0$ (примеры — в конце работы).*

Заметим, что процедура продолжения f с S_ε на все H, предложенная в лемме 1, может быть выполнена таким образом, что для продолженной функции (ее также обозначим f):

$$Lf(x) \leq 0 \quad \text{для всех } x \in H. \tag{3}$$

Это следует из равномерной непрерывности Lf и равенства $L(q \circ u) = (q' \circ u) \cdot Lu$ для $q \in C^\infty(\mathbb{R})$ [2]. В дальнейшем G — L-выпуклая область, которую, не теряя общности, задаем условием $G = \{x | f(x) > 1\}$ ($S = \{x | f(x) = 1\}$); $f \in \mathfrak{A}$; $Lf \leq 0$ в H; $Lf < -\alpha < 0$ на S.

***Замечание* 1.** Граничное условие φ или понимаем как ограничение на S функции g из $\mathfrak{A}$, или же задаем его лишь на S, но при этом требуем: S класса $\mathfrak{A}_1$ — тогда по лемме 2 ее можно продолжить на все H до функции $g \in \mathfrak{A}$.

Лемма 4. *Пусть* $t \geq 0$, $x \in H$, $\gamma > 0$ *удовлетворяют условию*

$$|[U(t)f](x) - 1| < \gamma.$$

Тогда для любой функции $h \in X$

$$\inf_Y h \leq [U(t)h](x) \leq \sup_Y h,$$

где $Y = \{x \,|\, |f(x) - 1| < \gamma\}$.

Доказательство. Пусть $q \in C^\infty(\mathbb{R})$ такова, что $q(s) = 0$ при $|s-1| \leq \beta = |[U(t)f](x) - 1|$ и $q(s) < -2 \sup_H |h|$ для $|s-1| \geq \gamma$. Тогда

$$[U(t)h](x) = U(t)[q \circ f + h](x) - q([U(t)f](x)) =$$
$$= U(t)[q \circ f + h](x) \leq \sup_H (q \circ f + h) \leq \sup_Y h.$$

Аналогично доказывается второе неравенство.

Определим на $\overline{G}$ функцию $\Theta(\cdot)$ формулой

$$[U(\Theta(x))f](x) = 1. \tag{4}$$

Пусть $u(x, t) = [U(t)f](x)$. Тогда u — непрерывно дифференцируемая функция в $H \times \mathbb{R}$ по совокупности аргументов (x, t) и

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t)\Big|_{t = \Theta(x)} = [U(\Theta(x))Lf](x) < -\alpha < 0$$

на G в силу леммы 4. Так как, кроме того, $\partial u(x, t)/\partial t = [U(t)Lf](x) \leq 0$ всюду в $H \times \mathbb{R}$, то по теореме о неявной функции уравнение (4) определяет в области G единственную функцию Θ, непрерывно дифференцируемую в G;

$$\Theta'(x) = -\frac{u'_x(x, \Theta(x))}{u'_t(x, \Theta(x))}.$$

При этом Θ, Θ' равномерно непрерывны в G и Θ продолжается до непрерывно дифференцируемой функции в $\overline{G}$.

Очевидно, $\Theta(x) > 0$ в G и $\Theta(x) = 0$ на S.

Пусть $Lf \in \mathfrak{A}$. Тогда $\partial u(x, t)/\partial t = [U(t)Lf](x)$, и функция $u \in C^2(H \times \mathbb{R})$. Поэтому $\Theta|_G \in C^2(G)$. Найдем $\Theta''(x)$:

$$0 = \left(u(x, \Theta(x))\right)''_x = u''_{xx}(x, \Theta(x)) + 2u''_{xt}(x, \Theta(x)) \otimes_s \Theta'(x) +$$
$$+ u''_{tt}(x, \Theta(x))\Theta'(x) \otimes \Theta'(x) + u'_t(x, \Theta(x))\Theta''(x) \tag{5}$$

(здесь $\otimes_s$ — симметризованное тензорное произведение). Отсюда

$$\Theta''(x) = -\left([U(\Theta(x))Lf](x)\right)^{-1} [u''_{xx}(x, \Theta(x)) + 2u''_{xt}(x, \Theta(x)) \otimes_s \Theta'(x) +$$
$$+ u''_{tt}(x, \Theta(x))\Theta'(x) \otimes \Theta'(x)].$$

Так как два последних слагаемых в скобках — конечномерные операторы с равномерно ограниченной на G нормой Гильберта – Шмидта, а знаменатель не превышает $-\alpha$ всюду в G, то $\Theta \in \mathfrak{A}(G)$. При этом из формулы (5) следует

$$0 = Lu(x, \Theta(x)) = L_x u(x, t)\Big|_{t=\theta(x)} + \frac{\partial}{\partial t} u(x, \Theta(x)) \cdot L\Theta(x)$$

и, следовательно, $L\Theta(x) \equiv -1$ в G.

Пусть теперь $Lf \notin \mathfrak{A}$. Тогда существует последовательность $g_n \in \mathfrak{A}$ такая, что $g_n \to Lf$ равномерно на H и при этом g_n обращаются в 0 вне общего шара. В этом случае последовательность функций $f_n = L^{-1} g_n \in \mathfrak{A}$ равномерно сходится к f.

Пусть $\Theta_n(x)$ — (единственное) решение уравнения $[U(\Theta_n(x)) f_n](x) = 1$. При этом можно считать $L f_n(x) = g_n(x) < -\alpha/2 < 0$ при $x \in S$. Тогда $\Theta_n(x) \rightarrow \Theta(x)$ равномерно в $\overline{G}$. Поэтому $\Theta \in X(G)$; $\Theta \in D(\overline{L}_G)$ и $\overline{L}_G \Theta(x) \equiv -1$ всюду в G.

Отметим, что в силу принципа максимума для L-гармонических функций отсюда следует независимость Θ от выбора функции f, определяющей S; Θ зависит только от L и G. Определенную формулой (4) функцию Θ будем называть фундаментальной функцией области G.

Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть G — ограниченная L-выпуклая область. Тогда существует единственная фундаментальная функция Θ области G. При этом $\Theta(x) > 0$ в G; $\Theta(x) = 0$ на S; Θ дифференцируема в G; Θ, Θ' равномерно непрерывны в G; $\Theta \in X(G)$ и $\overline{L}_G \Theta(x) \equiv -1$ всюду в G.*

Пусть $g \in \mathfrak{A}$; $Lg \in \mathfrak{A}$; f, $Lf \in \mathfrak{A}$. Рассмотрим в $\overline{G}$ функцию

$$W(x) = [U(\Theta(x))g](x). \tag{6}$$

Если $v(x, t) = [U(t)g](x)$, то $v \in C^2(H \times \mathbb{R})$; $W|_G \in \mathfrak{A}(G)$ (проверка тривиальна) и $LW(x) = (L_x v)(x, \Theta(x)) + v_t'(x, \Theta(x)) L\Theta(x) = 0$ при всех $x \in G$.

Откажемся от условия $Lf \in \mathfrak{A}$. Процедура, предложенная выше, показывает, что в этом случае $W|_G \in C^1(G) \cap X(G)$; $W|_G \in D(\overline{L}_G)$ и $\overline{L}_G(W|_G) = 0$.

Пусть теперь $g \in \mathfrak{A}$ произвольная. Тогда $Lg \in X_R$ при некотором $R > 0$. Если $h_n \in \mathfrak{A}$; $h_n \to Lg$ и h_n обращаются в 0 вне общего шара, то $L^{-1} h_n = g_n \in \mathfrak{A}$ и $g_n \to g$ (сходимость всюду равномерна на H). Поэтому

$$[U(\Theta(\cdot))g_n](\cdot) \to W(\cdot); \quad W|_G \in X(G) \quad \text{и} \quad \overline{L}_G(W|_G) = 0.$$

Предельным переходом обосновывается справедливость последнего равенства для $g \in X$. Поскольку $W(x) = g(x)$ на S, доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть G — ограниченная L-выпуклая область. Тогда для любой функции $\varphi \in X(S)$ (точнее: или $\varphi = g|_S$, где $g \in X$, или $\varphi \in X(S)$, если S класса $\mathfrak{A}_1$) существует и притом единственная равномерно непрерывная на $\overline{G}$ функция W такая, что $W|_G \in X(G)$; $\overline{L}_G(W|_G) = 0$ и $W|_S = \varphi$. Она задается формулой* (6).

Замечание 2. Единственность решения гарантируется принципом максимума для L–гармонических функций, доказанным в работе [3] (см. также [4]).

3. Задача Дирихле для уравнения Пуассона в области G: $\overline{L}_G(u|_G) = v$, $v \in X(G)$; $u|_S = \varphi$, $\varphi \in X(S)$, теперь может быть решена по классической схеме:

следует решить уравнение $\overline{L}_G u_1 = v$ в области G и, продолжив u_1 на S (при этом $u_1|_S$ окажется в алгебре $X(S)$), решить задачу для уравнения Лапласа с граничным условием $\varphi - u_1|_S$. Тогда $u = u_1 + u_2$ (u_2 — решение последней задачи) — искомая функция. Если $v = w|_G$, где $w \in \mathfrak{A}$, то $u_1 = (L^{-1}w)|_G$. Если $v = w|_G$, где $w \in X$, то, не теряя общности, можно считать, что w имеет ограниченный носитель. Тогда $u_1 = (L^{-1}w)|_G$.

В том случае, когда v — произвольная функция из $\mathfrak{A}(G)$, но S класса $\mathfrak{A}_1$, в силу леммы 3 функцию v можно представить в виде $v = w|_G$, где $w \in \in X$ и имеет ограниченный носитель. В том же виде представима и любая функция $v \in X(G)$. Тогда $u_1 = (\overline{L}^{-1}w)|_G$. Попутно мы доказали, что $R(\overline{L}_G) = = X(G)$, если S — поверхность класса $\mathfrak{A}_1$.

Приведем примеры L–выпуклых областей.

1. Область, ограниченная эллипсоидом: $G = \{x|(Cx,x)<1\}$, $C \in B_c(H)$; $0 < \delta I < C$.

2. $G = \{x|(C_1x,x)^2 + (C_2x,x) < 1\}$, C_1, $C_2 \in B_c(H)$; $C_1 \geq 0$; $C_2 > \delta I > 0$, — обобщение предыдущего примера. Функцию f можно взять равной $f(x) = = q((C_1x,x)^2 + (C_2x,x))$, где $q \in C^\infty(\mathbb{R})$; $q(s) > 1$ при $s < 1$; $q(s) < 1$ при $s > 1$; $q'(1) < 0$. Тогда $f \in \mathfrak{A}$ (даже $\mathfrak{A}_1$) и $G = \{x|f(x) > 1\}$. Для $x \in S$

$$Lf(x) = q'((C_1x,x)^2 + (C_2x,x))[2(C_1x,x)\cdot\frac{1}{2}j(x)(C_1) + \\ + \frac{1}{2}j(x)(C_2)] < q'(1)\cdot\frac{1}{2}\delta a;$$

$$\|f'(x)\| = \|4(C_1x,x)C_1x + 2C_2x\| \geq 2\,\frac{(C_2x,x) + 2(C_1x,x)^2}{\|x\|} > 2\sqrt{\delta}.$$

Замечание 3. Условие ограниченности носителей функций класса $\mathfrak{A}$ являлось технически упрощающим предположением в работах [1, 7]. Результаты этих работ остаются в силе, если заменить класс $\mathfrak{A}$ алгеброй $\tilde{\mathfrak{A}}$ функций u, ограниченных в H, таких, что на любом шаре $B_R = \{x|\|x\| < R\}$: $u|_{B_R} \in \mathfrak{A}(B_R)$. Это позволяет решать задачу Дирихле для некоторого класса неограниченных областей, например, для области $\{x|\|Px\| > \|(I-P)x\|^2\}$, ограниченной параболическим цилиндром (P — конечномерный ортопроектор).

1. *Богданский Ю. В.* Задача Коши для существенно бесконечномерного параболического уравнения с переменными коэффициентами // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 6. – С. 663–670.
2. *Богданский Ю. В* Задача Коши для параболических уравнений с существенно бесконечномерными эллиптическими операторами // Там же. – 1977. – **29**, № 6. – С. 781–784.
3. *Богданский Ю. В.* Параболические уравнения с существенно бесконечномерными эллиптическими операторами. – Киев, 1977. – 50 с. – Деп. в УкрНИИНТИ, № 4Б269-77Деп.
4. *Bogdansky Yu. V., Dalecky Yu. L.* Cauchy problem for the simplest parabolic equation with essentially infinite-dimensional elliptic operator // (Suppl. to chapters IV, V): Dalecky Yu. L., Fomin S. V. Measures and differential equations in infinite-dimensional space.– Kluwer Acad. Publ., 1991. – P. 309–322.
5. *Полищук Е. М.* Об уравнении типа Лапласа и Пуассона в функциональном пространстве // Мат. сб. – 1967. – **72**, № 2. – С. 261–292.
6. *Феллер М. Н.* Об уравнении Лапласа в пространстве $L_2(C)$ // Докл. АН УССР. – 1966. – № 4. – С. 426 – 429.
7. *Богданский Ю. В.* Задача Коши для уравнения теплопроводности с нерегулярным эллиптическим оператором // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 5. – С. 584–590.

Получено 05.06.92