УДК 517.5

С. Б. Вакарчук, канд. физ.–мат. наук
(Ин-т геотехн. механики НАН Украины, Днепропетровск)

ТОЧНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ СРЕДНИХ N-ПОПЕРЕЧНИКОВ КЛАССОВ АНАЛИТИЧЕСКИХ В ВЕРХНЕЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ ХАРДИ

In the Hardy space $H_2(\mathbb{R}^2_+)$, which consists of functions analytic in the upper half-plane such that

$$\sup\left\{ \int_{\mathbb{R}} |f(x+iy)|^2 dx:\ 0 < y < \infty \right\} < \infty,$$

mean N-diameters are determined and their exact values are found for a number of classes of functions.

У просторі Харді $H_2(\mathbb{R}^2_+)$, який складається з аналітичних у верхній півплощині функцій, для котрих

$$\sup\left\{ \int_{\mathbb{R}} |f(x+iy)|^2 dx:\ 0 < y < \infty \right\} < \infty,$$

визначені деякі середні N-поперечники та знайдені їх точні значення для ряду функціональних класів.

I. В случае приближения функций действительного переменного в пространстве $L_p(\mathbb{R})$, $1 \le p \le \infty$, где $\mathbb{R} = \{x:\ -\infty < x < \infty\}$, основными аппроксимативными множествами являются бесконечномерные подпространства целых функций конечной степени и подпространства сплайнов. Используя некоторые результаты К. Шеннона, В. М. Тихомирова, Динь-Зунга (см., например, [1]), Г. Г. Магарил-Ильяев [2] ввел для широкого класса бесконечномерных пространств в $L_p(\mathbb{R})$ понятие средней размерности и определил соответствующие аналоги колмогоровского, линейного и бернштейновского поперечников. В этих терминах получили естественное толкование точные результаты, связанные с приближением целыми функциями и сплайнами, поскольку они оказались экстремальными подпространствами. Касаясь других известных подходов к определению поперечников, основанных на использовании бесконечномерных подпространств, отметим работы Ф. Г. Насибова [3] и В. Е. Майорова [4].

Для аналитических функций комплексного переменного спектр задач, связанных с приближением в бесконечных областях (полуплоскость, полоса, угол и т. д.) намного шире, чем в $L_p(\mathbb{R})$, и их решение связано с определенными трудностями. В данном направлении в первую очередь следует отметить работы С. Н. Бернштейна, Н. И. Ахиезера, И. И. Ибрагимова, Ф. Г. Насибова и других авторов [3] и подчеркнуть, что и здесь аппаратом приближения служат подпространства целых функций конечной степени.

Таким образом, и в комплексной плоскости назрела проблема использования идеи средней размерности к приближающим бесконечномерным подмножествам для определения новых аппроксимативных характеристик функциональных классов, т. е. чтобы в упомянутой системе новых понятий подпространства целых функций заняли надлежащее им место.

II. Пусть $f(z)$ — голоморфная функция, заданная в верхней полуплоскости $\mathbb{R}^2_+ = \{z = x + iy:\ y > 0\}$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$, и

$$\| f_y(x) \|_2 = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x+iy)|^2 dx \right)^{1/2},\ \ 0 < y < \infty.$$

ISSN 0041-6053. Укр. мат. журн., 1994, т. 46, № 7

Если $\sup\left\{\|f_y(x)\|_2 \colon 0 < y < \infty\right\} = \|f\|_{H_2} < \infty$, то говорят, что $f(z)$ принадлежит пространству Харди $H_2(\mathbb{R}^2_+)$. Известно [5], что если $f(z) \in H_2(\mathbb{R}^2_+)$, то для почти всех $x \in \mathbb{R}$ существует $\lim\left\{f(x+iy)\colon y \to 0+\right\} = f(x)$ и $f(x) \in L_2(\mathbb{R})$, причем $\|f(x)\|_2 = \|f\|_{H_2}$. Данное равенство устанавливает изометрию между $H_2(\mathbb{R}^2_+)$ и замкнутым подпространством пространства $L_2(\mathbb{R})$. Поэтому в некоторых случаях удобно отождествлять множество всех функций $f(z) \in H_2(\mathbb{R}^2_+)$ с множеством их граничных значений $f(x) \in \mathcal{H}_2 \subset L_2(\mathbb{R})$.

Условимся одной и той же буквой обозначать множество, принадлежащее $H_2(\mathbb{R}^2_+)$ и соответствующее ему на $\mathbb{R}$ множество угловых граничных значений. Отличие будет в том, что во втором случае используем рукописный шрифт. Под $\mathcal{P}_T$, $T > 0$, подразумеваем сужение множества $\mathcal{P} \subset \mathcal{H}_2$ на $[-T, T]$.

Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — нормированное пространство. Через BX обозначим единичный шар в X; $\operatorname{Lin}(X)$ — совокупность всех линейных подпространств в X; $\operatorname{Lin}_n(X) = \{\mathfrak{N} \subset \operatorname{Lin}(X)\colon \dim\mathfrak{N} \le n\}$, где $n \in \mathbb{Z}_+$. Используя [2], введем необходимые далее понятия и определения для случая $X = H_2(\mathbb{R}^2_+)$. Для множеств $K, A \subset L_2([-T, T])$ запишем

$$d(K, A, L_2([-T,T])) \overset{\mathrm{df}}{=} \sup\left\{\inf\{\|f-\varphi\|_{L_2([-T,T])}\colon \varphi \in A\}\colon f \in K\right\}.$$

Пусть $\operatorname{Lin}_c(H_2(\mathbb{R}^2_+))$ обозначает совокупность таких подпространств $L \in \operatorname{Lin}(H_2(\mathbb{R}^2_+))$, что множество $(\mathcal{L} \cap B\mathcal{H}_2)_T$ предкомпактно в $L_2([-T,T])$ для любого $T > 0$. Если $L \in \operatorname{Lin}_c(H_2(\mathbb{R}^2_+))$, $T > 0$ и $\varepsilon > 0$, то существуют такие $n \in \mathbb{Z}_+$ и $M \in \operatorname{Lin}_n(L_2([-T,T]))$, что $d((\mathcal{L} \cap B\mathcal{H}_2)_T, M, L_2([-T,T])) < \varepsilon$. Запишем функцию

$$\mathcal{D}_\varepsilon\left(T, \mathcal{L}, L_2(\mathbb{R})\right) \overset{\mathrm{df}}{=} \min\Big\{n \in \mathbb{Z}_+\colon$$

$$\exists\, M \in \operatorname{Lin}_n(L_2([-T,T])),\ d\left((\mathcal{L} \cap B\mathcal{H}_2)_T, M, L_2([-T,T])\right) < \varepsilon\Big\},$$

которая не убывает по T и не возрастает по ε.

Используя подход [2], для $L \in \operatorname{Lin}_c(H_2(\mathbb{R}^2_+))$ величину

$$\overline{\dim}\,(\mathcal{L}, L_2(\mathbb{R})) = \lim\left\{\liminf\{\mathcal{D}_\varepsilon(T, \mathcal{L}, L_2(\mathbb{R}))/(2T)\colon T \to \infty\}\colon \varepsilon \to 0\right\}$$

назовем средней размерностью $\mathcal{L}$ в $L_2(\mathbb{R})$. Пусть $\mathfrak{M}$ есть центрально-симметричное подмножество в $H_2(\mathbb{R}^2_+)$ и число $N > 0$. Величины

$$\overline{d}_N(\mathfrak{M}, H_2(\mathbb{R}^2_+)) = \inf\Big\{\sup\left\{\inf\{\|f(x)-\varphi(x)\|_2\colon \varphi \in L\}\colon f \in \mathfrak{M}\right\}\colon$$

$$L \in \operatorname{Lin}_c(H_2(\mathbb{R}^2_+)),\ \overline{\dim}\,(\mathcal{L}, L_2(\mathbb{R})) \le N\Big\};$$

$$\overline{\delta}_N(\mathfrak{M}, H_2(\mathbb{R}^2_+)) = \inf\Big\{\inf\Big\{\sup\{\|f(x)-\Lambda f(x)\|_2\colon f \in \mathfrak{M}\}\colon$$

$$\Lambda(H_2(\mathbb{R}^2_+)) \subset L\Big\}\colon$$

$$L \in \mathrm{Lin}_c(H_2(\mathbb{R}^2_+)),\ \overline{\dim}\,(\mathcal{L}, L_2(\mathbb{R})) \le N \Big\},$$

где Λ — линейный непрерывный оператор, переводящий $H_2(\mathbb{R}^2_+)$ в подпространство $L \in \mathrm{Lin}_c H_2(\mathbb{R}^2_+)$, средняя размерность множества угловых граничных значений $\mathcal{L}$ которого в $L_2(\mathbb{R})$ не превышает N;

$$\overline{b}_N(\mathfrak{M}, H_2(\mathbb{R}^2_+)) = \sup\Big\{ \sup\Big\{ \varepsilon > 0:\ \mathcal{L} \cap \varepsilon B H_2(\mathbb{R}^2_+) \subset \mathfrak{M} \Big\}:$$

$$L \in \mathrm{Lin}_c(H_2(\mathbb{R}^2_+)),\ \overline{\dim}\,(\mathcal{L}, L_2(\mathbb{R})) > N,$$

$$\overline{d}_N(L \cap BH_2(\mathbb{R}^2_+); H_2(\mathbb{R}^2_+)) = 1 \Big\}$$

назовем соответственно средним N-поперечником по Колмогорову, средним линейным N-поперечником по Бернштейну множества $\mathfrak{M}$ в $H_2(\mathbb{R}^2_+)$.

Пусть $B_{\sigma,2}$, $\sigma > 0$, есть сужение на $\mathbb{R}$ пространства целых функций экспоненциального типа σ, принадлежащих $L_2(\mathbb{R})$. Через $\tilde{\mathcal{B}}_{\sigma,2}$ обозначим подпространство целых функций $f(x) \in L_2(\mathbb{R})$, носитель преобразования Фурье которых $\operatorname{supp} \hat{f} = \{x \in \mathbb{R}:\ \hat{f}(x) \ne 0\} \subset [0, \sigma]$. Очевидно, $\tilde{\mathcal{B}}_{\sigma,2} \subset B_{\sigma,2}$. Подпространство целых функций $f(z)$, сужение которых на $\mathbb{R}$ есть $\tilde{\mathcal{B}}_{\sigma,2}$, обозначим через $\tilde{\mathbb{B}}_{\sigma,2}$. Используя определение пространства Харди $H_2(\mathbb{R}^2_+)$ и равенство Парсеваля, нетрудно показать, что $\tilde{\mathbb{B}}_{\sigma,2} \subset H_2(\mathbb{R}^2_+)$. На основании [1, с. 785] имеем $\overline{\dim}\,(\tilde{\mathcal{B}}_{\sigma,2}; L_2(\mathbb{R})) = \sigma/(2\pi)$.

Следующий результат можно рассматривать как своеобразный аналог теоремы В. М. Тихомирова о поперечнике шара для средних N-поперечников классов целых функций.

Лемма 1. *Если $N > 0$ и $\sigma > 2\pi N$, то*

$$\overline{d}_N(\tilde{\mathbb{B}}_{\sigma,2} \cap BH_2(\mathbb{R}^2_+); H_2(\mathbb{R}^2_+)) = 1.$$

Доказательство. Оценка сверху

$$\overline{d}_N(\tilde{\mathbb{B}}_{\sigma,2} \cap BH_2(\mathbb{R}^2_+); H_2(\mathbb{R}^2_+)) \le 1$$

следует из определения величины $\overline{d}_N$.

Воспользовавшись данным в [2] определением в $L_p(\mathbb{R})$ среднего N-поперечника по Колмогорову, запишем:

$$\overline{d}_N(\tilde{\mathbb{B}}_{\sigma,2} \cap BH_2(\mathbb{R}^2_+); H_2(\mathbb{R}^2_+)) =$$

$$= \overline{d}_N(\tilde{\mathcal{B}}_{\sigma,2} \cap B\mathcal{H}_2; \mathcal{H}_2) \ge \overline{d}_N(\tilde{\mathcal{B}}_{\sigma,2} \cap BL_2(\mathbb{R}); L_2(\mathbb{R})).$$

Пусть $F(\mathfrak{N})$ есть множество, состоящее из преобразований Фурье $\hat{\varphi}$ всех элементов $\varphi \in \mathfrak{N} \subset L_2(\mathbb{R})$; $S \subset \mathbb{R}$ — произвольное измеримое по Жордану множество и $\mathcal{N}_2(S)$ — линейное пространство целых функций $\psi(t) \in L_2(\mathbb{R})$, носитель преобразования Фурье которых $\operatorname{supp}\hat{\psi} \subset S$. Из [1] следует $\overline{\dim}\,(\mathcal{N}_2(S); L_2(\mathbb{R})) = \operatorname{mes}(S)/(2\pi)$.

В силу равенства Парсеваля

$$\overline{d}{}_N^2(\hat{\mathcal{B}}_{\sigma,2} \cap BL_2(\mathbb{R}); L_2(\mathbb{R})) = \inf\Big\{ \sup\Big\{ \inf\Big\{ \|\hat{f} - \hat{g}\|^2_{L_2[0,\sigma]} +$$

$$+ \int\limits_{|t|>\sigma} |\hat{g}(t)|^2 dt: \hat{g} \in F(M) \Big\}: \hat{f} \in BL_2([0,\sigma]) \Big\}:$$

$$M \in \mathrm{Lin}_c(L_2(\mathbb{R})), \ \overline{\dim}\,(M, L_2(\mathbb{R})) \le N \Big\}.$$

Отсюда следует, что можно ограничиться только теми подпространствами $M \in \mathrm{Lin}_c(L_2(\mathbb{R}))$ средней размерности $\le N$, у которых $\forall g \in M$ $\mathrm{supp}\,\hat{g} \subset \subset [0,\sigma]$, т. е. подпространствами $\mathcal{N}_2(S)$, где $\mathrm{mes}\,(S) \le 2\pi N$ и множество $S \subset [0,\sigma]$. Тогда

$$\overline{d}_N(\tilde{\mathcal{B}}_{\sigma,2} \cap BL_2(\mathbb{R}); L_2(\mathbb{R})) = \inf\Big\{ \sup\Big\{ \inf\{\|f-g\|_2: g \in \mathcal{N}_2(S)\}:$$

$$f \in \tilde{\mathcal{B}}_{\sigma,2} \cap BL_2(\mathbb{R}) \Big\}: \mathrm{mes}\,(S) \le 2\pi N, \ S \subset [0,\sigma] \Big\} =$$

$$= \sup\Big\{ \inf\{\|f-g\|_2: g \in \mathcal{N}_2(S^*)\}: f \in \tilde{\mathcal{B}}_{\sigma,2} \cap BL_2(\mathbb{R}) \Big\}.$$

Пусть

$$\varphi(t) = \begin{cases} \left(\mathrm{mes}\,\left\{[0,\sigma] \setminus S^*\right\}\right)^{-1/2}, & \text{если } t \in [0,\sigma] \setminus S^*; \\ 0, & \text{если } t \,\overline{\in}\, [0,\sigma] \setminus S^*. \end{cases}$$

Тогда функция

$$f_0(x) = (2\pi)^{-1} \int\limits_0^{\sigma} \varphi(t) \exp(ixt) dt \in (\tilde{\mathcal{B}}_{\sigma,2} \cap BL_2(\mathbb{R})).$$

Поскольку $\forall f \in \tilde{\mathcal{B}}_{\sigma,2}$ в силу равенства Парсеваля

$$\inf\left\{\|f-g\|_2^2: g \in \mathcal{N}_2(S^*)\right\} =$$

$$= \int\limits_{[0,\sigma]\setminus S^*} |\hat{f}(t)|^2 dt + \inf\Big\{ \int\limits_{S^*} |\hat{f}(t) - \hat{g}(t)|^2 dt: \hat{g} \in F(N_2(S^*)) \Big\} =$$

$$= \int\limits_{[0,\sigma]\setminus S^*} |\hat{f}(t)|^2 dt,$$

то, очевидно,

$$\overline{d}_N(\tilde{\mathcal{B}}_{\sigma,2} \cap BL_2(\mathbb{R}); L_2(\mathbb{R})) \ge$$

$$\ge \inf\{\|f_0 - g\|_2: g \in \mathcal{N}_2(S^*)\} = \|\varphi\|_2 = 1.$$

Сравнив оценки сверху и снизу, получаем $\overline{d}_N(\tilde{\mathbb{B}}_{\sigma,2} \cap BH_2(\mathbb{R}^2_+); H_2(\mathbb{R}^2_+)) = 1$, чем и завершаем доказательство.

Используя определение средних N-поперечников и известные рассуждения [6, 7] для центрально-симметричных множеств $\mathfrak{M} \subset H_2(\mathbb{R}^2_+)$, получаем

$$\overline{b}_N(\mathfrak{M}, H_2(\mathbb{R}^2_+)) \le \overline{d}_N(\mathfrak{M}, H_2(\mathbb{R}^2_+)) = \overline{\delta}_N(\mathfrak{M}, H_2(\mathbb{R}^2_+)). \qquad (1)$$

III. В работе [8] в пространстве Харди $H_2(|z|<1)$ получены точные значения поперечников некоторых классов аналитических в единичном круге функций. Эти результаты явились своеобразным продолжением исследований Л. В. Тайкова и Н. Айнуллоева и позднее [9] были перенесены на классы функций, определенных с помощью модулей гладкости.

Исходя из этого, рассмотрим в $H_2(\mathbb{R}^2_+)$ вопросы наилучшего приближения подпространствами $\tilde{\mathbb{B}}_{\sigma,2}$ ряда классов аналитических в $\mathbb{R}^2_+$ функций и вычислим точные значения введенных выше средних N-поперечников. Специфика данной тематики состоит в том, что для корректного определения функциональных множеств в $H_2(\mathbb{R}^2_+)$ требуется решение ряда задач контурно-телесного типа. Отметим, что большой вклад в изучение вопросов связи телесных и контурных свойств аналитических функций внес П. М. Тамразов [10].

Далее под $f^{(j)}_{\mathbb{R}}(x)$ $(x \in \mathbb{R})$ понимаем j-тую производную, взятую по границе $\mathbb{R}$ области $\mathbb{R}^2_+$ от угловых граничных значений $f(x)$ функции $f(z) \in H_2(\mathbb{R}^2_+)$. Нам потребуется условие аналитической продолжимости на $\mathbb{R}^2_+$ комплекснозначной функции $f(x)$, заданной на $\mathbb{R}$.

Утверждение 1 [11, с. 23]. *Для того чтобы заданная на $\mathbb{R}$ функция $f(x) \in L_2(\mathbb{R})$ была граничным значением аналитической в $\mathbb{R}^2_+$ функции $f(z)$ такой, что*

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x+iy)|^2\,dx < C,$$

где C не зависит от y, необходимо и достаточно, чтобы ее преобразование Фурье $\hat{f}(x)$ обращалось в нуль на отрицательной полуоси $-\infty < x \le 0$.

Наилучшее приближение функции $f(z) \in H_2(\mathbb{R}^2_+)$ элементами множества $\tilde{\mathbb{B}}_{\sigma,2}$ обозначим $\mathcal{A}_\sigma(f)_2 \overset{\text{df}}{=} \inf\{\|f-g\|_2\colon g \in \tilde{\mathbb{B}}_{\sigma,2}\}$. Если нужно подчеркнуть, что рассматривается наилучшее приближение комплекснозначной функции $f(x) \in L_2(\mathbb{R})$ элементами множества $B_{\sigma,2}$ в пространстве $L_2(\mathbb{R})$, то пишем $\mathbb{A}_\sigma(f)_2 \overset{\text{df}}{=} \inf\{\|f-g\|_2\colon g \in B_{\sigma,2}\}$.

Лемма 2. *Пусть функция $f(z) \in H_2(\mathbb{R}^2_+)$, ее граничные значения $f(x)$ имеют на $\mathbb{R}$ локально абсолютно непрерывную производную $f^{(r-1)}_{\mathbb{R}}(x)$ и r-тую производную $f^{(r)}_{\mathbb{R}}(x) \in L_2(\mathbb{R})$. Тогда $f^{(j)}(z) \in H_2(\mathbb{R}^2_+)$ $(j = \overline{1,r})$, и при $j = \overline{1,r-1}$ для всех $x \in \mathbb{R}$, а при $j = r$ почти для всех $x \in \mathbb{R}$ (где $f^{(r)}_{\mathbb{R}}(x)$ существует) пределы по некасательным направлениям равны*

$$\lim_{z \to x\ (\operatorname{Im} z > 0)} f^{(j)}(z) = f^{(j)}_{\mathbb{R}}(x). \tag{2}$$

Обратно: если $f(z) \in H_2(\mathbb{R}^2_+)$ имеет производную $f^{(r)}(z)$, которая принадлежит пространству $H_2(\mathbb{R}^2_+)$, то все промежуточные производные $f^{(j)}(z)$, $j = \overline{1,r-1}$, являются элементами $H_2(\mathbb{R}^2_+)$, а граничные значения $f(x)$ функции $f(z)$ имеют локально абсолютно непрерывную производную $f^{(r-1)}_{\mathbb{R}}(x)$ и $f^{(r)}_{\mathbb{R}}(x) \in L_2(\mathbb{R})$. При этом справедливы все соотношения (2).

Доказательство. Поскольку в случае $r = 1$ результат леммы 2 следует из утверждения 1, то полагаем $r > 1$ и вначале показываем справедливость ее первой части.

Пусть комплекснозначная функция $\varphi(t) \in L_2([0,\sigma])$. Используя лемму 1 и равенство Парсеваля, записываем

$$\mathcal{A}^2_\sigma(f)_2 = \inf\left\{ \left\| f(x) - \left(\sqrt{2\pi}\right)^{-1} \int_0^\sigma \varphi(t) e^{ixt}\,dt \right\|_2^2\colon \varphi \in L_2([0,\sigma]) \right\} =$$

$$= \int\limits_{t>\sigma} |\hat{f}(t)|^2 dt + \inf\left\{ \int\limits_0^{\sigma} |\hat{f}(t) - \varphi(t)|^2 dt : \varphi \in L_2([0,\sigma]) \right\}.$$

Отсюда следует, что целая функция

$$F_\sigma(f,z) = \left(\sqrt{2\pi}\right)^{-1} \int\limits_0^{\sigma} \hat{f}(t)\exp(izt)dt \in \tilde{\mathbb{B}}_{\sigma,2}$$

осуществляет наилучшее приближение $f(z)$ в $H_2(\mathbb{R}^2_+)$ и

$$\mathcal{A}_\sigma(f)_2 = \left\{ \int\limits_{t>\sigma} |\hat{f}(t)|^2 dt \right\}^{1/2}. \tag{3}$$

Из утверждения 1 и проведенных рассуждений для $f(z) \in H_2(\mathbb{R}^2_+)$ имеем $\mathcal{A}_\sigma(f)_2 = \mathbb{A}_\sigma(f)_2$. Поскольку для граничных значений $f(x)$ функции $f(z) \in H_2(\mathbb{R}^2_+)$ имеем

$$f^{(r)}_{\mathbb{R}}(x) = \left(\sqrt{2\pi}\right)^{-1} \int\limits_0^{\infty} (it)^r \hat{f}(t)\exp(ixt)dt,$$

то в силу равенства Парсеваля и (3) имеем

$$\mathcal{A}_\sigma(f)_2 \le \frac{\mathbb{A}_\sigma\left(f^{(r)}_{\mathbb{R}}\right)}{\sigma^r}. \tag{4}$$

Далее понадобится следующее утверждение.

Утверждение 2. *Пусть* $1 \le q \le q' \le \infty$ *и комплекснозначная функция* $f(x) \in L_q(\mathbb{R})$, *т. е.*

$$\|f\|_{L_q} = \left\{ \int\limits_{\mathbb{R}} |f(x)|^q dx \right\}^{1/q} < \infty.$$

Если наилучшее приближение $\mathbb{A}_\sigma(f)_q \overset{\text{df}}{=} \inf\left\{ \|f-\varphi\|_{L_q(R)} : \varphi \in B_{\sigma,q} \right\}$, *где* $B_{\sigma,q}$ *есть сужение на* $\mathbb{R}$ *пространства целых функций экспоненциального типа* σ, *принадлежащих* $L_q(\mathbb{R})$, *имеет свойство: при некотором целом* $\rho > 0$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{\rho-1+1/q-1/q'} \mathbb{A}_\nu(f)_q < \infty,$$

то $f(x)$ *почти всюду на* $\mathbb{R}$ *совпадает с функцией, имеющей локально абсолютно непрерывную производную* $(\rho-1)$*-го порядка и производную порядка* ρ, *принадлежащую* $L_{q'}(\mathbb{R})$.

Доказательство данного утверждения для комплекснозначных функций $f(x) \in L_q(\mathbb{R})$ полностью совпадает с доказательством теоремы 6.4.1 из [12] и поэтому не приводится.

Покажем принадлежность $f^{(1)}(z)$ пространству $H_2(\mathbb{R}^2_+)$. Учитывая неравенство (4) и то, что $f(x) \in L_2(\mathbb{R})$, имеем

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \mathbb{A}_\nu(f)_2 \le \|f^{(r)}_{\mathbb{R}}\|_2 / (r-1) < \infty.$$

Полагая в утверждении 2 $q = q' = 2$; $\rho = 1$ и используя последнее неравенство и определение абсолютной непрерывности, получаем $f_{\mathbb{R}}^{(1)}(x) \in L_2(\mathbb{R})$. Для $f(z) \in H_2(\mathbb{R}_+^2)$ и ее граничных значений $f(x)$ имеем

$$f(z) = \left(\sqrt{2\pi}\right)^{-1} \int_0^\infty \hat{f}(t) \exp(itz)\, dt,$$

$$f_{\mathbb{R}}^{(1)}(x) = \left(\sqrt{2\pi}\right)^{-1} \int_0^\infty it \hat{f}(t) \exp(itx) dt.$$

Из утверждения 1 следует, что $f_{\mathbb{R}}^{(1)}(x)$ является граничным значением аналитической в верхней полуплоскости функции

$$f^{(1)}(z) = \left(\sqrt{2\pi}\right)^{-1} \int_0^\infty it\, \hat{f}(t) e^{itz}\, dt,$$

которая принадлежит $H_2(\mathbb{R}_+^2)$ и удовлетворяет соотношению (2), где $j = 1$.

Используя последовательно все изложенные выше рассуждения для каждой из функций $f^{(1)}(z), \ldots, f^{(r-2)}(z)$, получаем, что $f^{(\nu)}(z) \in H_2(\mathbb{R}_+^2)$, $\nu = \overline{2, r-1}$, и для любого $x \in \mathbb{R}$ выполняются равенства (2), где $j = \overline{2, r-1}$. Так как по условию $f_{\mathbb{R}}^{(r)}(x) \in L_2(\mathbb{R})$, в силу утверждения 1 $f_{\mathbb{R}}^{(r)}(x)$ есть граничное значение r-й производной функции $f(z) \in H_2(\mathbb{R}_+^2)$, которая также принадлежит $H_2(\mathbb{R}_+^2)$. В случае $j = r$ (2) справедливо почти для всех $x \in \mathbb{R}$.

Докажем вторую часть леммы. Очевидно,

$$f^{(\nu)}(z) = \left(\sqrt{2\pi}\right)^{-1} \int_0^\infty (it)^\nu \hat{f}(t) \exp(itz)\, dt, \quad \nu = \overline{0, r}; \; \operatorname{Im} z > 0,$$

и r-тая производная $f_{\mathbb{R}}^{(r)}(x)$ граничных значений $f(x)$ функции $f(z)$ принадлежит $L_2(\mathbb{R})$ и почти всюду на $\mathbb{R}$ совпадает с граничными значениями $f^{(r)}(x)$ функции $f^{(r)}(z)$. Поскольку $\|f\|_2$ и

$$\| f_{\mathbb{R}}^{(r)} \|_2 = \left\{ \int_0^\infty t^{2r} |\hat{f}(t)|^2\, dt \right\}^{1/2}$$

— конечные величины, то легко видеть, что функции

$$f_{\mathbb{R}}^{(\nu)}(x) = \left(\sqrt{2\pi}\right)^{-1} \int_0^\infty (it)^\nu \hat{f}(t) \exp(ixt) dt, \; \nu = \overline{1, r-1},$$

также принадлежат $L_2(\mathbb{R})$ и по утверждению 1 являются граничными значениями $f^{(\nu)}(z) \in H_2(\mathbb{R}_+^2)$, $\nu = \overline{1, r-1}$.

Для любых $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ на основании неравенства Буняковского–Шварца

$$\left| f_{\mathbb{R}}^{(r-1)}(x_1) - f_{\mathbb{R}}^{(r-1)}(x_2) \right| =$$

$$= \left(\sqrt{2\pi}\right)^{-1} \left| \int_0^\infty t^{r-1} \hat{f}(t) (\exp(ix_1 t) - \exp(ix_2 t))\, dt \right| =$$

$$= \sqrt{2/\pi}\, \| f_{\mathbb{R}}^{(r)} \|_2 \left\{ \int_0^{\infty} t^{-2} \sin^2(x_1 - x_2)\, t\, dt \right\}^{1/2} = |x_1 - x_2|\, \| f_{\mathbb{R}}^{(r)} \|_2 .$$

Отсюда следует локальная абсолютная непрерывность функции $f_{\mathbb{R}}^{(r-1)}(x)$ на $\mathbb{R}$. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Для любой функции* $Q(x) \in B_{\sigma,2}$, *где* $\sigma > 0$, *при* $0 < h < \pi/(2\sigma)$ *справедливо неравенство*

$$\| \Delta_h^k Q \|_2 \le (2 \sin h\sigma)^k \| Q \|_2, \tag{5}$$

где

$$\Delta_h^k Q(x) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} Q(x + (k-2j)h).$$

Доказательство. Рассмотрим произвольную целую функцию $Q(x) \in B_{\sigma,2}$. Тогда при любом $\varepsilon > 0$ $Q(\varepsilon, x) \overset{\mathrm{df}}{=} Q(x)(\sin \varepsilon x)/(\varepsilon x)$ является целой функцией степени $\le \sigma + \varepsilon$, которая удовлетворяет условию $\| Q(\varepsilon, \cdot) \|_2 < \infty$ и имеет представление

$$Q(\varepsilon, x) = \left(\sqrt{2\pi}\right)^{-1} \int_{-\sigma-\varepsilon}^{\sigma+\varepsilon} g(\varepsilon, t) \exp(ixt)\, dt, \quad g(\varepsilon, t) \in L_2([-\sigma-\varepsilon; \sigma+\varepsilon]).$$

Нетрудно проверить, что

$$\Delta_h^k Q(\varepsilon, x) =$$

$$= \left(\sqrt{2\pi}\right)^{-1} \int_{-\sigma-\varepsilon}^{\sigma+\varepsilon} \nu(t)(it)^k g(\varepsilon, t) \exp(ixt)\, dt; \quad \nu(t) \overset{\mathrm{df}}{=} (2t^{-1} \sin ht)^k.$$

Функция $\nu(t)$ является четной и выпуклой вниз на $[-\sigma-\varepsilon; \sigma+\varepsilon]$. Ее удобно рассматривать как периодическую с периодом $2(\sigma+\varepsilon)$. Из гармонического анализа известно, что

$$\nu(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp \frac{in\pi t}{\sigma + \varepsilon},$$

где

$$c_n = \frac{2}{\sigma + \varepsilon} \int_0^{\sigma+\varepsilon} \nu(t) \cos \frac{n\pi t}{\sigma + \varepsilon}\, dt.$$

В силу тождества [12, с. 230]

$$\int_0^{\sigma+\varepsilon} \nu(t) \cos \frac{n\pi t}{\sigma + \varepsilon}\, dt =$$

$$= -\frac{\sigma + \varepsilon}{n\pi} \int_0^{(\sigma+\varepsilon)/n} \sin \frac{n\pi t}{\sigma + \varepsilon} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \nu^{(1)}\left(t + \frac{k(\sigma+\varepsilon)}{n} \right) dt$$

и того, что на отрезке $[0, \sigma+\varepsilon]$ функция $\nu^{(1)}(t)$ является неотрицательной и монотонно возрастающей, имеем $(-1)^n c_n \ge 0$, $n \in \mathbb{Z}$. Следовательно,

$$\max\{|\nu(t)|: -\sigma-\varepsilon \le t \le \sigma+\varepsilon\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| = \nu(\sigma+\varepsilon).$$

Учитывая это соотношение и равенство

$$\Delta_h^k Q(\varepsilon, x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n Q\left(\varepsilon, x + \frac{n\pi}{\sigma+\varepsilon}\right),$$

на основании неравенства Минковского получаем

$$\left\|\Delta_h^k Q(\varepsilon,\cdot)\right\|_2 \le \nu(\sigma+\varepsilon)\left\|Q^{(k)}(\varepsilon,\cdot)\right\|_2. \tag{6}$$

Используя известное неравенство $\left\|Q^{(k)}(\varepsilon,\cdot)\right\|_2 \le (\sigma+\varepsilon)^k \left\|Q(\varepsilon,\cdot)\right\|_2$, а также соотношение (6), имеем

$$\left\|\Delta_h^k Q(\varepsilon,\cdot)\right\|_2 \le (2\sin h(\sigma+\varepsilon))^k \left\|Q(\varepsilon,\cdot)\right\|_2.$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем (5), чем завершим доказательство леммы 3.

Для $f(x) \in L_2(\mathbb{R})$ обозначим

$$\omega_k(f,t)_2 = \sup\left\{ \left\|\Delta_{h/2}^k f(\cdot)\right\|_2 : 0 \le h \le t \right\};$$

$$\kappa_{k,\sigma}(t) \overset{\text{df}}{=} \left\{ \left(2\sin\frac{t\sigma}{2}\right)^k, \text{ если } 0 \le t \le \frac{\pi}{\sigma};\ 2^k, \text{ если } t \ge \frac{\pi}{\sigma} \right\}$$

Следствие 1. *Для любой функции* $Q(x) \in B_{\sigma,2}$, *где* $\sigma > 0$, *справедливо неравенство*

$$\omega_k(Q,t)_2 = \kappa_{k,\sigma}(t)\|Q\|_2;\ t \ge 0. \tag{7}$$

Лемма 4. *Пусть функция* $f(z) \in H_2(\mathbb{R}_+^2)$. *Тогда*

$$\mathcal{A}_\sigma(f)_2 \le 2^{-k}\left\{ \sigma \int_0^{\pi/\sigma} \omega_k^{2/k}(f,t)_2 \sin(\sigma t)\,dt \right\}^{k/2}. \tag{8}$$

Доказательство. Проведя ряд несложных преобразований, запишем

$$\Delta_{h/2}^k f(x) = \left(\sqrt{2\pi}\right)^{-1} \int_0^{\infty} \hat f(t) e^{ikth/2}(1-e^{ikth}) e^{itx}\,dt.$$

В силу равенства Парсеваля отсюда имеем

$$\left\|\Delta_{h/2}^k f\right\|_2^2 = 2^k \left\|\hat f(x)\left(1-\cos(xh)\right)^{k/2}\right\|_2^2. \tag{9}$$

Используя неравенство Гельдера, (3) и (9), получаем

$$\mathcal{A}_\sigma^2(f)_2 - \int_{t>\sigma} |\hat f(t)|^2 \cos th\,dt =$$

$$= \int_{t>\sigma} |\hat f(t)|^{2-2/k} |\hat f(t)|^{2/k}(1-\cos th)\,dt \le$$

$$\le \left\{\mathcal{A}_\sigma(f)_2\right\}^{2-2/k} \left\{ \int_{t>\sigma} |\hat f(t)|^2 (1-\cos th)^k\,dt \right\}^{1/k} \le$$

$$\le \left\{ \mathcal{A}_\sigma(f)_2 \right\}^{2-2/k} \frac{\omega_k^{2/k}(f,h)_2}{2}. \tag{10}$$

Умножая обе части неравенства (10) на $\sin\sigma h$ и интегрируя в пределах от 0 до π/σ, имеем

$$\frac{2}{\sigma}\,\mathcal{A}_\sigma^2(f)_2 - \int\limits_{t>\sigma} |\,\hat f(t)|^2 \left\{ \int\limits_0^{\pi/\sigma} \sin\sigma h \cos th\, dh \right\} dt \le$$

$$\le \frac{1}{2}\,\mathcal{A}_\sigma^{2-2/k}(f)_2 \int\limits_0^{\pi/\sigma} \omega_k^{2/k}(f,h)_2 \sin\sigma h\, dh. \tag{11}$$

Учитывая, что

$$\int\limits_0^{\pi/\sigma} \sin\sigma h \cos th\, dh = -2\sigma\,(t^2-\sigma^2)^{-1}\cos^2\frac{t\pi}{2\sigma},$$

отбрасываем второе слагаемое в левой части неравенства (11) и получаем оценку (8). Лемма 4 доказана.

Используя результаты лемм 2 и 4, получаем такое следствие.

Следствие 2. *Пусть функция* $f(z)$ *из* $H_2(\mathbb{R}_+^2)$ *имеет* r*-тую производную, принадлежащую* $H_2(\mathbb{R}_+^2)$. *Тогда*

$$\mathcal{A}_\sigma(f)_2 \le \sigma^{-r} 2^{-k} \left\{ \sigma \int\limits_0^{\pi/\sigma} \omega_k^{2/k}(f^{(r)},t)_2 \sin(\sigma t) dt \right\}^{k/2}. \tag{12}$$

Пусть $\Psi(x)$, где $x>0$, есть положительная возрастающая функция такая, что $\lim\left\{ \Psi(x)\colon x\to 0 \right\} = \Psi(0) = 0$. Символом $W^r H_2(\mathbb{R}_+^2)$ обозначим класс аналитических функций $f(z)\in H_2(\mathbb{R}_+^2)$, у которых $f^{(r)}(z)\in H_2(\mathbb{R}_+^2)$. Полагаем

$$\Psi W_{2,k}^r = \left\{ f\in W^r H_2(\mathbb{R}_+^2)\colon \frac{\pi}{2x}\int\limits_0^x \omega_k^{2/k}(f^{(r)},t)_2 \sin\frac{\pi t}{x}\, dt \le \right.$$

$$\left. \le \Psi^2(x) \quad \forall\, x>0 \right\};$$

$$(1-\cos\tau)_* \overset{\mathrm{df}}{=} \{1-\cos\tau, \text{ если } 0\le\tau\le\pi;\ 2, \text{ если } \tau\ge\pi\}.$$

Теорема. *Пусть мажорирующая функция* $\Psi(x)$ *удовлетворяет условию*

$$\Psi^2(x/\mu)\int\limits_0^{\pi\mu} (1-\cos\tau)_* \sin\frac{\tau}{\mu}\, d\tau \le 2\mu\Psi^2(x) \tag{13}$$

при любых положительных x,μ. *Тогда справедливы равенства*

$$\overline{\Pi}_N(\Psi W_{2,k}^r; H_2(\mathbb{R}_+^2)) = (2\pi N)^{-r} 2^{-k/2}\Psi^k(1/(2N));\quad \forall\, N>0, \tag{14}$$

где $\overline{\Pi}_N(\cdot)$ *— любой из перечисленных в* п. II *средних* N*-поперечников.*

Доказательство. Используя (12) и определение класса $\Psi W_{2,k}^r$, при $x = \pi/\sigma$ получаем

$$\mathcal{A}_\sigma\left(\Psi W^r_{2,k}\right)_2 \overset{\text{df}}{=} \sup\left\{\mathcal{A}_\sigma(f)_2:\ f\in\Psi W^r_{2,k}\right\} \le \sigma^{-r}2^{-k/2}\Psi^k(\pi/\sigma).$$

Полагая $\sigma = 2\pi N$ и учитывая (1), записываем оценки сверху

$$\overline{\Pi}_N(\Psi W^r_{2,k}; H_2(\mathbb{R}^2_+)) \le (2\pi N)^{-r}2^{-k/2}\Psi(1/(2N)). \tag{15}$$

Переходя к получению оценок снизу, полагаем $\hat\sigma = 2\pi N(1+\varepsilon)$; $\rho = (\hat\sigma)^{-r}2^{-k/2}\Psi^k(\pi/\hat\sigma)$, где $\varepsilon > 0$ есть произвольное число, и рассматриваем шар

$$S_{\hat\sigma,\rho} \overset{\text{df}}{=} \left\{ g_{\hat\sigma} \in \tilde{\mathbb{B}}_{\hat\sigma,2}: \| g_{\hat\sigma}\|_2 \le \rho \right\}.$$

Для любого $g_{\hat\sigma}\in S_{\hat\sigma,\rho}$ в силу (7) имеем

$$\omega_k^2\left(g^{(r)}_{\hat\sigma}, t\right)_2 \le \kappa^2_{k,\hat\sigma}(t)\| g^{(r)}_{\hat\sigma}\|_2 \le \left(1-\cos\hat\sigma t\right)^k_* \Psi^{2k}(\pi/\hat\sigma).$$

Отсюда следует

$$\frac{\pi}{2x}\int_0^x \omega_k^{2/k}\left(g^{(r)}_{\hat\sigma}, t\right)_2 \sin\frac{\pi t}{x}\,dt = \frac{\pi}{2x}\Psi^2(\pi/\hat\sigma)\int_0^x (1-\cos\hat\sigma\tau)_*\sin\frac{\pi t}{x}\,dt. \tag{16}$$

Проведя в (16) несложные преобразования, изложенные в [8] (а именно: подобрав $\mu > 0$ так, чтобы $\hat\sigma = \pi\mu/x$, и проделав в правой части (16) замену переменного $\pi\mu t/x = v$), продолжим (16) с учетом (13):

$$\le \frac{1}{2\mu}\Psi^2(x/\mu)\int_0^{\pi\mu}(1-\cos v)_*\sin\frac{v}{\mu}\,dv \le \Psi^2(x).$$

Следовательно, $S_{\hat\sigma,\rho_*} \subset \Psi W^r_{2,k}$. Учитывая, что $\overline{\dim}\,(\tilde{\mathcal{B}}_{\sigma,2}; L_2(\mathbb{R})) > N$, а также используя лемму 1, определение среднего N-поперечника по Бернштейну и произвольность $\varepsilon > 0$, имеем

$$\overline{b}_N(\Psi W^r_{2,k}; H_2(\mathbb{R}^2_+)) \ge (2\pi N)^{-r}2^{-k/2}\Psi^k(1/(2N)).$$

Оценки (14) получаем на основании (1), (15) и последнего неравенства. Теорема доказана.

1. *Динь-Зунг, Магарил-Ильяев Г. Г.* Задачи типа Бернштейна и Фавара и средняя ε-размерность некоторых классов функций // Докл. АН СССР. – 1979. – **249**, № 4. – С. 783 – 786.
2. *Магарил-Ильяев Г. Г.* Средняя размерность и поперечники классов функций на прямой // Там же. – 1991. – **318**, № 1. – С. 35 – 38.
3. *Насибов Ф. Г.* К теории приближения целыми функциями // Приближение функций линейными операторами и сходимость рядов Фурье. – Баку: Азерб. ин-т нефти и химии, 1987. – С. 26 – 45.
4. *Майоров В. Е.* О поперечниках классов функций, заданных на прямой // Мат. заметки. – 1983. – **34**, № 3. – С. 355 – 366.
5. *Гарнетт Дж.* Ограниченные аналитические функции. – М.: Мир, 1984. – 470 с.
6. *Pinkus A.* n-Widths in Approximation Theory. – Berlin: Springer – Verlag, 1985. – 292 p.
7. *Тихомиров В. М.* Некоторые вопросы теории приближений. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976. – 304 с.
8. *Вакарчук С. Б.* О поперечниках некоторых классов аналитических функций в пространстве Харди H_2 // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 6. – С. 799 – 803.
9. *Шалаев В. В.* О поперечниках в L_2 классов дифференцируемых функций, определяемых модулями непрерывности высших порядков // Там же. – 1991. – **43**, № 1. – С. 125 – 129.
10. *Тамразов П. М.* Гладкости и полиномиальные приближения. – Киев: Наук. думка, 1975. – 272 с.
11. *Гахов Ф. Д., Черский Ю. И.* Уравнения типа свертки. – М.: Наука, 1978. – 296 с.
12. *Тиман А. Ф.* Теория приближения функций действительного переменного. – М.: Физматгиз, 1960. – 624 с.

Получено 17.12.93