УДК 517.946:538.3

С. Кохманьски, д-р физ. наук
(Ин-т фундамент. пробл. техники Польской АН, Варшава)

ОПЕРАТОР ЭВОЛЮЦИИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

It is shown that, with a relatively simple operator technique, it is possible to find a solution of the Cauchy problem for equations of mathematical physics with varying coefficients. This result is applied to equations of kinetic theory and the theory of diffusion and heat conductivity. We discuss the problem of consistency of different expansion schemes for the Hausdorff formula.

Показано, що з використанням порівняно простої операторної техніки можна з єдиної точки зору розв'язати задачу Коші для ряду важливих рівнянь математичної фізики зі змінними коефіцієнтами. Наводиться ряд прикладів з кінетичної теорії, теорії дифузії та теплопровідності. Розглядається питання еквівалентності різних схем розкладу за формулою Хаусдорфа.

1. Введение. Общей теории уравнений с частными производными посвящено большое число работ (см., например, монографию [1] Л. Хермандера). Однако на практике часто бывает очень трудно построить решение того или иного уравнения с переменными коэффициентами, пользуясь общей теорией. Это относится к большому числу уравнений кинетической теории [2], уравнениям диффузии и теплопроводности, уравнению Фоккера – Планка и т. д. В данной работе с использованием сравнительно простой операторной техники показано с единой точки зрения, как решать задачи Коши для ряда важных уравнений математической физики с переменными коэффициентами. Мы также приведем пример нарушения симметрии формулы Хаусдорфа [3], исследуем несколько примеров дифференциальных уравнений эволюционного типа для задачи Коши.

Рассмотрим уравнение второго порядка

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(x, 0) = f(x).$$

Решение этой задачи запишем в виде $u(x, t) = \hat{S}(t) f(x)$, где $\hat{S}(t)$ — оператор, „продолжающий" начальную функцию во времени; этот оператор удовлетворяет уравнению [3]:

$$\frac{\partial \hat{S}}{\partial t} = D^2 \hat{S}, \quad \hat{S}(0) = 1, \tag{1}$$

в котором $D = \partial / \partial x$ — оператор дифференцирования. Решение уравнения (1) имеет вид $\hat{S}(t) = \exp(tD^2)$. Оператор $\hat{S}(t)$ можно определить с помощью ряда. В данном случае, как известно, легко выразить оператор $\exp(tD^2)$ через оператор смещения $\exp(tD)$, если выполнять преобразования с функциями от операторов так же, как и с обычными числовыми функциями. По аналогии с формулой

$$\exp(a^2) = (\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(\xi^2 + 2a\xi)\, d\xi,$$

напишем формулу

$$\exp(tD^2) = (\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\xi^2 + 2t^{1/2}\xi D)\, d\xi. \tag{2}$$

Применяя оператор (2) к функции $f(x)$ и используя формулу

$$\exp(tD)f(x) = f(x+t), \tag{3}$$

получаем решение задачи Коши для рассматриваемого уравнения:

$$u(x,t) = \exp(tD^2)f(x) = (\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty}(-\xi^2)f(x+2\xi t^{1/2})\,d\xi. \tag{4}$$

Вводя $x' = x + 2\xi t^{1/2}$, $dx' = 2t^{1/2}\,d\xi$, окончательно имеем

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-x')^2/4t} f(x')\,dx'.$$

Иными словами, оператор $\hat{S}(t) = \exp(tD^2)$ является интегральным с ядром $S(x,x',t)$, которое называется фундаментальным решением рассматриваемого уравнения

$$S(x,x',t) = (4\pi t)^{-1/2}\exp[-(x-x')^2/4t], \quad t>0.$$

Обобщение на трехмерный случай является тривиальным. Отметим, что в рассматриваемом уравнении перед пространственной производной может стоять коэффициент $\alpha(t)$ — произвольная функция времени. В этом случае все изменения в формулах (2) – (4) сводятся к замене переменной t на $\int \alpha(t')\,dt'$, что позволяет расширить класс решаемых этим методом уравнений эволюции.

Далее, используя формулу

$$\exp[t(d/dx+\varphi)]F(x) = \exp\left[\int_0^t \varphi(x+\tau)\,d\tau\right]F(x+t), \tag{5}$$

которую легко доказать, можно практически сразу написать рашение задачи Коши для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha(t,x)\frac{\partial u}{\partial x} + \varphi(t,x)u, \quad u(x,0) = f(x),$$

которое мы не будем здесь приводить. При этом необходимо, чтобы выполнялось условие [4]:

$$\left[\hat{q}(t), \int_0^t \hat{q}(\tau)\,d\tau\right]_- = 0, \tag{6}$$

где $[\,,\,]_-$ — коммутатор и $\hat{q}$ — оператор вида $\hat{q}(t) = \alpha(t,x)\partial/\partial x + \varphi(t,x)$. Условие (6) является необходимым и достаточным для представления решения задачи Коши в виде

$$u(x,t) = \hat{S}(t)f(x), \tag{7}$$

где оператор $\hat{S} = \alpha'(x,t)\partial/\partial x + \varphi'(x,t)$, а α' и φ' равны интегралам от α и φ соответственно по переменной τ в пределах $[0,t]$.

2. Задача Коши для уравнений типа теплопроводности (диффузии) и кинетических уравнений с переменными коэффициентами.

1. Рассмотрим задачу Коши для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - (\alpha+\beta x)u, \quad u(x,0) = f(x), \tag{8}$$

где $a = (k/c\rho)^{1/2}$ — коэффициент температуропроводности (пока будем его считать постоянным), k, c и ρ — заданные физические константы, и $(\alpha, \beta) = \text{const}$. К такому уравнению (при известной идеализации процесса) приводит задача теплопроводности.

Как и выше, представим решение задачи Коши (8) в виде (7), где оператор $\hat{S}(t)$ имеет вид

$$\hat{S}(t) = \exp(-\alpha t)\exp[t(a^2D^2 - \beta x)], \quad D = \partial/\partial x, \quad \hat{S}(0) = 1.$$

Для решения этой задачи воспользуемся операторным соотношением

$$\exp[t(ax + bD^2)] = \exp(a^2bt^3/3)\exp(atx)\exp(abt^2D)\exp(btD^2), \tag{9}$$

которое можно получить, используя формулу Кемпбелла – Бейкера – Хаусдорфа [5] (см. п. 4). Тогда решение задачи Коши (8) можно записать в виде

$$u(x, t) = \exp(-\alpha t + a^2\beta^2t^3 3^{-1})\exp(-\beta xt)\exp(-\beta a^2t^2D)\exp(a^2tD^2)\,u(x, 0), \tag{10}$$

и, последовательно применяя формулы (2), (3), можно в явном виде выписать решение для $u(x, t)$. Мы не будем этого делать, а только заметим, что коэффициент α в (8) может быть произвольной функцией времени t, при этом в формулах следует произвести замену αt на

$$\int_0^T \alpha(\tau)\,d\tau.$$

Рассмотрим теперь случай квадратичной зависимости коэффициента теплообмена от x, т. е. рассмотрим случай $(\alpha + \beta x^2)$ уравнения (8). В этом случае оператор $\hat{S}(t)$ имеет вид

$$\hat{S}(t) = \exp(-\alpha t)\exp[t(a^2D^2 - \beta x^2)], \quad D = \partial/\partial x.$$

Известный [5] оператор $\exp[\ldots]$ может быть представлен в виде

$$\exp[t(a^2D^2 - \beta x^2)] = \exp[-(\beta^{1/2}/2a)\operatorname{th}(\omega t)x^2] \times$$

$$\times \exp\{-(1/2)\ln[\operatorname{ch}(\omega t)](1 + 2xD)\}\exp[(a/2\beta^{1/2})\operatorname{th}(\omega t)D^2], \tag{11}$$

где $\omega = 2a\beta^{1/2}$. Тогда, используя (11), а также (2) и формулу

$$\exp[\alpha x(\partial/\partial x)]\,f(x) = f(e^{\alpha}x), \tag{12}$$

которую легко доказать; можем записать решение в виде

$$u(x, t) = \frac{e^{-\alpha t}e^{-(\beta^{1/2}x^2/2a)\operatorname{th}(\omega t)}}{\left[(2\pi a/\beta^{1/2})\operatorname{sh}(\omega t)\right]^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{[x - \operatorname{ch}(\omega t)x']^2}{(a/\beta^{1/2})\operatorname{sh}(2\omega t)}\right\} u(x', 0)\,dx', \quad t > 0.$$

2. Рассмотрим теперь ряд примеров, когда переменные относительно x коэффициенты стоят перед пространственными частными производными в эволюционном уравнении. Рассмотрим задачу Коши для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\alpha + \beta)x\frac{\partial u}{\partial x}, \quad u(x, 0) = f(x). \tag{13}$$

Это уравнение можно переписать в виде, удобном для дальнейшего анализа:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (\alpha D^2 + \beta D)\,u(x, t), \quad D = x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y},$$

причем

$$y = \ln x, \quad u(x,0) = u(e^y, 0), \quad x > 0;$$

$$y = \ln|x|, \quad u(x,0) = u(-e^y, 0), \quad x < 0.$$

Тогда, как и выше, решение задачи (13) можно представить в виде (7), причем оператор $\hat{S}$ имеет вид

$$\hat{S} = \exp\left[t(\alpha D^2 + \beta D)\right], \quad (\alpha, \beta) = \text{const}.$$

Используя формулы (2), (3), можем решение (13) записать в виде

$$u(x,t) = \exp\left[t(\alpha D^2 + \beta D)\right] u(x,0) = (4\pi\alpha t)^{-1/2} \int\limits_0^\infty e^{-\ln^2 v/4\alpha t}\, u(e^{\beta t} x v, 0)\frac{dv}{v}. \tag{14}$$

Полагая в (13) $\alpha = -\beta$, получаем решение задачи Коши для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(x,0) = f(x),$$

которое имеет вид (14), где следует положить $\beta = -\alpha$. Заметим здесь, что в уравнении (13) постоянные α и $\beta' = \alpha + \beta$ могут быть произвольными. Далее, уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha(1+\gamma x)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

заменой переменной $1 + \gamma x = y$, $dy = \gamma\, dx$ приводится к уравнению (13) с $\alpha = -\beta$, решение которого определяется формулой (14), в котором следует произвести замену $\beta \Rightarrow -\alpha\gamma^2$, $x \Rightarrow 1 + \gamma x$.

Прием, использованный для решения уравнения (13), можно применить и к задаче Коши для уравнений с более сложной зависимостью коэффициентов от независимых переменных t и x.

Как видно из приведенных выше примеров, рассматриваемый метод решения задачи Коши существенно связан с возможностью „распутать" операторную экспоненту вида

$$\hat{S}(t) = \exp\left[F(t, x, D)\right], \quad D = \partial/\partial x, \tag{15}$$

где $F(t, x, D)$ — некоторая заданная функция своих аргументов. Например, для решения задачи Коши вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (\alpha D^2 + \beta D + \gamma x^2) u, \quad D \equiv \partial/\partial x, \quad u(x,0) = f(x),$$

необходимо уметь „распутать" операторную экспоненту типа

$$\hat{S}(t) = \exp\left[t(\alpha D^2 + \beta D + \gamma x^2)\right]. \tag{16}$$

В п. 4 приводится один из возможных выводов формулы для экспоненты (16), которую мы представим в виде

$$\hat{S}(t) = \exp\left\{\frac{\beta^2}{2\alpha}\left[\frac{t}{2} + \frac{1}{\omega}\,\text{sh}\,(\omega t)\left(\text{sh}^2(\omega t/2) - \frac{1}{2}\right)\right]\right\} \exp\left[\frac{\beta}{\omega}\,\text{sh}\,(\omega t) D\right] \times$$

$$\times \exp\left[(\gamma/4\alpha)^{1/2}\,\text{tg}\,(\omega t) x^2 - \frac{\beta}{\alpha}\,\text{sh}^2\,(\omega t/2)\, x\right] \times$$

$$\times\ \exp\left[-\frac{1}{2}\ln\cos(\omega t)(1+xD)\right]\exp\left[(\alpha/4\gamma)^{1/2}\operatorname{tg}(\omega t)D^2\right],\quad \omega = 2(\alpha\gamma)^{1/2}. \tag{17}$$

В формуле (17) фактически содержится решение задачи Коши для уравнения (15), если воспользоваться формулами (2), (3) и (12), определяющими действие операторных экспонент на функцию $u(x,0)$. Заметим, что получить результат (17) с использованием формулы Хаусдорфа [3] практически не представляется возможным, поскольку просуммировать получающиеся ряды очень трудно.

3. Рассмотрим еще один пример задачи Коши для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\varphi(x)\frac{\partial u}{\partial x} + (\varphi'_x + \varphi^2)u,\quad u(x,0) = f(x), \tag{18}$$

где $\varphi(x)$ — произвольная кусочно-непрерывная дифференцируемая функция. Эта задача решается с помощью следующего приема. Запишем правую часть этого уравнения в виде

$$(\partial/\partial x + \varphi)(\partial/\partial x + \varphi) = \hat{A}^2,$$

тогда решение задачи можно записать в виде (7), а оператор $\hat{S}$ в виде

$$\hat{S}(t) = \exp\left[t(\partial/\partial x + \varphi)(\partial/\partial x + \varphi)\right],\quad \hat{S}(0) = 1. \tag{19}$$

Используя формулы (2) и (5), после некоторых преобразований решение задачи можно представить в виде

$$u(x,t) = \frac{1}{2(\pi t)^{1/2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x'-x)^2/4t}\exp\left[\int_x^{x'}\varphi(\tau)\,d\tau\right]u(x',0)\,dx'. \tag{20}$$

В частности, для функции $\varphi(x) = 1/x$ решение (20) описывает радиальное распространение тепла в однородном шаре радиуса R. Далее, добавляя к правой части уравнения (18) член $\gamma u(x,t)$, где $\gamma = \text{const}$, можно рассматривать нетривиальные уравнения, для которых можно найти фундаментальные решения. Например, при $\gamma = 1$ и $\varphi(x) = -\operatorname{tg} x$, получаем уравнение типа

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\operatorname{tg} x\frac{\partial u}{\partial x},\quad u(x,0),$$

фундаментальное решение которого имеет вид

$$u(x,x',t) = (4\pi t)^{-1/2}\frac{\cos x'}{\cos x}\exp\left[-(x'-x)^2/4t\right],\quad t>0.$$

Оператор $\hat{S}(t)$ и его аналоги, представленные выше, а также способ их действия на пробную функцию $u(x,0)$ можно рассматривать и с другой точки зрения. А именно: результат (20) и аналогичные ему можно в принципе получить с помощью разложения Бейкера – Хаусдорфа [3, 6], для чего необходимо уметь суммировать такие ряды. Используя полученные выше результаты, можно просуммировать ряды Бейкера – Хаусдорфа для различных пар операторов $\hat{x}$ и $\hat{y}$. Например, полагая в (19) $\varphi(x) = (x+a)^{-1}$, получаем

$$\hat{S}(t) = \exp\left[t\left(D^2 + \frac{2}{x+a}D\right)\right],\quad D = \partial/\partial x. \tag{21}$$

Применяя затем к оператору (21) формулы (2) и (5), получаем

$$\hat{S}(t) = \left[1 + \frac{2t}{(x+a)^2} + \frac{4t}{x+a}D + \frac{4t^2}{(x+a)}2D^2\right]\exp(tD^2). \tag{22}$$

Вводя обозначения

$$\hat{x} = (2t/x+a)D, \quad \hat{y} = tD^2, \quad D = \partial/\partial x,$$

записываем выражение (22) в окончательном виде:

$$\exp(\hat{x} + \hat{y})\exp(-\hat{y}) = \exp(\hat{z}),$$
$$\hat{z} = \ln\left[1 + 2\hat{x} + \frac{2t}{(x+a)^2}(1+2\hat{y})\right]. \tag{23}$$

Ясно, что непосредственное суммирование разложения Хаусдорфа [3, 6] (см. п. 3 данной работы) для оператора $\hat{z}$ в случае заданных выше операторов $\hat{x}$ и $\hat{y}$ представляет значительные трудности, если вообще является выполнимым. Поэтому данный метод получения замкнутых выражений для оператора $\hat{z}$ представляет, на наш взгляд, известный интерес. Формулы (23) допускают обобщение, если в выражениях для операторов $\hat{x}$ и $\hat{y}$ произвести замену $x \Rightarrow f(x)$, где $f(x)$ — произвольная функция, причем $df/dx \neq 0$.

4. Здесь мы рассмотрим два конкретных физических примера, связанных с уравнением Фоккера – Планка

$$\frac{\partial f}{\partial t} = B\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}\left(\frac{\mathbf{p}}{MT}f + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}}\right), \quad f(\mathbf{p}, 0), \tag{24}$$

где $f(\mathbf{p}, t)$ — функция распределения, M — масса частиц, а T — температура газа; $B = \mathrm{const}$ — коэффициент диффузии; $f(\mathbf{p}, 0)$ — начальная функция распределения. Решение задачи (24) ищем в виде (7), где $\hat{S}(t)$ в данном случае имеет вид

$$\hat{S}(t) = \exp\left[t\left(\frac{B}{MT}\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}\mathbf{p} + B\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{p}^2}\right)\right]. \tag{25}$$

Поскольку операторы по трем независимым компонентам импульса и соответствующих им производных коммутируют между собой, то

$$\hat{S}(t) = \prod_{\alpha}\exp\left[t\left(\frac{B}{MT}\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_\alpha}\mathbf{p}_\alpha + B\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{p}_\alpha^2}\right)\right]. \tag{26}$$

Записывая для каждого из сомножителей оператора (26) операторное соотношение

$$\exp\left[t\left(aDx + bD^2\right)\right] = \exp(atDx)\exp\left[\frac{b}{2a}\left(e^{2at} - 1\right)D^2\right],$$

которое легко может быть доказано, а затем используя формулы (2) и (12), учитывая, что $xD - Dx = 1$, $D = \partial/\partial x$, решение задачи (24) записываем в виде

$$f(\mathbf{p}, t) = \frac{e^{(3B/MT)t}}{(2\pi\gamma(t))^{3/2}}\int d\mathbf{p}'\exp\left[-\frac{\left(\mathbf{p}' - e^{(B/MT)t}\mathbf{p}\right)^2}{2\gamma(t)}\right]f(\mathbf{p}', 0);$$
$$\gamma(t) = MT\left[e^{(2B/MT)t} - 1\right], \quad t > 0.$$

Принимая в качестве начального распределения δ-функцию Дирака $\delta(\mathbf{p}' - \mathbf{p}_0)$, получаем искомое фундаментальное решение задачи Коши (24).

Второй пример. Рассмотрим уравнение вида

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\mathbf{p}^{-2}\frac{\partial \mathbf{p}^2 S}{\partial \mathbf{p}}, \quad S = -B\left(\frac{\mathbf{p}}{mT}f + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}}\right), \quad f(p,0), \tag{27}$$

где $f(p,t)$ — функция распределения, m — масса, T — температура, $\mathbf{p}$ — абсолютная величина импульса.

Задача (27) значительно сложнее задачи (24), и для ее решения мы используем некоторое приближение: это своего рода теория возмущения на уровне алгебры операторов, которую мы продемонстрируем на примере решения задачи (27). Именно: вводя новую функцию

$$u(p,t) = \mathbf{p}^2 f(p,t), \quad u(p,0) = \mathbf{p}^2 f(p,0), \tag{28}$$

записываем уравнение (27) в низкотемпературном приближении

$$\frac{mT}{\mathbf{p}^2} \sim \frac{M}{m}\frac{V^2}{\mathrm{v}^2} \sim \varepsilon^2, \quad \varepsilon << 1,$$

где V^2 — средний квадрат скорости тяжелой частицы, M — ее масса, в форме

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{B}{mT}\left(u + \mathbf{p}\frac{\partial u}{\partial \mathbf{p}}\right) - \frac{2B}{\mathbf{p}}\frac{\partial u}{\partial \mathbf{p}} + B\frac{\partial^2 u}{\partial \mathbf{p}^2}, \tag{29}$$

где мы опустили член порядка $\sim\varepsilon^2$. Решение уравнения (29) ищем в виде (7), где оператор $\hat{S}(t)$ имеет вид

$$\hat{S}(t) = \exp\left\{t\left[\frac{B}{mT}\left(1 + \mathbf{p}\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}\right) - \frac{2B}{\mathbf{p}}\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} + B\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{p}^2}\right]\right\}. \tag{30}$$

Операторы

$$Q_1 = \frac{B}{mT}\mathbf{p}D_{\mathbf{p}}, \quad Q_2 = -2B\mathbf{p}^{-1}D_{\mathbf{p}}, \quad Q_3 = BD_{\mathbf{p}}^2, \quad D_{\mathbf{p}} = \partial/\partial\mathbf{p},$$

образуют алгебру Ли с коммутационными соотношениями

$$[Q_1,Q_2] = -\frac{2B}{mT}Q_2, \quad [Q_1,Q_3] = -\frac{2B}{mT}Q_3, \quad [Q_2,Q_3] \equiv Q_4 = -(2B/\mathbf{p})^2 D_{\mathbf{p}}^2.$$

Эта алгебра не является разрешимой, однако алгебра операторов (Q_i, $i = 1, 2, 3, 4$) в низкотемпературном приближении уже является разрешимой, причем

$$\left[Q_1,Q_4\right] = -\frac{4B}{mT}Q_1, \quad \left[Q_2,Q_4\right] \cong 0, \quad \left[Q_3,Q_4\right] \cong 0, \tag{31}$$

с точностью до величин порядка малости $\sim\varepsilon^2$ включительно. Это позволяет представить оператор $\hat{S}(t)$ в виде

$$\hat{S}(t) = \exp(tB/mT)e^{\alpha(t)Q_1}e^{\beta(t)Q_2}e^{\gamma(t)Q_3}e^{\omega(t)Q_4},$$

где функции α, β, γ и ω подлежат определению. Применяя метод, использованный в п. 4 для оператора $\hat{S}(t)$ в виде (30) после несложных, но громоздких выкладок с использованием коммутаторов (31), можно получить выражение

$$\hat{S}(t) = e^{at}e^{at\mathbf{p}D_{\mathbf{p}}}\exp\left[-2mTe^{at}\,\mathrm{sh}\,(at)\mathbf{p}^{-1}D_{\mathbf{p}}\right]\exp\left[mTe^{at}\,\mathrm{sh}\,(at)D_{\mathbf{p}}^2\right] \times$$

$$\times \exp\left\{m^2T^2\left[e^{2at}(\mathrm{sh}\,(2at)-1)+1\right] + \mathbf{p}^{-2}D_{\mathbf{p}}^2\right\}, \quad a = B/mT. \tag{32}$$

Действуя оператором (32) на функцию $u(p, 0)$ и используя формулы (2), (3), (12), а также переходя от $u(p, t)$ к $f(p, t)$ согласно (28), записываем решение уравнения (27) в виде

$$f(\mathbf{p}, t) = \frac{e^{at}}{4\pi (AD)^{1/2}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{p}'' \left\{ \exp\left[-\left(\mathbf{p}'' - \left(\left| e^{at}\mathbf{p}^2 + 2C \right|\right)^{1/2}\right)^2 (4D)^{-1} \right] \times \right.$$

$$\left. \left[\int\limits_0^{\infty} d\mathbf{p}' \left(e^{-\frac{(\mathbf{p}'^2 - \mathbf{p}''^2)^2}{16A}} + e^{-\frac{(\mathbf{p}'^2 + \mathbf{p}''^2)^2}{16A}} \right) \frac{\mathbf{p}'^3}{\mathbf{p}^2} f(\mathbf{p}', 0) \right] \right\},$$

$$A = m^2 T^2 \left[e^{2at} (\operatorname{sh}(2at) - 1) + 1 \right], \quad D = m T e^{at} \operatorname{sh}(at),$$

$$C = -2m T e^{at} \operatorname{sh}(at), \quad a = \frac{B}{mT}.$$

Тогда фундаментальнсе решение для уравнения (27) можно записать в виде

$$f(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0, t) = \frac{e^{at}}{2\pi (AD)^{1/2}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dq \left\{ \exp\left\{ -\left(q^4 + \mathbf{p}_0^4\right)(16A)^{-1} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \left[q - \left(\left| e^{2at}\mathbf{p}^2 + 2C \right|\right)^{1/2} \right]^2 (4D)^{-1} \operatorname{ch}\left(q^2 \mathbf{p}_0^2 (4A)^{-1} \right) \left(\mathbf{p}_0^3 / p^2 \right) \right\} \right\}, \quad t > 0,$$

где A, C, D и a определены выше.

Метод приближенного решения уравнения Фоккера – Планка (27), рассмотренный нами выше, демонстрирует технику теории возмущения на уровне „алгебры операторов", когда неразрешимую алгебру Ли заданных операторов $\{Q_i\}$ можно превратить в разрешимую с определенной степенью точности. Этот подход связан с частичным суммированием главных вкладов с диаграммной техникой Фейнмана [7].

3. Симметрия формулы Хаусдорфа и ее возможные нарушения. Будем следовать обозначениям и формулировкам работы [3, с. 259–265]. Рассмотрим алгебру $\mathbb{A}$ такую, что для любых $\hat{x}, \hat{y} \in \mathbb{A} : \hat{x} + \hat{y} \in \mathbb{A}$, $[\hat{x}, \hat{y}] \in \mathbb{A}$ и, кроме того, сумма сходящегося (в каком-то смысле) бесконечного ряда из элементов $\mathbb{A}$ также есть элемент $\mathbb{A}$. В дальнейшем будем иметь в виду, что элемент со „шляпкой" принадлежит алгебре $\mathbb{A}$.

Пусть $\hat{x}$ и $\hat{y}$ принадлежат алгебре $\mathbb{A}$. Тогда в $\mathbb{A}$ справедливо тождество (формула Хаусдорфа):

$$e^{\hat{x}} e^{\hat{y}} = e^{\hat{z}}, \tag{33}$$

где

$$\hat{z} = \hat{y} + \hat{z}_1 + \hat{z}_2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{z}_n; \quad \hat{z}_0 = \hat{y};$$

$$\hat{z}_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} B_n \{\hat{x}, \hat{y}^n\} = \hat{x} + \frac{1}{2}[\hat{x}, \hat{y}] + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} \{\hat{x}, \hat{y}^{2k}\};$$

$$\hat{z}_2 = 2^{-1}\left(\hat{z}_1 \partial_{\hat{y}}\right)\hat{z}_1; \quad \hat{z}_3 = 3^{-1}\left(\hat{z}_1 \partial_{\hat{y}}\right)\hat{z}_2; \ \ldots, \tag{34}$$

где B_n — числа Бернулли, $B_0 = 1$, $B_1 = -1/2$, $B_2 = 1/6$, $B_3 = B_5 = 0, \ \ldots$; $\left(\hat{z}_1 \partial_{\hat{y}}\right)$ — производный (или полярный) оператор Хаусдорфа, который действует следующим образом: например,

$$\left(\hat{z}_1\partial_{\hat{y}}\right)\hat{F}\hat{y}^2\hat{G}\hat{y} = \hat{F}\hat{z}_1\hat{y}\hat{G}\hat{y} + \hat{F}\hat{y}\hat{z}_1\hat{G}\hat{y} + \hat{F}\hat{y}^2\hat{G}\hat{z}_1;$$

($\hat{F}, \hat{G}$ — операторнозначные функции, не зависящие от $\hat{y}$);

$$\left\{\hat{x}, \hat{y}^k\right\} = \left[\left\{\hat{x}, \hat{y}^{k-1}\right\}, \hat{y}\right], \quad k = 1, 2, \dots;$$
$$\left\{\hat{x}, \hat{y}\right\} = \left[\hat{x}, \hat{y}\right] = \hat{x}\hat{y} - \hat{y}\hat{x}, \quad \left\{\hat{x}, \hat{y}^0\right\} \equiv \hat{x}. \tag{35}$$

Как показано в [3], формула Хаусдорфа (33) – (35) симметрична в том смысле, что $\hat{z}$ можно представить в виде

$$\hat{z} = \sum_{n=0}^{\infty}\hat{S}_n, \quad \hat{S}_0 = \hat{x};$$

$$\hat{S}_1 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}\left\{\hat{y}, \hat{x}^n\right\} = \hat{y} + 2^{-1}[\hat{x}, \hat{y}] + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_{2k}}{(2k)!}\left\{\hat{y}, \hat{x}^{2k}\right\};$$

$$\hat{S}_2 = 2^{-1}\left(\hat{S}_1\partial_{\hat{x}}\right)\hat{S}_1, \quad \hat{S}_3 = 3^{-1}\left(\hat{S}_1\partial_{\hat{x}}\right)\hat{S}_2, \dots. \tag{36}$$

Применим (33) – (35) и (36) к операторам вида

$$\hat{x} = \alpha x, \quad \hat{y} = \beta D^2, \quad D = \partial/\partial x, \tag{37}$$

где α и β — c-числа. Как показано в п. 4, операторную экспоненту $\exp(\hat{x} + \hat{y})$ можно представить в виде (55):

$$e^{\hat{x}+\hat{y}} = \exp(3^{-1}\alpha^2\beta)e^{\hat{x}}e^{-2^{-1}[\hat{x}, \hat{y}]}e^{\hat{y}}. \tag{38}$$

а) Сначала вычислим $\exp(\hat{x} + \hat{y})$, следуя схеме (33) – (35). Легко видеть, что

$$\left[\hat{x}, \hat{y}\right] = \left[\alpha x, \beta D^2\right] = -2\alpha\beta D \equiv \hat{w}, \quad D = \partial/\partial x,$$
$$[\hat{x}, \hat{w}] = 2\alpha^2\beta, \quad \left\{\hat{x}, \hat{y}^2\right\} = \left[\hat{x}, \hat{y}\right]\hat{y} - \hat{y}\left[\hat{x}, \hat{y}\right] = 0, \tag{39}$$

т. е. $\left\{\hat{x}, \hat{y}^{2k}\right\} = 0$, $k = 1, 2, \dots$. Итак, мы получаем

$$\hat{z}_1 = \hat{x} + 2^{-1}[\hat{x}, \hat{y}] + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_{2k}}{(2k)!}\left\{\hat{x}, \hat{y}^{2k}\right\} = \hat{x} + 2^{-1}[\hat{x}, \hat{y}].$$

Теперь вычислим $\hat{z}_2, \hat{z}_3, \dots$; имеем для $\hat{z}_2$:

$$\hat{z}_2 = 2^{-1}\left(\hat{z}_1\partial_{\hat{y}}\right)\hat{z}_1 = 2^{-1}\left(\hat{z}_1\partial_{\hat{y}}\right)\hat{z}_1\left(\hat{x} + 2^{-1}(\hat{x}\hat{y} - \hat{y}\hat{x})\right) = 4^{-1}(\hat{x}\hat{z}_1 - \hat{z}_1\hat{x}) =$$
$$= 4^{-1}\left(\hat{x}\left(\hat{x} + 2^{-1}[\hat{x}, \hat{y}]\right) - \left(\hat{x} + 2^{-1}[\hat{x}; \hat{y}]\right)\hat{x}\right) = 8^{-1}(\hat{x}[\hat{x}, \hat{y}] - [\hat{x}, \hat{y}]\hat{x}) = 4^{-1}\alpha^2\beta,$$

где мы воспользовались соотношениями (39). Далее, для $\hat{z}_3$ получаем

$$\hat{z}_3 = 3^{-1}\left(\hat{z}_1\partial_{\hat{y}}\right)\hat{z}_2 = 3^{-1}\left(\hat{z}_1\partial_{\hat{y}}\right)(4^{-1}\alpha^2\beta) = 0,$$

что легко проверяется непосредственно. Таким образом, $\hat{z}_m = 0$, $m = 3, 4, \dots$, и

$$\hat{z} = \hat{z}_0 + \hat{z}_1 + \hat{z}_2 = \hat{y} + \hat{x} + 2^{-1}\left[\hat{x}, \hat{y}\right] + 4^{-1}\alpha^2\beta.$$

А значит,

$$\exp(\hat{x})\exp(\hat{y}) = \exp(\hat{z}) = \exp(\hat{y} + \hat{x} + 2^{-1}[\hat{x}, \hat{y}] + 4^{-1}\alpha^2\beta). \tag{$*$}$$

Далее замечаем, что

$$\left[\hat{x} + \hat{y}, 2^{-1}[\hat{x}, \hat{y}]\right] = \left[\hat{A}, \hat{B}\right] = \alpha^2\beta,$$

т. е.

$$\left[\hat{A}\left[\hat{A}, \hat{B}\right]\right] = \left[\hat{B}, \left[\hat{A}, \hat{B}\right]\right] = 0,$$

и к $\exp\left(\hat{A} + \hat{B}\right)$ можно применить формулу Бейкера

$$\exp\left(\hat{A} + \hat{B}\right) = \exp\left(\hat{A}\right)\exp\left(\hat{B}\right)\exp\left(-2^{-1}\left[\hat{A}, \hat{B}\right]\right).$$

Применяя к правой части (*) $\exp(\hat{x})\exp(\hat{y})$, получаем

$$\exp(\hat{x} + \hat{y}) = \exp(4^{-1}\alpha^2\beta)\exp(\hat{x})\exp(\hat{y})\exp\left(-2^{-1}[\hat{x}, \hat{y}]\right),$$

и поскольку $\left[\hat{y}[\hat{x}, \hat{y}]\right] = 0$, то окончательно мы имеем

$$e^{\hat{x}+\hat{y}} = e^{4^{-1}\alpha^2\beta}e^{\hat{x}}e^{-2^{-1}[\hat{x}, \hat{y}]}e^{\hat{y}}. \tag{40}$$

Формулы (38) и (40) отличаются друг от друга коэффициентом при $\alpha^2\beta$ в первой экспоненте: $1/4$ вместо $1/3$. Однако результат (38) мы можем получить, применяя схему (36). Действительно, имеем

$$\hat{S}_0 = \hat{x}, \quad \hat{S}_1 = \hat{y} + 2^{-1}[\hat{x}, \hat{y}] + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_{2k}}{(2k)!}\left\{\hat{y}, \hat{x}^{2k}\right\}.$$

Далее, имеем

$$\left\{\hat{y}, \hat{x}^2\right\} = \left[[\hat{y}, \hat{x}]\hat{x} - \hat{x}[\hat{y}, \hat{x}]\right] = 2\alpha^2\beta, \quad \left\{\hat{y}, \hat{x}^4\right\} = 0, \quad \left\{\hat{y}, \hat{x}^6\right\} = 0, \ldots,$$

т. е.

$$\left\{\hat{y}, \hat{x}^{2k}\right\} = \begin{cases} 2\alpha^2\beta, & k = 1, \\ 0, & k = 2, 3, \ldots. \end{cases}$$

Таким образом, $\hat{S}_1$ имеет вид

$$\hat{S}_1 = \hat{y} + 2^{-1}[\hat{x}, \hat{y}] + 6^{-1}\alpha^2\beta.$$

Отсюда получаем $\hat{S}_2 = 2^{-1}\left(\hat{S}_1\partial_{\hat{x}}\right) = 0, \quad \hat{S}_3 = 0, \ldots,$ т. е.

$$\hat{z} \equiv \hat{S} = \hat{S}_0 + \hat{S}_1 = \hat{x} + \hat{y} + 2^{-1}[\hat{x}, \hat{y}] + 6^{-1}\alpha^2\beta,$$

откуда имеем

$$\exp(\hat{x})\exp(\hat{y}) = \exp(\hat{z}) = \exp\left(\hat{x} + \hat{y} + 2^{-1}[\hat{x}, \hat{y}] + 6^{-1}\alpha^2\beta\right). \tag{41}$$

Наконец, применяя к (41) формулу Бейкера, получаем результат (38).

Таким образом, из схемы (33) – (35), имеем

$$\hat{z} = \hat{x} + \hat{y} + 2^{-1}[\hat{x}, \hat{y}] + 4^{-1}\alpha^2\beta, \tag{42 а}$$

а из схемы (36) —

$$\hat{z} = \hat{x} + \hat{y} + 2^{-1}[\hat{x}, \hat{y}] + 6^{-1}\alpha^2\beta \tag{42 б}$$

для операторов $\hat{x}$ и $\hat{y}$ вида (37). Этот результат для примера (37) наглядно показывает, что схемы (33) – (35) и (36) для формулы Хаусдорфа *не эквивалентны*.

По мнению автора, правильным является выражение (42 б), т. е. формула (38), поскольку этот результат получен двумя независимыми способами. Этот же результат (38) мы получаем и при использовании формулы Хаусдорфа в виде [6]:

$$F(\hat{x},\hat{y}) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m} \sum_{(k_i,\, l_i)} \frac{\left[\hat{x}^{k_1}\hat{y}^{l_1} \ldots \hat{x}^{k_m}\hat{y}^{l_m}\right]}{k_1! l_1! \ldots k_m! l_m!},$$

где

$$F(\hat{x},\, \hat{y}) \equiv \hat{z} = \log\left[\exp(\hat{x})\exp(\hat{y})\right],$$

причем сумма берется по всем целым $k_i,\ l_i$ таким, что $k_i \geq 0,\ l_i \geq 0,\ k_i + l_i \geq 1$. Здесь символ $\left[\hat{x}_1 \hat{x}_2 \ldots \hat{x}_n\right]$ обозначает

$$n^{-1}\left[\ldots\left[\left[\hat{x}_1 \hat{x}_2\right], \hat{x}_3\right], \ldots, \hat{x}_n\right].$$

4. Приложения.

А. Рассмотрим операторную экспоненту

$$\hat{S}(t) = \exp\left[t\left(D + \varphi(x)\right)\right], \quad D = \partial/\partial x. \tag{43}$$

Представим оператор (43) в виде

$$\hat{S}(t) = \exp\left[\alpha(x, t)\right]\exp(tD), \quad D = \partial/\partial x, \ \ \alpha(x, 0) = 0. \tag{44}$$

Дифференцируя (44) по t, получаем

$$(D + \varphi(x))\, e^{\alpha(x,t)} e^{tD} - e^{\alpha(x,t)} e^{tD} D = \alpha'_t(x,t)\, e^{\alpha(x,t)} e^{tD}.$$

Подействуем на это уравнение справа оператором

$$(e^{\alpha(x,t)} e^{tD})^{-1} = e^{-tD} e^{-\alpha(x,t)},$$

имеем

$$D + \varphi(x) - e^{t(D+\varphi)} D e^{-t(D+\varphi)} = \alpha'_t(x,t). \tag{45}$$

Применим к (45) формулу Кубо [8]:

$$e^{At} B e^{-At} = B + \int_0^t d\tau e^{\tau A}[A, B] e^{-\tau A} =$$

$$= B + t[A, B] + (t^2/2!)[A,[A, B]] + \ldots + (t^n/n!)[A_n, B] + \ldots, \tag{46}$$

где $[\ ,\ ]$ — коммутатор. Тогда получаем

$$D + \varphi(x) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}\left[(D+\varphi)_n, D\right] = \alpha'_t(x,t). \tag{47}$$

Член с $n = 0$ равен D, а член с $n = 1$ равен

$$t\left[(D+\varphi), D\right] = t\left[\varphi, D\right] = -tD\varphi(x),$$

и, далее, n-й член равен $-(t^n/n!)D^n\varphi(x)$. Тогда из (47) получаем

$$\int_0^t \left[\varphi(x) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tau^n}{n!}\frac{d^n\varphi}{dx^n}\right] d\tau = \alpha(x,t) - \alpha(x,0) = \alpha(x,t).$$

Поскольку $\partial_x \varphi(x+t) = \partial_t \varphi(x+t)$, то имеем

$$\varphi(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \frac{\partial^n \varphi(x+t)}{\partial t^n}\bigg|_{t=0} = \varphi(x+t),$$

т. е.

$$\alpha(x,t) = \int_0^t \varphi(x+\tau)d\tau,$$

и оператор $\hat{S}(t)$ имеет вид

$$\hat{S}(t) = \exp\left[t(D+\varphi)\right] = \exp\left[\int_0^t d\tau \varphi(x+\tau)\right] e^{tD}. \tag{48}$$

B. Рассмотрим оператор

$$\hat{S}(t) = \exp\left[t(ax+bD^2)\right] = \exp\left[t(A+B)\right],$$

$$A = ax, \quad B = bD^2, \quad D = \partial/\partial x. \tag{49}$$

Поскольку

$$[A,B] \equiv C = -2aBD, \quad [A,C] = 2a^2b, \quad [B,C] = 0, \tag{50}$$

то будем искать оператор (49) в виде

$$e^{t(A+B)} = f(t)e^{\alpha(t)A}e^{\beta(t)C}e^{\gamma(t)B}, \quad f(0) = 1, \quad \alpha(0) = \beta(0) = \gamma(0) = 0. \tag{51}$$

Дифференцируем (51) по t:

$$(A+B)e^{t(A+B)} = f'(t)e^{\alpha(t)A}e^{\beta(t)C}e^{\gamma(t)B} + \alpha'(t)f(t)Ae^{\alpha(t)A}e^{\beta(t)C}e^{\gamma(t)B} +$$
$$+ \beta'(t)f(t)e^{\alpha(t)A}Ce^{\beta(t)C}e^{\gamma(t)B} + \gamma'(t)f(t)e^{\alpha(t)A}e^{\beta(t)C}Be^{\gamma(t)B}. \tag{52}$$

Подействуем на (52) справа оператором

$$e^{-t(A+B)} = f^{-1}(t)e^{-\gamma(t)B}e^{-\beta(t)C}e^{-\alpha(t)A}.$$

Имеем

$$A + B = f'/f + \alpha' A + \beta' e^{\alpha A}Ce^{-\alpha A} + \gamma' e^{\alpha A}e^{\beta C}Be^{-\beta C}e^{-\alpha A}. \tag{53}$$

Для вычисления последних двух слагаемых в правой части (53) применим формулу Кубо (46). Тогда последовательно получаем

$$e^{\alpha A}Ce^{-\alpha A} = C + \int_0^\alpha d\tau\, e^{\tau A}[A,C]e^{-\tau A} = C + 2\alpha a^2 b;$$

$$e^{\alpha A}e^{\beta C}Be^{-\beta C}e^{-\alpha A} = e^{\alpha A}Be^{-\alpha A} = B + \int_0^\alpha d\tau\, e^{\tau A}[A,B]e^{-\tau A} =$$

$$= B + \int_0^\alpha d\tau\, e^{\tau A}Ce^{-\tau A} = B + \alpha(t)\,C + \alpha^2(t)\,a^2 b, \tag{54}$$

где мы учли соотношения (50). Подставляя (54) в (53) и приравнивая коэффициенты при операторах в левой и правой частях полученного уравнения, получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\alpha'(t) = 1, \quad \gamma'(t) = 1, \quad \beta'(t) + \gamma'(t)\alpha(t) = 0;$$

$$f'(t)/f(t) + (2\beta'\alpha + \gamma'\alpha^2)\,a^2 b = 0,$$

где штрих означает производную по времени t. Отсюда последовательно находим

$$\alpha(t) = t, \quad \gamma(t) = t, \quad \beta(t) = -(t^2/2), \quad f(t) = \exp\left[(t^3/3)a^2 b\right],$$

где мы учли начальные условия (51). Теперь окончательно для оператора (49) находим

$$e^{t(ax + bD^2)} = e^{(t^3/3)a^2 b}\, e^{atx}\, e^{abt^2 D}\, e^{btD^2}, \tag{55}$$

где $D = \partial / \partial x$.

Аналогично можно получить и другие формулы для операторных экспонент, которые мы использовали в тексте настоящей работы. Мы приведем их здесь без доказательства. Оператор $\hat{S}(t)$ имеет вид

$$\hat{S}(t) = e^{t(aD^2 + bx^2)} = e^{\alpha(t)bx^2}\, e^{\beta(t)2ab(1+2xD)}\, e^{\alpha(t)aD^2}, \tag{56}$$

где $D = \partial / \partial x$ и

$$\alpha(t) = (2/\lambda)^{1/2}\,\mathrm{th}\,[(\lambda/2)^{1/2} t], \quad \beta(t) = (2/\lambda)\ln\mathrm{ch}\,[(\lambda/2)^{1/2} t], \quad \lambda = -8ab.$$

Аналогично

$$\hat{S}(t) = \exp\left[t\left(aD^2 + bD + cx^2\right)\right] = \exp\left\{\frac{b^2}{2a}\left[\frac{t}{2} + \frac{1}{\alpha}\,\mathrm{sh}(\alpha t)\left(\mathrm{sh}^2(\alpha t/2) - 1/2\right)\right]\right\} \times$$

$$\times\; e^{(b/\alpha)\,\mathrm{sh}(\alpha t)D}\, e^{-(b/a)\,\mathrm{sh}^2(\alpha t/2)x}\, e^{t(aD^2 + cx^2)},$$

где $\alpha = 2(ac)^{1/2}$, а $\exp[t(aD^2 + cx^2)]$ определяется формулой (56), которую ранее получали многие авторы различными методами.

1. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. В 4-х т. – М.: Наука, 1986.
2. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П.* Физическая кинетика. – М.; Наука, 1984. – 528 с.
3. *Фущич В. И., Штелень В. М., Серов Н. И.* Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики. – Киев.: Наук. думка, 1989. – 316 с.
4. *Magnus W.* On the exponential solution of differential equations for a linear operators // Communs Pure and Appl. Math. – 1954. – 7. – P. 649 – 673.
5. *Wilcox R. M.* Exponential operators and parameter differentiation in quantum physics // J. Math. Phys. – 1967. – № 4. – P. 962 – 982.
6. *Желобенко Д. П., Штерн А. И.* Представления групп Ли. – М.: Наука, 1983. – С. 108 – 109.
7. *Займан Дж.* Современная квантовая теория. – М.: Мир, 1971.– 288 с.
8. *Кубо Р.* Статистическая механика. – М.: Мир, 1967.– 452 с.

Получено 19.03.92