УДК 517.946

Л. І. Корбут, науков. співробітн.,
М. І. Матійчук, д-р фіз. мат. наук (Чернівец. ун-т)

ПРО ЗОБРАЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ НЕЛОКАЛЬНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ

We study two-point boundary-value problems for parabolic equations, whose solutions are represented by the Green functions of the Cauchy problem.

Вивчаються двоточкові крайові задачі для параболічних рівнянь, розв'язки яких зображаються за допомогою функцій Гріна задачі Коші.

1. Задача Діріхле. В шарі $\Pi = (0, T) \times E_n$ розглянемо крайову задачу для рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + f(t, x), \tag{1}$$

$$\mu u|_{t=0} = u|_{t=T} + \varphi(x), \quad \mu \in E_1. \tag{2}$$

Нехай $\varphi(x)$ і $f(t, x) \in c_x^{0(\hat{\alpha})}(\Pi)$, $\hat{\alpha} \geq (n-1)/2$, $n > 2$ [1, 2, с. 364]. За допомогою перетворення Фур'є і теореми про перетворення Фур'є згортки [3, с. 179] розв'язок задачі (1), (2) можемо записати у вигляді

$$u(t, x) = \int_{E_n} G(t, x-\xi, \mu)\varphi(\xi)\, d\xi + \mu \int_0^t d\tau \int_{E_n} G(t-\tau, x-\xi, \mu) f(\tau, \xi)\, d\xi +$$

$$+ \int_t^T d\tau \int_{E_n} G(T+t-\tau, x-\xi, \mu) f(\tau, \xi)\, d\xi, \tag{3}$$

де

$$G(t, x, \mu) = (2\pi)^{-n} \int_{E_n} \frac{\exp\{-|\sigma|^2 t + i\sigma x\}}{\mu - \exp\{-|\sigma|^2 T\}}\, d\sigma. \tag{4}$$

Інтеграл (4) збігається рівномірно і абсолютно при $\mu > 1$ і $\mu < 0$. Якщо $\mu = 1$, то він рівномірно збіжний лише при $n > 2$. Нехай $|\mu| > 1$, тоді функцію Гріна задачі (1), (2) можна записати таким чином:

$$G(t, x, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^{-k-1} G_0(t + kT, x), \tag{5}$$

де

$$G_0(t, x) = \left(2\sqrt{\pi t}\right)^{-n} \exp\left\{-|x|^2/4t\right\}$$

— фундаментальний розв'язок рівняння теплопровідності.

Розглянемо об'ємний потенціал з формули (3):

$$W(t, x, \mu) = \int_0^t d\tau \int_{E_n} G_0(t-\tau, x-\xi) f(\tau, \xi)\, d\xi +$$

$$+ \int_0^t d\tau \int_{E_n} \sum_{k=1}^{\infty} \mu^{-k-1} G_0(t + kT - \tau, x-\xi) f(\tau, \xi)\, d\xi \equiv W_0 + W_1. \tag{6}$$

Згідно з лемою про диференціювання об'ємного потенціалу [4, с. 21] якщо $f(t,x) \in C_x^{(\alpha)}(\Pi)$ лише з $\alpha \in (0,1)$, то W_0 має неперервні похідні по t, x, які входять у рівняння (1), причому W_0 задовольняє рівняння (1) і нульову початкову умову. Для $W_1(t,x,\mu)$ справедливе таке твердження.

Лема. *Якщо $f(t,x)$ належить класу $L_1(\Pi)$ (неперервна і абсолютно сумовна), то потенціал $W_1(t,x,\mu)$ має неперервні похідні по x другого порядку включно, які вираховуються безпосередньо під знаком інтеграла, і похідну по t:*

$$\frac{\partial W_1}{\partial t} = \int_{E_n} \sum_{k=1}^{\infty} \mu^{-k-1} G_0(kT, x-\xi) f(\tau,\xi)\, d\xi +$$

$$+ \int_0^t d\tau \int_{E_n} \sum_{k=1}^{\infty} \mu^{-k-1} \frac{\partial}{\partial t} G_0(t+kT-\tau, x-\xi) f(\tau,\xi)\, d\xi, \tag{7}$$

для якої справджується нерівність

$$\left|\frac{\partial}{\partial t} W_1\right| \le C \sum_{k=1}^{\infty} \mu^{-k-1} (kT)^{-n/2} \sup_{0\le t\le T} \int_{E_n} \left| f(t,\xi)\right| d\xi. \tag{8}$$

На основі цих тверджень доводиться теорема про розв'язок задачі (1), (2).

Теорема 1. *Якщо $\mu > 1$ і $n \ge 1$ або $\mu = 1$ і $n > 2$, то для будь-якої функції $f \in C_x^{(\alpha)}(\Pi) \cap L_1(E_n)$, неперервної по t, і будь-якої $\varphi \in L_1(E_n) \cap C(E_n)$ розв'язок задачі (1), (2) визначається формулою (3), де функція Гріна*

$$G(t,x,\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} G_0(t+kT, x) \mu^{-k-1},$$

$G_0(T,x)$ — фундаментальний розв'язок рівняння теплопровідності.

2. Задача Неймана. Для рівняння (1) в області $\Pi = (0,T) \times E_n$ розглянемо крайову умову

$$\mu B(D) u(t,x)\big|_{t=0} = B(D) u(t,x)\big|_{t=T} + \varphi(x), \quad B(D) \equiv \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{9}$$

Аналогічно до задачі Діріхле розв'язок задачі Неймана (1), (9) одержимо у вигляді

$$U(t,x,\mu) = \int_{E_n} \Gamma(t, x-\xi, \mu) \varphi(\xi)\, d\xi + \mu \int_0^t d\tau \int_{E_n} G(t-\tau, x-\xi, \mu) f(\tau,\xi)\, d\xi +$$

$$+ \int_t^T d\tau \int_{E_n} G(T+t-\tau, x-\xi, \mu) f(\tau,\xi)\, d\xi. \tag{10}$$

Тут

$$\Gamma(t,x,\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^{-k-1} \Gamma_0(t+Kt, x), \tag{11}$$

$$\Gamma_0(t,x) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{E_n} e^{-|\sigma|^2 t + i\sigma x} \frac{d\sigma}{B(i\sigma)}; \tag{12}$$

$\Gamma_0(t,x)$ знаходимо як розв'язок задачі

$$B(D)\Gamma_0(t,x) = G_0(t,x), \tag{13}$$

$$\Gamma_0(t,-x) = -\Gamma_0(t,x), \quad \Gamma_0(t,x) = O(t^{-(n-1)/2}), \quad t \to +0, \tag{14}$$

який має вигляд

$$\Gamma_0(t,x) = b_m^{-1} \int\limits_0^{x_m} G_0(t, x_1, \ldots, \xi_m, \ldots, x_n) d\xi_m, \quad b_m \neq 0. \tag{15}$$

Враховуючи результат з п. 1, маємо таку теорему.

Теорема 2. *Якщо* $\mu > 1$ *і* $n \geq 1$ *або* $\mu = 1$ *і* $n > 3$, *то для будь-якої функції* $\varphi \in L_1(E_n)$, *будь-якої функції* $f(t,x) \in C_x^{(\alpha)}(\Pi) \cap L_1(E_n)$, *неперервної за* t, *розв'язок задачі* (1), (9) *визначається формулою* (10).

Якщо $x\varphi(x) \in L_1(E_n)$, *то при* $\mu > 1$ *і* $n \geq 1$ *або* $\mu = 1$ *і* $n > 2$ *для будь-якої функції* $f \in C_x^{(\alpha)}(\Pi) \cap L_1(E_n)$, *неперервної по* t, *розв'язок задачі* (1), (9) *визначається формулою* (10).

3. Крайова задача для загального рівняння. Для параболічного рівняння зі сталими коефіцієнтами розглянемо крайову задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{1 \leq |k| \leq 2b} A_k D_x^k u + A_0 u + f(t,x), \tag{16}$$

$$\mu u|_{t=0} = u|_{t=T} + \varphi(x), \quad \mu \in E_1. \tag{17}$$

Розглянемо

$$P(i\sigma) = \sum_{1 \leq |k| \leq 2b} A_k (i\sigma)^k + A_0, \quad \sigma \in E_n.$$

Як і в п. 1, за допомогою перетворення Фур'є розв'язок задачі (16), (17) можна знайти за формулою (3), у якій ядро інтегральних операторів має вигляд

$$G(t,x,\mu) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{E_n} e^{i\sigma x + P(i\sigma)t} \left(\mu - \exp\left(P(i\sigma)T\right)\right)^{-1} d\sigma. \tag{18}$$

За умовою параболічності

$$\operatorname{Re} P(i\sigma) \leq -\delta_0 |\sigma|^{2b} + \sum_{1 \leq |k| \leq 2b} \operatorname{Re}\left(A_k (i\sigma)^k\right) + \operatorname{Re} A_0,$$

звідси випливає, що існує a_0 таке, що

$$\operatorname{Re} P(i\sigma) \leq -\delta_1 |\sigma|^{2b} + a_0 + \operatorname{Re} A_0, \quad 0 < \delta_1 < \delta_0. \tag{19}$$

Отже, інтеграл (18) рівномірно і абсолютно збігається при $|\mu| > \exp\{(a_0 + \operatorname{Re} A_0)T\}$ і $n \geq 1$, зокрема при $|\mu| \geq 1$, якщо $\operatorname{Re} A_0 + a_0 < 0$, причому

$$G(t,x,\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^{-k-1} G_0(t + kT, x), \tag{20}$$

де $G_0(t,x)$ — функція Гріна задачі Коші [5, с. 44].

Теорема 3. *Якщо* $|\mu| > e^{(\operatorname{Re} A_0 + a_0)T}$ *або* $|\mu| \geq 1$ *і* $\operatorname{Re} A_0 + a_0 < 0$, *то для будь-якої функції* $f \in C_x^{(\alpha)}(\Pi) \cap L_1(E_n)$, *неперервної за* t, *і будь-якої* $\varphi \in C(E_n) \cap L_1(E_n)$ *розв'язок задачі* (16), (17) *визначається формулою* (3) *з функцією* (20) *в інтегральних операторах.*

4. Задача оптимізації у випадку задачі Діріхле. Розглянемо двоточкову крайову задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + f(t, x), \tag{21}$$

$$u\big|_{t=0} - u\big|_{t=T} = \mu\varphi(x), \quad \mu \in E_1, \; x \in E_n. \tag{22}$$

Розв'язок задачі (21), (22) має вигляд

$$U(t, x, \mu) = \mu \int_{E_n} G(t, x-\xi, \mu)\varphi(\xi)d\xi + \\ + \int_0^t d\tau \int_{E_n} G(t-\tau, x-\xi, 1) f(\tau, \xi)d\xi + \\ + \int_t^T d\tau \int_{E_n} G(t+T-\tau, x-\xi, 1) f(\tau, \xi)d\xi. \tag{23}$$

Розглянемо оптимізацію такого функціоналу:

$$J(\mu) = \int_{E_n} |u(T, x, \mu)|^2 dx \to \min_{\mu}. \tag{24}$$

Серед припустимих керувань $\mu \in E_1$ будемо шукати таке μ_0, на якому досягається мінімум функціоналу (24), де T — заданий момент часу, $U(t, x, \mu)$ — дійснозначний розв'язок задачі (21), (22). З умови $J'(\mu_0) = 0$ знаходимо оптимальне керування

$$\mu_0 = -\frac{\int_{E_n} \left[\int_{E_n} G(T, x-\xi, 1)\varphi(\xi)d\xi \int_0^T d\tau \int_{E_n} G(T-\tau, x-\xi, 1) f(\tau, \xi)d\xi \right] dx}{\int_{E_n} \left[\int_{E_n} G(T, x-\xi, 1)\varphi(\xi)d\xi \right]^2 dx}. \tag{25}$$

Теорема 4. *Якщо* $n > 4$, *функція* $\varphi(x) \in C(E_n) \cap L_1(E_n)$ *і*

$$f \in C_x^{(\alpha)}(\Pi) \cap L_1(E_n),$$

то розв'язок задачі (21), (22) *визначається формулою* (23), *де функція Гріна*

$$G(t, x, 1) = \sum_{k=0}^{\infty} G_0(t + kT, x),$$

G_0 *— фундаментальний розв'язок рівняння теплопровідності. Існує і єдине оптимальне керування* μ_0 *задачі* (21), (22), (24), *яке знаходиться за формулою* (25).

5. Задача оптимізації у випадку задачі Неймана. Розглянемо двоточкову крайову задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + f(t,x), \quad (t,x) \in \Pi, \tag{26}$$

$$B(D)u\big|_{t=0} = B(D)u\big|_{t=T} + \mu\varphi(x), \quad \mu \in E_1. \tag{27}$$

Розв'язок задачі (26), (27) має вигляд:

$$U(t,x,\mu) = \mu \int_{E_n} \Gamma(t, x-\xi)\varphi(\xi)d\xi +$$

$$+ \int_0^t d\tau \int_{E_n} G(t-\tau, x-\xi) f(\tau,\xi)d\xi + \int_t^T d\tau \int_{E_n} G(T+t-\tau, x-\xi) f(\tau,\xi)d\xi, \tag{28}$$

де

$$\Gamma(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} \Gamma_0(t+kT, x)$$

при $n>3$, $\Gamma_0(t,x)$ знайдено в п. 2.

Розглянемо задачу оптимізації (26), (27), (24). З рівності $J'(\mu_0) = 0$ знаходимо оптимальне керування

$$\mu_0 = -\frac{\int_{E_n}\left[\int_{E_n} \Gamma(T, x-\xi)\varphi(\xi)d\xi \int_0^T d\tau \int_{E_n} G(T-\tau, x-\xi) f(\tau,\xi)d\xi\right] dx}{\int_{E_n}\left[\int_{E_n} \Gamma(T, x-\xi)\varphi(\xi)d\xi\right]^2 dx}. \tag{29}$$

Використовуючи результати п. 2 і п. 4, маємо таку теорему.

Теорема 5. *Якщо* $n>6$, *функція* $\varphi \in C(E_n') \cap L_1(E_n)$ *і* $f \in C_x^{(\alpha)}(\Pi) \cap \cap L_1(E_n)$, *то розв'язок задачі* (26), (27) *визначається формулою* (28). *Існує і єдине оптимальне керування* μ_0 *задачі* (26), (27), (24), *яке знаходиться за формулою* (29).

1. *Сущ В. К.* Управление в нелокальных граничных задачах. Дифференциальные уравнения. Т. 25, № I-М. – М.: Наука, 1989. – 254 с.
2. *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Основы математического анализа: В 3-х т. – М.: Наука, 1973. – Т. 2. – 447 с.
3. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Пространства основных и обобщенных функций. – М.: Физматгиз, 1958.
4. *Эйдельман С. Д.* Параболические системы. – М.: Наука, 1964. – 443 с.

Получено 15.07.92