УДК 517.946

Г. Д. Оруджев, канд. физ.-мат. наук (Бакин. ун-т)

ПОЛИНОМИАЛЬНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

The Cauchy problem for higher order differential-operator equations is considered in a Banach space. A polynomial approximation is constructed.

Розглядається задача Коші для диференціально-операторних рівнянь вищих порядків у банаховому просторі; побудовані поліноміальні наближення розв'язків.

Рассмотрим задачу Коши

$$U^{(n)}(t) + a_1 A U^{(n-1)}(t) + \ldots + a_n A^n U(t) = 0, \quad t \in [0, T], \tag{1}$$

$$U^{(k)}_{(0)} = u_k, \quad u_k \in \mathcal{D}(A^{n-k}), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{2}$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — комплексные числа, $a_n \neq 0$, A — обратимый замкнутый линейный оператор с плотной областью определения $\mathcal{D}(A)$ в банаховом пространстве E такой, что iA порождает сильно непрерывную группу. Предположим, что корни ω_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, характеристического уравнения $\omega^n + a_1\omega^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ чисто мнимые и различные.

Как показано в [1], задача (1), (2) имеет единственное решение, представимое в виде

$$U(t) = \sum_{k=1}^{n} e^{\omega_k At} A^{-k} g_k, \tag{3}$$

где $g_k \in E$, $e^{\omega_k At}$ — группа операторов, порожденная $\omega_k A$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

В настоящей статье строятся полиномы от A, с помощью которых приближается решение задачи (1), (2) на гладких векторах оператора A. В случае, когда $n = 1, 2$, E — гильбертово пространство, подобная задача рассматривалась в [2, 3].

Обозначим через Δ_n определитель Вандермонда, составленный из чисел ω_1, $\omega_2, \ldots, \omega_n$, а через $\Delta_{n,k}$ — определитель, полученный из Δ_n заменой k-го столбца на $u_0, A^{-1}u_1, \ldots, A^{-(n-1)}u_{n-1}$. Нетрудно показать, что

$$\Delta_{n,k} = (-1)^{n+k}(\alpha_0^k u_0 + \alpha_1^k A^{-1} u_1 + \ldots +$$
$$+ \alpha_{n-2}^k A^{-(n-2)} u_{n-2} + A^{-(n-1)} u_{n-1})\overline{\Delta}_{n-1,k}$$

($\overline{\Delta}_{n-1,k}$ есть Δ_n (без n-й строки, k-го столбца)), где $\alpha_0^k, \alpha_1^k, \ldots, \alpha_{n-2}^k$ определяются как коэффициенты Виета приведенного уравнения $(n-1)$-го порядка, корнями которого являются числа $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{k-1}, \omega_{k+1}, \ldots, \omega_n$, $k = 1, 2, \ldots, n$, $\alpha_{n-1}^k = 1$. Тогда решение $U(t)$ задачи (1), (2) выражается через начальные данные u_k, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, как

$$U(t) = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=1}^{n} c_{k,j}\, e^{\omega_k At} A^{-j} u_j, \tag{4}$$

где $c_{k,j} = (-1)^{n+k}(\Delta_{n-1,k}/\Delta_n)\alpha_j^k$. В силу обратимости оператора A и равенства

$$e^{\omega_k At} A^{-1} u = \omega_k \int_0^t e^{\omega_k A\xi} u \, d\xi + A^{-1} u$$

из [4] для сильно непрерывных полугрупп $e^{\omega_k At}$ представление (4) приводится к виду

$$U(t) = \sum_{k=1}^{n} c_{k,0} e^{\omega_k At} u_0 + \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n} c_{k,j} \left[\omega_k^j \int_0^t \ldots \int_0^{t_{j-1}} e^{\omega_k At_j} u_j dt_1 \ldots dt_j + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{j-1} \frac{(\omega_{kt})^{j-k}}{(j-k)!} A^{-k} u_j + A^{-j} u_j \right]. \tag{5}$$

Для приближения решения $U(t)$ задачи (1), (2) построим полиномиальные приближения для операторов $e^{\omega_k At}$ и A^{-j}, $k = 1, 2, \ldots, n$; $j = 0, 1, \ldots, n-1$.

Положим

$$C_{\{m_k\}}(A) = \left\{ x \in \bigcap_{k=0}^{\infty} \mathcal{D}(A^k) \;\middle|\; \exists \alpha > 0, \exists c > 0, \|A^k x\| \le c\alpha^k m_k \right\},$$

$$C_{\{m_k\}}(A) = \left\{ x \in \bigcap_{k=0}^{\infty} \mathcal{D}(A^k) \;\middle|\; \forall \alpha > 0, \exists c > 0, \|A^k x\| \le c\alpha^k m_k \right\},$$

где $\{m_k\}$ — неубывающая последовательность положительных чисел со свойством: $\exists M > 0$, $\exists h > 0$: $m_{k+1} \le M h^k m_k$. Векторы из $C_{\{k!\}}(A)$ и $C_{(k!)}(A)$ называются соответственно аналитическими и целыми для оператора A. Будем предполагать, что группа $e^{\omega_k At}$ равномерно ограничена; тогда $C_{\{k!\}}(A) = E$ (см., например, [5]).

В дальнейшем понадобится формула

$$e^{\omega_k At} = C(t, \omega_k^2 A^2) + \omega_k A S(t, \omega_k^2 A^2), \tag{6}$$

где $C(t, \omega_k^2 A^2)$ — косинус оператор-функция с генератором $\omega_k^2 A^2$, $S(t, \omega_k^2 A^2)$ — ассоциированная с нею синус оператор-функция, имеющая вид [6]

$$S(t, \omega_k^2 A^2) = \int_0^t C(\xi, \omega_k^2 A^2) \, d\xi.$$

Лемма 1. *Если* $u \in C_{\{m_k\}}(A^2)$, $u \in C_{(m_k)}(A^2)$, *то*

$$\exists c > 0, \exists \rho = \rho(T) > 0 \; (\forall \rho > 0, \exists c > 0): \forall t \in [0, T]$$

$$\left\| e^{\omega_k At_u} - \sum_{m=0}^{l-1} \frac{(\omega_k t)^{2m}}{(2m)!} A^{2m} u - \sum_{m=0}^{l-1} \frac{(\omega_k t)^{2m+1}}{(2m+1)!} A^{2m+1} u \right\| \le$$

$$\le c \frac{m_l}{(2l)!} \rho^l, \quad k = 1, 2, \ldots n. \tag{7}$$

Доказательство. Пусть $u \in C_{\{m_k\}}(A^2)$, $u \in C_{(m_k)}(A^2)$. Используя ограниченность косинус оператор-функции на отрезке $[0, T]$ и формулу Тейлора

$$C(t,\omega_k^2 A^2)u = \sum_{m=0}^{l-1} \frac{(\omega_k t)^{2m}}{(2m)!} A^{2m}u + \int_0^t \frac{(t-\xi)^{2l-1}}{(2l-1)!} C(\xi,\omega_k^2 A^2)\,\omega_k^{2l} A^{2l}\, d\xi$$

из [6], получаем

$$\left\| C(t,\omega_k^2 A^2)u - \sum_{m=0}^{l-1} \frac{(\omega_k t)^{2m}}{(2m)!} A^{2m}u \right\| \le c_1 \frac{m_l}{(2l)!} \rho_1^l. \tag{8}$$

Аналогичное неравенство справедливо и для синус оператор-функции:

$$\left\| S(t,\omega_k^2 A^2)u - \sum_{m=0}^{l-1} \frac{t(\omega_k t)^{2m}}{(2m+1)!} A^{2m}u \right\| \le c_2 \frac{m_l}{(2l+1)!} \rho_2^l. \tag{9}$$

Из (6), (8) и (9) следует (7) с $c = \max\{c_1, c_2\}$, $\rho = \max\{\rho_1, \rho_2\}$.

Лемма 2. *Если* $u \in C_{\{m_k\}}(A^2)$, $u \in C_{(m_k)}(A^2)$, *то*

$$\exists\, c > 0,\ \exists\, \rho = \rho(T) > 0 \ (\forall\, \rho > 0,\ \exists\, c > 0):\ \forall\, t \in [0,T]$$

$$\left\| \int_0^t \ldots \int_0^t e^{\omega_k A t_{j-1}} u\, dt_1 \ldots dt_j - \sum_{m=1}^{l-1} \frac{t^j(\omega_k t)^{2m}}{(2m+j)!} A^{2m} u - \right.$$

$$\left. - \sum_{m=1}^{l-1} \frac{t^j(\omega_k t)^{2m+1}}{(2m+1+j)!} A^{2m+1} u \right\| \le c \frac{m_l}{(2l+j)!} \rho^l, \qquad j = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Доказательство вытекает из (6) путем кратного интегрирования с учетом формулы Тейлора для косинус и синус оператор-функций и неравенства (8) и (9).

Обозначим через E^* пространство, сопряженное с E. Пусть $f \in E^*$. Тогда выражение $(A^n v, f)$ определяет на $\mathcal{D}(A^m)$, $m \ge 0$, линейный функционал $A^{m*}f : A^{m*}f = (A^k v, f)$, $f \in \mathcal{D}(A^m)$. В работе [7] указана конструкция полиномов $R_l^k(A)$, для которых при любых $m, k \ge 0$ и $u \in C_{\{k!\}}(A)$ выполняется соотношение

$$|(A^{-k}u, A^{m*}f) - (R_l^k(A)u, A^{m*}f)| < \varepsilon_l \|f\|, \quad \varepsilon_l \to 0, \quad l \to \infty. \tag{10}$$

Теорема. *Если начальные данные* u_k, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, *задачи Коши* (1), (2) *принадлежат множеству* $C_{\{k!\}}(A^2)$, *то существуют полиномы* $P_l^k(A,t)$, $Q_l^{k,j}(A,t)$ *и* $R_l^k(A)$ *такие, что*

$$U(t) = \lim_{l\to\infty} \left\{ \sum_{k=1}^{n} c_{k,0} P_l^k(A,t) u_0 + \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n} c_{k,j} \left[\omega_k^j Q_l^{k,j}(A,t) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sum_{k=1}^{j} \frac{(\omega_k t)^{j-k}}{(j-k)!} R_l^k(A) \right] u_j \right\},$$

предел понимается в слабом смысле при каждом $t \in [0,T]$ *в пространстве* E.

Доказательство. Обозначим

$$P_l^k(A,t) = \sum_{m=0}^{l} \frac{(\omega_k t)^{2m}}{(2m)!} A^{2m} + \sum_{m=0}^{l} \frac{(\omega_k t)^{2m+1}}{(2m+1)!} A^{2m+1},$$

$$Q_l^{k,j}(A,t) = \sum_{m=0}^{l} \frac{t^j(\omega_k t)^{2m}}{(2m+j)!} A^{2m} +$$

$$+ \sum_{m=0}^{l} \frac{t^j(\omega_k t)^{2m+1}}{(2m+1+j)!} A^{2m+1}, \quad j = 1, 2, \dots, n-1,$$

а через $R_l^k(A)$ — полиномы, построенные в [7]. На основании лемм 1, 2 и соотношения (10) с помощью формулы (5) получаем доказательство сформулированного в теореме утверждения.

Замечания **1.** Если все операторы $\omega_k A$, $j = 1, 2, \dots, n$, генерируют полугруппы класса C_0, то теорема верна и тогда, когда начальные данные являются элементами множества $C_{(k!)}(A^2)$.

2. Если рассматривать задачу Коши (1), (2) при условии $u_1 = u_2 = \dots = u_{n-1} = 0$, то неравенство (7) для решения

$$u(t) = \sum_{k=1}^{n} u_{k,0} e^{\omega_k A t} u_0$$

эквивалентно принадлежности $u_0 \in C_{\{k!^\beta\}}(A^2)$, $0 < \beta < 2$.

1. *Якубов С. Я.* Линейные дифференциально-операторные уравнения и их приложения. – Баку: Наука, 1985. – 220 с.
2. *Городецкий В. В., Горбачук М. Л.* О полиномиальном приближении решений дифференциально-операторных уравнений в гильбертовом пространстве // Укр. мат. журн. – 1984. – **36**, №4. – С. 500–502.
3. *Бабин А. В.* Построение и исследование решений дифференциальных уравнений методами теории приближения функций // Мат. сб. – 1984. – **123**, № 2. – С. 147–173.
4. *Голдстейн Дж.* Полугруппы линейных операторов и их приложения. – Киев: Вища шк., 1989. – 347 с.
5. *Горбачук В. И., Князюк А. В.* Граничные значения решений дифференциально-операторных уравнений // Успехи мат. наук, – 1989. – **44**, № 3. – С. 55–91.
6. *Васильев В. В., Крейн С. Г., Пискарев С. И.* Полугруппы операторов, косинус оператор-функции и линейные дифференциальные уравнения // Итоги науки и техники. Сер. мат. анализ / ВИНИТИ. – 1990. – **28**. – С. 87–202.
7. *Бабин А. В.* Выражение решения дифференциального уравнения через итерации дифференциальных операторов // Мат. сб. – 1978. – **105** (147), № 4. – С. 467–484.

Получено 27.04.92