УДК 517.968 + 517.956

И. Ю. Чудинович, д-р. физ.-мат. маук (Харьк. ун-т)

ЗАМЕЧАНИЕ О СВОЙСТВАХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ГРАНИЧНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ПОЛНОЙ ШКАЛЕ ПРОСТРАНСТВ ТИПА СОБОЛЕВСКИХ

Properties of boundary-value operators are established for the system of equations of the theory of elasticity in the complete scale of spaces of Sobolev type.

Встановлено ряд властивостей граничних операторів для системи рівнянь теорії пружності в повній шкалі просторів типу соболевських.

В [1, 2] изучены свойства разрешающих операторов в начально-краевых задачах для строго гиперболических по Лере – Волевичу систем дифференциальных уравнений в полной шкале пространств типа соболевских. Аналогичный вопрос, сформулированный для граничных уравнений, возникающих при решении начально-краевых задач методами теории запаздывающих потенциалов, рассматривается в данной статье. В качестве модели выбрана система уравнений теории упругости, не являющаяся строго гиперболической даже в простейшем случае изотропной среды. Изложенная ниже схема основана на идее метода транспонирования [3].

Пусть S — замкнутая гиперповерхность класса C^∞, разделяющая $\mathbb{R}^n$ на области Ω^+ (внутреннюю) и Ω^- (внешнюю). Смещение точки x однородной упругой среды в момент времени t обозначим через $u(x,t)=(u_1(x,t),\ldots,u_n(x,t))$. В отсутствие объемных сил $u(x,t)$ в областях $G^+=\Omega^+\times\mathbb{R}^+$ или $G^-=\Omega^-\times\mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}^+=(0,\infty)$, удовлетворяет уравнению

$$\rho\,\partial_t^2 u + Au = 0, \tag{1}$$

где ρ — плотность среды, которую мы положим равной единице, $\partial_t=\partial/\partial t$, A — матричный дифференциальный оператор анизотропной теории упругости

$$(Au)_i = -a_{ijkh}\partial_j\partial_k u_h, \quad \partial_j = \partial/\partial x_j. \tag{2}$$

Здесь и далее применяется правило суммирования от 1 до n по повторяющимся индексам; равенство, содержащее свободные индексы, считается справедливым при всех значениях этих индексов от 1 до n. В (2) $\{a_{ijkh}\}_{i,j,k,h=1}^n$ — тензор упругих постоянных среды, удовлетворяющий условиям симметричности и эллиптичности [4]. К уравнению (1) добавим начальные условия

$$u(x,+0) = (\partial_t u)(x,+0) = 0, \quad x\in\Omega^\pm. \tag{3}$$

Переходя к формулировке граничных условий, обозначим $\Sigma=S\times\mathbb{R}$, $\Sigma^+=S\times\mathbb{R}^+$. В первой задаче $\mathrm{I}^\pm$ (внутренней или внешней) известны предельные значения смещений $u^\pm(x,t)=f(x,t)$ при $(x,t)\to\Sigma^+$ из G^+ или G^- соответственно. Во второй задаче $\mathrm{II}^\pm$ известны граничные нормальные напряжения $(T_\nu u)^\pm(x,t)=g(x,t)$, где $(T_\nu u)_i = a_{ijkh}\nu_j(x)\partial_k u_h$, $\nu(x)$ — орт внешней относительно Ω^+ нормали к S в точке $x\in S$. В дальнейшем верхние индексы „$\pm$" обозначают предельные значения соответствующих величин при $(x,t)\to\Sigma^+$ из $G^\pm$ соответственно. Обобщенные постановки этих задач приведены в [5, 6]. Их решения ищутся в виде упругих запаздывающих потенциалов простого или двойного слоев. Основой построения этих потенциалов является матрица (тензор)

$\Phi(x, t)$ фундаментальных решений уравнения (1), удовлетворяющая условию причинности: $\Phi(x, t) = 0$ при $t < 0$. Легко убедиться в справедливости равенств $\Phi(x, t) = \Phi^{\mathrm{T}}(-x, t)$, где индекс „Т" обозначает операцию транспонирования [4]. Запаздывающие упругие потенциалы простого и двойного слоев с n-компонентными плотностями α, β строятся по формулам

$$(V_r\alpha)(x, t) = \int_{\Sigma} (\Phi_j(x-y, t-\tau), \alpha(y, \tau))\, e_j\, ds_y\, d\tau, \tag{4}$$

$$(W_r\beta)(x, t) = \int_{\Sigma} ((T_{\nu(y)}\Phi_j)(x-y, t-\tau), \beta(y, \tau))\, e_j\, ds_y\, d\tau, \tag{5}$$

где e_j — орт j-й оси, $(a, b) = a_i b_i$, Φ_j, $j = 1, \ldots, n$, — столбцы Φ. Очевидно, оба потенциала, по крайней мере, для гладких α, β удовлетворяют (1). Если же α и β равны нулю при $t < 0$, то удовлетворяются также условия (2). Представив решения задач $\mathrm{I}^{\pm}$, $\mathrm{II}^{\pm}$ в виде потенциалов простого или двойного слоя, после предельного перехода $(x, t) \to \Sigma^{+}$ получим граничные уравнения

$$\begin{array}{ccc} V_r\alpha = f, & & K_r^{\pm}\alpha = g, \\ & (\text{задача } \mathrm{I}^{\pm}) \qquad\qquad (\text{задача } \mathrm{II}^{\pm}) & \\ W_r^{\pm}\beta = f, & & F_r\beta = g. \end{array} \tag{6}$$

В (6) $V_r = V_r^{\pm}$ — оператор потенциала простого слоя, $W_r^{\pm}$ — операторы, сопоставляющие β предельные значения соответствующего потенциала двойного слоя, $K_r^{\pm}$ — операторы предельных значений нормальных граничных напряжений потенциала простого слоя, $F_r = F_r^{\pm}$ — двойного слоя.

Выбрав $T > 0$, будем решать уравнения (6) на $\Sigma_T = S \times (0, T)$. В [5, 6] приведены теоремы о разрешимости уравнений (6) в функциональных пространствах, которые в случае конечного интервала $(0, T)$ строятся по следующей схеме. Пусть $W_m^2(\Sigma)$ — стандартное подпространство С. Л. Соболева с номером $m \in \mathbb{R}$, $H_m(\Sigma) = \left[W_m^2(\Sigma)\right]^n$, $H_{r,m}(\Sigma^{+})$ — подпространство в $H_m(\Sigma)$, состоящее из вектор-функций, равных нулю при $t < 0$, $H_{r;m,k}(\Sigma^{+})$, $m, k \in \mathbb{R}$, состоит из равных нулю при $t < 0$ вектор-функций таких, что $\partial_t^k u \in H_{r,m}(\Sigma^{+})$ (∂_t^k — оператор дробного дифференцирования). Норма в $H_{r;m,k}(\Sigma^{+})$ вводится формулой $\|u\|_{m,k} = \|\partial_t^k u\|_m$, где $\|\cdot\|_m$ — норма в $H_{r,m}(\Sigma^{+})$. Пространства $H_{r;m,k}(\Sigma_T)$ образованы сужениями на Σ_T элементов пространств $H_{r;m,k}(\Sigma^{+})$, норма в $H_{r;m,k}(\Sigma_T)$ индуцирована нормой в $H_{r;m,k}(\Sigma^{+})$ [7]. Утверждения, полученные в [5, 6], в случае конечного интервала $(0, T)$ принимают следующий вид.

При всех $m \geq 1/2$, $k \in \mathbb{R}$ операторы

$$\begin{aligned} V_r &: H_{r;m-1,k}(\Sigma_T) \mapsto H_{r;m,k-1}(\Sigma_T), \\ W_r^{\pm} &: H_{r;m,k}(\Sigma_T) \mapsto H_{r;m,k-1}(\Sigma_T), \\ K_r^{\pm} &: H_{r;m-1,k}(\Sigma_T) \mapsto H_{r;m-1,k-1}(\Sigma_T), \end{aligned} \tag{7}$$

$$F_r:\ H_{r;m,k}(\Sigma_T)\mapsto H_{r;m-1,k-1}(\Sigma_T)$$

осуществляют непрерывные инъективные отображения в указанных парах пространств с плотными областями значений.

Эти же свойства имеют обратные операторы

$$\begin{gathered} V_r^{-1}:\ H_{r;m,k}(\Sigma_T)\mapsto H_{r;m-1,k}(\Sigma_T),\\ (W_r^{\pm})^{-1}:\ H_{r;m,k}(\Sigma_T)\mapsto H_{r;m,k-1}(\Sigma_T),\\ (K_r^{\pm})^{-1}:\ H_{r;m-1,k}(\Sigma_T)\mapsto H_{r;m-1,k-1}(\Sigma_T),\\ F_r^{-1}:\ H_{r;m-1,k}(\Sigma_T)\mapsto H_{r;m,k-1}(\Sigma_T), \end{gathered}\tag{8}$$

продолженные с плотных множеств на соответствующие пространства. Целью статьи является распространение этих утверждений на все $m\in\mathbb{R}$.

Построим опережающие потенциалы простого и двойного слоев $V_a\alpha$, $W_a\beta$ по формулам (4), (5) соответственно, в которых $\Phi(x,t)$ заменена на $\Psi(x,t)=$ $=\Phi(x,-t)$. Введенные потенциалы порождают граничные операторы V_a, $W_a^{\pm}$, $K_a^{\pm}$, F_a, определение которых аналогично определению соответствующих запаздывающих операторов. Введем также пространства $H_{a;m,k}(\Sigma_T)$, $m,k\in\mathbb{R}$, следуя схеме определения пространств $H_{r;m,k}(\Sigma_T)$, с той лишь разницей, что в построении $H_{a;m,k}(\Sigma_T)$ участвуют вектор-функции, равные нулю не при $t<0$, а при $t>T$. При всех $m,k\in\mathbb{R}$ пространства $H_{r;m,k}(\Sigma_T)$ и $H_{a;-m,-k}(\Sigma_T)$ двойственны относительно формы $\langle\cdot,\cdot\rangle_T$ — скалярного произведения в $[L^2(\Sigma_T)]^n$. Очевидно, для опережающих граничных операторов справедливы следующие утверждения (7), (8), в которых индекс r заменен индексом a. Обозначим через $\langle\cdot,\cdot\rangle$ скалярное произведение в $[L^2(\Sigma)]^n$.

Лемма. *Для любых вектор-функций* $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \varepsilon\in[C_0^\infty(\Sigma)]^n$ *справедливы равенства*

$$\begin{gathered} \langle V_r\alpha,\gamma\rangle=\langle\alpha,V_a\gamma\rangle,\quad \langle K_r^{\pm}\alpha,\gamma\rangle=\langle\alpha,W_a^{\mp}\gamma\rangle,\\ \langle W_r^{\pm}\beta,\varepsilon\rangle=\langle\beta,K_a^{\mp}\varepsilon\rangle,\quad \langle F_r\beta,\varepsilon\rangle=\langle\beta,F_a\varepsilon\rangle. \end{gathered}\tag{9}$$

Доказательство. Проверим, например, справедливость равенства $\langle W_r^{+}\beta,$ $\varepsilon\rangle=\langle\beta,K_a^{-}\varepsilon\rangle$. Известно [4], что

$$\begin{gathered} (W_r^{+}\beta)(x,t)=-\frac{1}{2}\beta(x,t)+\int\limits_{\Sigma}\Big(\big(T_{\nu(y)}\Phi_j\big)(x-y,t-\tau),\beta(y,\tau)\Big)e_j\,ds_y\,d\tau,\\ (K_a^{-}\varepsilon)(x,t)=-\frac{1}{2}\varepsilon(x,t)+\int\limits_{\Sigma}T_{\nu(x)}\Big(\Psi_j(x-y,t-\tau),\varepsilon(y,\tau)\Big)e_j\,ds_y\,d\tau, \end{gathered}\tag{10}$$

$(x,t)\in\Sigma$, причем интегралы в правых частях (10) следует понимать в смысле главного значения;

$$(W_r^{+}\beta,\varepsilon)=-\frac{1}{2}\langle\beta,\varepsilon\rangle+\int\limits_{\Sigma}\int\limits_{\Sigma}\overline{\varepsilon_j(x,t)}\,a_{ilkh}\nu_l(y)\times$$

$$\times \partial_{k,y}\Phi_{hj}(x-y, t-\tau)\beta_i(y,\tau)\,ds_y\,d\tau\,ds_x\,dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\langle\beta,\varepsilon\rangle + \left\langle \beta, \int\limits_{\Sigma} T_{\nu(x)}\Big(\Phi_j^T(y-x, \tau-t), \, \varepsilon(y,\tau)\Big)\, e_j\, ds_y\, d\tau \right\rangle = \left\langle \beta, K_a^- \varepsilon \right\rangle.$$

Аналогично проверяются остальные равенства в (9). Лемма доказана.

Теорема. *Отображения* (7), (8) *непрерывны при всех* $m, k \in \mathbb{R}$.

Доказательство приведем для случая оператора V_r. Определим оператор V_r на пространстве $H_{r;m-1,k}(\Sigma_T)$ при $m < 1/2$ как сопряженный к непрерывному оператору

$$V_a\colon H_{a;-m,-k+1}(\Sigma_T) \mapsto H_{a;-m+1,-k}(\Sigma_T).$$

Непрерывность отображения

$$V_r\colon H_{r;m-1,k}(\Sigma_T) \mapsto H_{r;m,k-1}(\Sigma_T)$$

следует из определения V_r. В силу леммы оператор V_r может быть также определен с помощью расширения по непрерывности оператора, действующего на гладкие вектор-функции по формуле (4). Соответствующее утверждение об операторе V_r^{-1} очевидно. Остальные утверждения теоремы доказываются аналогично.

1. *Ройтберг Я. А.* Граничные и смешанные задачи для общих гиперболических систем в полной шкале пространств типа соболевских // Докл. АН СССР. – 1991. – **318**, № 4. – С. 820–824.
2. *Ройтберг Я. А.* Задача Коши, граничные и смешанные задачи для общих гиперболических систем в полной шкале пространств типа соболевских // Нелинейн. гранич. задачи. – 1990. – № 2. – С. 93–98.
3. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. – М.: Мир, 1971. – 312 с.
4. *Угодчиков А. Г., Хуторянский Н. М.* Метод граничных элементов в механике деформируемого твердого тела. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1986. – 296 с.
5. *Чудинович И. Ю.* Граничные уравнения в задачах динамики упругих сред // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1990. – № 11. – С. 18–21.
6. *Чудинович И. Ю.* Метод граничных уравнений в динамических задачах теории упругости. – М., 1990. – 124 с. – Деп. в ВИНИТИ, № 3649-В90.

Получено 27.05.92