УДК 517.944.519.46

А. Ф. Баранник, Л. Ф. Баранник, доктора физ.-мат. наук (Полтав. пед. ин-т),
В. И. Фущич, чл.-корр. АН Украины (Ин-т математики АН Украины, Киев)

РЕДУКЦИЯ МНОГОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ДАЛАМБЕРА К ДВУМЕРНЫМ УРАВНЕНИЯМ

We give a classification of the maximal subalgebras of rank $n-1$ for the extended Poincaré algebra $A\tilde{P}(1, n)$, which is realized on the set of solutions of the d'Alembert equation $\Box u + \lambda u^k = 0$. These subalgebras are used for constructing the anzatses reducing this equation to differential equations with two invariant variables.

Проведена класифікація максимальних підалгебр рангу $n-1$ розширеної алгебри Пуанкаре $A\tilde{P}(1, n)$, яка реалізується на множині розв'язків рівняння Даламбера $\Box u + \lambda u^k = 0$. Одержані підалгебри використано для побудови анзаців, що редукують це рівняння до диференціальних рівнянь з двома інваріантними змінними.

1. Введение. В настоящей статье изучается редукция нелинейного уравнения Даламбера

$$\Box u + \lambda u^k = 0 \tag{1}$$

к двумерным уравнениям. Здесь $u = u(x)$ — скалярная функция переменной $u = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$, k — произвольное вещественное число, отличное от 1, а

$$\Box u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \ldots - \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}.$$

В [1, 2] установлено, что алгеброй инвариантности уравнения (1) является алгебра Ли $A\tilde{P}(1, n)$ расширенной группы Пуанкаре $\tilde{P}(1, n)$, базис которой образуют такие векторные поля:

$$J_{0a} = x_0\partial_a + x_a\partial_0, \quad J_{ab} = x_b\partial_a - x_a\partial_b, \quad P_\mu = \partial_\mu,$$
$$D = -x^\mu\partial_\mu + \frac{2}{k-1}u\partial_u,$$

где

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}, \quad \partial_u = \frac{\partial}{\partial u}, \quad a, b = 1, \ldots, n; \quad \mu = 0, 1, \ldots, n.$$

Это позволяет использовать подалгебры алгебры $A\tilde{P}(1, n)$ для проведения редукции уравнения (1) к дифференциальным уравнениям с меньшим числом переменных.

Если $\omega_1(x), \ldots, \omega_m(x), \omega_{m+1}(x, u)$ — полная система инвариантов некоторой подалгебры L алгебры $A\tilde{P}(1, n)$, то анзац

$$\omega_{m+1} = \varphi(\omega_1, \ldots, \omega_m) \tag{2}$$

преобразует уравнение (1) в уравнение, содержащее только $\varphi, \omega_1, \ldots, \omega_m$ и производные от φ по $\omega_1, \ldots, \omega_m$. Число m связано с рангом r алгебры L соотношением $m = n + 1 - r$.

Случай $m = 1$ исследован в [1 – 6]. Случай $m = 2$ для $n \leq 3$ рассматривался в [1 – 3], а для произвольного n такое исследование с привлечением подалгебр алгебры Ли $AP(1,n)$ группы Пуанкаре $P(1,n)$ проведено в [7]. Поэтому для завершения изучения случая $m = 2$ необходимо выполнить редукцию по тем подалгебрам ранга $n-1$ алгебры $A\tilde{P}(1, n)$, которые имеют ненулевую проекцию на $\langle D \rangle$.

В данной статье с точностью до $\tilde{P}(1, n)$-эквивалентности найдены все максимальные подалгебры ранга $n-1$ алгебры $A\tilde{P}(1,n)$, имеющие ненулевую проекцию на $\langle D\rangle$, для каждой из них построен анзац (2), посредством которого проведена редукция уравнения (1) к дифференциальному уравнению с двумя переменными.

2. Основные обозначения и некоторые общие замечания. Базисные элементы алгебры $A\tilde{P}(1,n)$ связаны следующими коммутационными соотношениями:

$$[J_{\alpha\beta}, J_{\gamma\delta}] = g_{\alpha\delta}J_{\beta\gamma} + g_{\beta\gamma}J_{\alpha\delta} - g_{\alpha\gamma}J_{\beta\delta} - g_{\beta\delta}J_{\alpha\gamma},$$
$$[P_\alpha, J_{\beta\gamma}] = g_{\alpha\beta}P_\gamma - g_{\alpha\gamma}P_\beta, \quad [P_\alpha, P_\beta] = 0,$$
$$[D, J_{\alpha\beta}] = 0, \quad [D, P_\alpha] = P_\alpha,$$

где $g_{00} = -g_{11} = \ldots = -g_{nn} = 1$, $g_{\alpha\beta} = 0$ при $\alpha \neq \beta$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta = 0, 1, \ldots, n$. Алгебра $A\tilde{P}(1,n)$ содержит алгебру Пуанкаре $AP(1,n)$, порожденную $J_{\alpha\beta}$ и P_α, ортогональную алгебру $AO(n) = \langle J_{ab} \,|\, a, b = 1, \ldots, n\rangle$, псевдоортогональную алгебру $AO(1,n) = \langle J_{\alpha\beta} \,|\, \alpha, \beta = 0, 1, \ldots, n\rangle$, коммутативный идеал $V = \langle P_0, P_1, \ldots, P_n\rangle$. Важной подалгеброй алгебры $A\tilde{P}(1,n)$ является нормализатор $\mathfrak{N}$ изотропного пространства $\langle P_0 + P_n\rangle$ в алгебре $A\tilde{P}(1,n)$. Нетрудно получить

$$\mathfrak{N} = \langle M, T, P_1, \ldots, P_{n-1}, G_1, \ldots, G_{n-1}\rangle \mathbin{\supset\!\!\!\!+} (AO(n-1) \oplus \langle D, J_{0n}\rangle),$$

где

$$M = P_0 + P_n, \quad T = (P_0 - P_n)/2, \quad G_a = J_{0a} - J_{an}, \quad a = 1, \ldots, n-1,$$
$$AO(n-1) = \langle J_{ab} \,|\, a, b = 1, \ldots, n-1\rangle.$$

Алгебра $\mathfrak{N}$ содержит расширенную изохронную алгебру Галилея

$$A\tilde{G}(0, n-1) = \langle M, P_1, \ldots, P_{n-1}, G_1, \ldots, G_{n-1}\rangle \mathbin{\supset\!\!\!\!+} AO(n-1).$$

В работе будут использованы еще и такие обозначения:

$$AO[r,s] = \langle J_{ab} \,|\, a, b = r, \ldots, s\rangle, \quad r \leq s;$$
$$AE[r,s] = \langle P_r, \ldots, P_s\rangle \mathbin{\supset\!\!\!\!+} AO(r,s), \quad r \leq s;$$
$$AE_1[r,s] = \langle G_r, \ldots, G_s\rangle \mathbin{\supset\!\!\!\!+} AO(r,s), \quad r \leq s;$$
$$V[1, n-1] = \langle G_1, \ldots, G_{n-1}\rangle, \quad W[1, n-1] = \langle P_1, \ldots, P_{n-1}\rangle;$$

π — проектирование $\mathfrak{N}$ на $\langle D, J_{0n}\rangle$. Если $s > r$, то, по определению, $AO[r,s] = 0$, $AE[r,s] = 0$.

Для проведения редукции уравнения (1) по подалгебрам алгебры $A\tilde{P}(1,n)$ необходимо описать подалгебры этой алгебры с точностью до $\tilde{P}(1,n)$-эквивалентности. Две подалгебры K_1, K_2 алгебры $A\tilde{P}(1,n)$ называются $\tilde{P}(1,n)$-эквивалентными, если с точностью до $\tilde{P}(1,n)$-сопряженности они имеют одни и те же инварианты. Среди подалгебр, имеющих одну и ту же полную систему инвариантов, существует одна (максимальная) подалгебра, содержащая все остальные подалгебры. Будем называть ее i-максимальной подалгеброй алгебры $A\tilde{P}(1,n)$. Две i-максимальные подалгебры K_1 и K_2 алгебры $A\tilde{P}(1,n)$ эквивалентны тогда и только тогда, когда K_1 и K_2 $\tilde{P}(1,n)$-сопряжены. Таким образом, для нахождения с точностью до $\tilde{P}(1,n)$-сопряженности всех анзацев, редуцирующих уравнение (1) к диференциальным уравнениям с двумя инвариантными переменными, требуется описать i-максимальные подалгебры ранга $n-1$ алгебры $A\tilde{P}(1,n)$ с точностью до $\tilde{P}(1,n)$-сопряженности.

При доказательстве излагаемых результатов нам понадобится следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть L — максимальная подалгебра алгебры $A\tilde{P}(1,n)$, K_1 — подалгебра L. Тогда в L существует подалгебра K_2, удовлетворяющая таким условиям:*

1) *K_2 — i-максимальная подалгебра алгебры $A\tilde{P}(1,n)$;*

2) *$K_1 \subset K_2$;*

3) *K_1 и K_2 имеют одни и те же инварианты.*

Доказательство. Пусть $\omega_1, \ldots, \omega_s$ — полная система инвариантов подалгебры K_1. Обозначим через K_2 i-максимальную подалгебру алгебры $A\tilde{P}(1,n)$, имеющую полную систему инвариантов $\omega_1, \ldots, \omega_s$. Докажем, что $K_2 \subset L$. Действительно, пусть f — произвольный инвариант алгебры L. Так как $K_1 \subset L$, то f является инвариантом подалгебры K_1 и в силу теоремы об универсальном инварианте получаем $f = f(\omega_1, \ldots, \omega_s)$. Так как L — i-максимальная подалгебра алгебры $A\tilde{P}(1,n)$, то отсюда вытекает, что $K_2 \subset L$. Лемма доказана.

Из результатов, изложенных в п. 3 [7], следует, что задача построения инвариантов произвольной подалгебры алгебры $A\tilde{P}(1,n)$ сводится к задаче построения инвариантов неприводимых подалгебр ортогональной алгебры $AO(k)$ для всех $k \le n$. Последняя же задача в общем случае, видимо, неразрешима в квадратурах. В связи с этим ограничимся рассмотрением только тех подалгебр алгебры $AP(1,n)$, проекции которых на $AO(1,n)$ являются подпрямыми суммами алгебр вида $AO[r,s]$.

3. Максимальные подалгебры ранга $n-1$, не содержащие P_0 и $P_0 + P_n$. В следующих ниже леммах L обозначает максимальную подалгебру алгебры $A\tilde{P}(1,n)$, имеющую ненулевую проекцию на $\langle D\rangle$ и не содержащую P_0 и $P_0 + P_n$.

Лемма 2. *Если проекция L на $AO(1,n)$ не имеет в пространстве V инвариантных изотропных подпространств, то L сопряжена с одной из таких алгебр:*

$$L_1 = (AO[0,d] \oplus AO[d+1,m] \oplus AO[m+1,q] \oplus AE[q+1,n]) \dotplus \langle D\rangle,$$

$$d = 2, \ldots, n-2;\ m = d+1, \ldots, n-2;\ q = m+1, \ldots, n-1;\ 2n \le d+q,\ n \ge 4;$$

$$L_2 = (AO[0,m] \oplus AE[m+1,n-2]) \dotplus \langle D + \alpha J_{n-1,n}\rangle,$$

$$m = 2, \ldots, n-2;\quad n \ge 4;\quad \alpha > 0;$$

$$L_3 = (AO[1,m] \oplus AO[m+1,q] \oplus AE[q+1,n]) \dotplus \langle D\rangle,$$

$$m = 2, \ldots, n-2;\quad q = m+2, \ldots, n;\quad 2m \le q;\quad n \ge 2.$$

Доказательство. Если $D \in L$, то $L = K \dotplus \langle D\rangle$, где K — максимальная подалгебра ранга $n-2$ алгебры $AP(1,n)$, относящаяся к классу 0 и являющаяся расщепляемой. Отсюда на основании теоремы 4 [7] получаем, что L сопряжена с L_1 или L_3. Если $D \notin L$, то в силу леммы 1 $L = N \dotplus \langle D + \alpha J_{n-1,n}\rangle$, $\alpha > 0$, где N — максимальная подалгебра ранга $n-2$ алгебры $AP(1,n-2)$. В силу [4] алгебра N сопряжена с $AO[0,m] \oplus AE[m+1,n-2]$,

$2 \le m \le n-2$, $n \ge 4$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Если* $L \subset \mathfrak{N}$ *и* $\pi(L) = \langle D, J_{0n}\rangle$, *то* L *сопряжена с одной из таких алгебр:*

$$L_4 = (AE_1[1,m] \oplus AE[m+1, n-3]) \supsetplus \langle J_{n-2,\,n-1} + cJ_{0n}, D + \alpha J_{0n}\rangle,$$

$$m = 1, \ldots, n-3; \quad n \ge 4; \quad c > 0, \quad \alpha \ge 0;$$

$$L_5 = (AO[1,m] \oplus AO[m+1, q] \oplus AE[q+1, n-1]) \supsetplus \langle D, J_{0n}\rangle,$$

$$m = 1, \ldots, n-2; \quad q = m+1, \ldots, n-1; \quad 2m \le q; \ n \ge 3;$$

$$L_6 = AE[3, n-1] \supsetplus \langle J_{12} + cJ_{0n}, D + \alpha J_{0n}\rangle,$$

$$c > 0, \quad \alpha \ge 0, \quad n \ge 3.$$

Доказательство. Согласно теореме IV.3.4 [6] алгебра L сопряжена с алгеброй $(U_1 + U_2) \supsetplus F$, где $U_1 \subset V[1, n-1]$, $U_2 \subset W[1, n-1]$, а $F \subset \subset AO(n-1) \oplus \langle D, J_{0n}\rangle$. В силу леммы 1 $L = K \supsetplus \langle D + X_1, J_{0n} + X_2\rangle$, где X_1, $X_2 \in AO(n-1)$, а K — максимальная подалгебра ранга $n-3$ алгебры $A\tilde{G}(0, n-1)$. Поскольку алгебра $AE_1[1,m] \supsetplus \langle J_{0n}\rangle$, имеющая ранг $m+1$, сопряжена с подалгеброй алгебры $AO[0, m+1]$, не являющейся в ней максимальной, то по лемме 1 получаем, что $X_2 \ne 0$ при $U_1 \ne 0$. В этом случае согласно предложению 2 [6] алгебра L сопряжена с L_4. Если $U_1 = 0$, то на основании этого же предложения 2 алгебра L сопряжена с L_5 или L_6. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть* $L \subset \mathfrak{N}$, $\pi(L) = \langle D + \alpha J_{0n}\rangle$ *и* L *— расщепляемая алгебра при* $\alpha = \pm 1$. *Тогда* L *сопряжена с одной из таких алгебр:*

$$L_7 = (AE_1[1,d] \oplus AO[d+1, m] \oplus AE[m+1, n-1]) \supsetplus \langle D + \alpha J_{0n}\rangle,$$

$$d = 1, \ldots, n-2; \quad m = d+1, \ldots, n-1; \quad n \ge 3; \quad \alpha \ge 0;$$

$$L_8 = (AO[1,m] \oplus AE[m+1, n-1]) \supsetplus \langle D + \alpha J_{0n}\rangle,$$

$$m = 1, \ldots, n-1; \quad n \ge 2; \quad \alpha \ge 0;$$

$$L_9 = (\langle G_1 + 2T\rangle \oplus AO[2,m] \oplus AE[m+1, n-1]) \supsetplus \langle 2D - J_{0n}\rangle,$$

$$m = 2, \ldots, n-1; \quad n \ge 3.$$

Доказательство. Если $\alpha \notin \{0, \pm 1, -1/2\}$, то в силу теоремы IV.3.4 [6] алгебра L сопряжена с алгеброй $(U_1 + U_2) \supsetplus F$, где $U_1 \subset V[1, n-1]$, $U_2 \subset \subset W[1, n-1]$, а $F \subset AO(n-1) \oplus \langle D + \alpha J_{0n}\rangle$. По лемме 1 $L = K \supsetplus \langle D + \alpha J_{0n} + + X\rangle$, где $X \in AO(n-1)$, а K — максимальная подалгебра ранга $n-2$ алгебры $A\tilde{G}(0, n-1)$. Согласно теореме 1 [7] алгебра K совпадает с точностью до сопряженности с одной из алгебр

$$AE_1[1,d] \oplus AO[d+1, m] \oplus AE[m+1, n-1],$$

$$1 \le d \le n-2; \quad d+1 \le m \le n-1; \quad n \ge 3;$$

$$AO[1,m] \oplus AE[m+1, n-1], \quad 1 \le m \le n-1; \quad n \ge 2.$$

Так как $[X, K] \subset K$, то X принадлежит проекции L на $AO(n-1)$, а значит, можно предполагать, что $X = 0$, и мы получаем алгебры L_7, L_8.

Пусть $\alpha = -1/2$. Тогда согласно теореме IV.3.4 [6] алгебра L сопряжена с алгеброй $(U_1 + U_2) \supsetplus F$, где $U_1 \subset V[1, n-1] + \langle T\rangle$ (как пространство), $U_2 \subset$

$\subset W[1, n-1]$, а F является подалгеброй алгебры $AO(n-1) \oplus \langle 2D - J_{0n} \rangle$. Если проекция U_1 на $\langle T \rangle$ равна 0, то L совпадает с L_7 или L_8. Допустим, что проекция U_1 на $\langle T \rangle$ совпадает с $\langle T \rangle$. Если $G_1 + 2T$, $G_2 \in L$, то L содержит $[G_1 + 2T, G_2] = 2P_2$, $[P_2, G_2] = M$, что противоречит предположению относительно L. Отсюда вытекает $U_1 = \langle G_1 + 2T \rangle$. Если $U_2 \neq 0$, то по теореме Витта $U_2 = \langle P_{m+1}, \dots, P_n \rangle$, $n \geq 2$, а значит, L сопряжена с алгеброй L_9.

В силу теоремы IV.3.4 [6] случаи, когда $\alpha = \pm 1$ и L — расщепляемая алгебра, не отличаются от рассмотренного случая $\alpha \notin \{0, \pm 1, -1/2\}$. Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть L — нерасщепляемая подалгебра алгебры* $\mathfrak{N}$ *и* $\pi(L) = \langle D + J_{0n} \rangle$. *Тогда L сопряжена с одной из таких алгебр*:

$$L_{10} = (AE_1[1, d] \oplus AO[d+1, m] \oplus AE[m+1, n-1]) \supset\!\!\!\!+ \langle D + J_{0n} + M \rangle,$$
$$d = 1, \dots, n-2; \quad m = d+1, \dots, n-1; \quad n \geq 3;$$
$$L_{11} = (AO[1, m] \oplus AE[m+1, n-1]) \supset\!\!\!\!+ \langle D + J_{0n} + M \rangle,$$
$$m = 1, \dots, n-1; \quad n \geq 2;$$
$$L_{12} = (AE_1[1, m] \oplus AE[m+1, n-3]) \supset\!\!\!\!+ \langle J_{n-2, n-1} + \alpha M, D + J_{0n} + M \rangle,$$
$$m = 1, \dots, n-3; \quad n \geq 4; \quad \alpha \geq 0;$$
$$L_{13} = (AE_1[1, m] \oplus AE[m+1, n-3]) \supset\!\!\!\!+ \langle J_{n-2, n-1} + M, D + J_{0n} \rangle,$$
$$m = 1, \dots, n-3; \quad n \geq 4;$$
$$L_{14} = AE[3, n-1] \supset\!\!\!\!+ \langle J_{12} + \alpha M, D + J_{0n} + M \rangle, \quad \alpha \geq 0, \quad n \geq 3;$$
$$L_{15} = AE[3, n-1] \supset\!\!\!\!+ \langle J_{12} + M, D + J_{0n} \rangle, \quad n \geq 3.$$

Доказательство. Согласно теореме IV.3.4 [6] алгебра L сопряжена с алгеброй $(U_1 + U_2) \supset\!\!\!\!+ F$, где $U_1 \subset V[1, n-1]$, $U_2 \subset W[1, n-1]$, а $L \subset AO(n-1) \oplus \langle D + J_{0n}, M \rangle$. Легко убедиться, что алгебры $\langle G_{2j-1}, G_{2j}, G_{2j-1, 2j} \rangle$ и $\langle G_{2j-1}, G_{2j} \rangle$ являются эквивалентными. Поэтому если $D + J_{0n} + \gamma M + \delta J_{n-2, n-1} \in L$ и $\delta \neq 0$, то по лемме 1 $U_1 \subset V[1, n-3]$ и $U_2 \subset W[1, n-3]$. В этом случае $J_{n-2, n-1} + \beta M \in L$, а следовательно, алгебра L сопряжена с $K \supset\!\!\!\!+ \langle J_{n-2, n-1} + \beta M, D + J_{0n} + \gamma M \rangle$, где K — максимальная подалгебра ранга $n-3$ алгебры $A\tilde{G}(0, n-3)$. Нетрудно получить, что с точностью до сопряженности K совпадает с $AE_1[1, m] \oplus AE[m+1, n-3]$, $1 \leq m \leq n-3$, $n \geq 4$, или $AE[1, n-3]$, $n \geq 3$, а потому L сопряжена с одной из алгебр L_j, $j = 12, \dots, 15$. В оставшихся случаях в силу предложения 2 [7] алгебра L сопряжена с L_{10} или L_{11}. Лемма доказана.

Для выделения оставшихся алгебр нам необходимы дополнительные обозначения. Для любых двух натуральных чисел r и s, $r \leq s$, положим

$$\Phi(r, s, \gamma) = \langle G_r + \gamma P_r, \dots, G_s + \gamma P_s \rangle \supset\!\!\!\!+ AO[r, s], \quad \gamma \in R.$$

Пусть, далее, $\Gamma_{d, q} = U \supset\!\!\!\!+ F$, где F — диагональ в $AO[1, d] \oplus AO[d+1, 2d] \oplus \dots \oplus AO[(q-1)d + 1, qd]$, а U — коммутативная алгебра, имеющая базис

$$G_1 + \gamma_1 P_1 + \lambda_1 P_{(q-1)d+1}, \dots, G_d + \gamma_1 P_d + \lambda_1 P_{qd},$$

$$G_{d+1} + \gamma_2 P_{d+1} + \lambda_2 P_{(q-1)d+1}, \dots, G_{2d} + \gamma_2 P_{2d} + \lambda_1 P_{qd},$$

....

$$G_{(q-2)d+1} + \gamma_{q-1} P_{(q-2)d+1} + \lambda_{q-1} P_{(q-1)d+1}, \dots, G_{(q-1)d} + \gamma_{q-1} P_{(q-1)d} + \lambda_{q-1} P_{qd},$$

$$0 \le \gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_{q-1}; \quad \lambda_1 > 0, \quad \lambda_2 > 0, \dots, \lambda_{q-1} > 0.$$

Лемма 6. *Если L — нерасщепляемая подалгебра алгебры $\mathfrak{N}$ и $\pi(L) = \langle D - J_{0n} \rangle$, то L сопряжена с алгеброй L', для которой $\pi(L') = \langle D + J_{0n} \rangle$, или с одной из алгебр*

$$L_{16} = (\Gamma_{d,q} \oplus AE[dq+1, n-1]) \,\unicode{x2ADB}\, \langle D - J_{0n} \rangle, \quad d = 2, \quad n \ge 5;$$

$$L_{17} = (\Phi(d_0 + 1, d_1, \gamma_1) \oplus \Phi(d_1 + 1, d_2, \gamma_2) \oplus \dots \oplus \Phi(d_{t-1} + 1, d_t, \gamma_t) \oplus$$

$$\oplus AO[d_t + 1, m] \oplus AE[m+1, n-1]) \,\unicode{x2ADB}\, \langle D - J_{0n} \rangle,$$

где $d_0 = 0$; $\gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_t$, $t > 1$; $m = 1, \dots, n-2$; $n \ge 3$;

$$L_{18} = (\Gamma_{d,q} \oplus \Phi(dq+1, l_1, \mu_1) \oplus \Phi(l_1 + 1, l_2, \mu_2) \oplus \dots$$

$$\dots \oplus \Phi(l_{t-1} + 1, l_t, \mu_t) \oplus AE[l_t + 1, n-1]) \,\unicode{x2ADB}\, \langle D - J_{0n} \rangle,$$

где $\mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_t$, $t \ge 1$; $l_0 = dq$.

Доказательство. В силу теоремы IV.3.4 [6] алгебра L сопряжена с алгеброй $U \,\unicode{x2ADB}\, F$, где $U \subset V[1, n-1] + W[1, n-1]$ (как пространство), а $F \subset \subset AO(n-1) \oplus \langle D - J_{0n}, T \rangle$, причем если проекция L на $\langle T \rangle$ является ненулевой, то $[T, U] \subset U$. Поскольку $[T, G_a] = 2P_a$, $[P_a, G_a] = M$ и $M \notin L$, то в последнем случае проекция U на $V[1, n-1]$ является нулевой. Но тогда применим $O[1, n]$-автоморфизм алгебры $A\tilde{P}(1, n)$, соответствующий матрице diag [-1, 1, ..., 1], который преобразует $\langle D - J_{0n}, T \rangle$ в $\langle D + J_{0n}, M \rangle$. Поэтому можно предполагать, что проекция L на $\langle T \rangle$ является нулевой.

Согласно лемме 1 $L = K \,\unicode{x2ADB}\, \langle D - J_{0n} + X \rangle$, где $X \in AO(n-1)$, а K — максимальная подалгебра ранга $n-2$ алгебры $A\tilde{G}(0, n-1)$. Последнее обстоятельство позволяет воспользоваться перечнем таких подалгебр, приведенным в теореме 1 [7]. Учитывая, что $[D - J_{0n}, K] \subset K$, нетрудно получить, что L сопряжена с одной из алгебр L_{16}, L_{17}, L_{18}. Лемма доказана.

Теорема. *Максимальные подалгебры ранга $n-1$ алгебры $A\tilde{P}(1, n)$, имеющие ненулевую проекцию на $\langle D \rangle$ и не содержащие P_0 и $P_0 + P_n$, исчерпываются с точностью до $\tilde{P}(1, n)$-сопряженности алгебрами $L_1, \dots, L_{18}$, описанными в леммах 2 – 6.*

4. Редукция по подалгебрам, не содержащим P_0 и $P_0 + P_n$. Подалгебра L_j, $j = 1, \dots, 18$, имеет полную систему инвариантов вида $\omega_1(x)$, $\omega_2(x)$, $u f(x)^{-1}$. Поэтому для каждой из этих подалгебр анзац (2) удобно представить в виде [1, 2, 6]

$$u = f(x) \varphi(\omega_1, \omega_2), \tag{3}$$

где φ — неизвестная функция. Легко видеть, что

$$\Box u = \varphi \Box f + 2\varphi_1 (\nabla f \, \nabla \omega_1) + 2\varphi_2 (\nabla f \, \nabla \omega_2) + f \{ \varphi_{11} (\nabla \omega_1 \nabla \omega_1) +$$

$$+ 2\varphi_{12} (\nabla \omega_1 \nabla \omega_2) + \varphi_{22} (\nabla \omega_2 \nabla \omega_2) + \varphi_1 \Box \omega_1 + \varphi_2 \Box \omega_2 \}, \tag{4}$$

где

$$\varphi_{11} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega_1^2}, \quad \varphi_{12} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega_1\partial\omega_2}, \quad \varphi_{22} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega_2^2}, \quad \varphi_1 = \frac{\partial\varphi}{\partial\omega_1}, \quad \varphi_2 = \frac{\partial\varphi}{\partial\omega_2},$$

$$\nabla g \cdot \nabla h = \frac{\partial g}{\partial x_0}\frac{\partial h}{\partial x_0} - \frac{\partial g}{\partial x_1}\frac{\partial h}{\partial x_1} - \ldots - \frac{\partial g}{\partial x_n}\frac{\partial h}{\partial x_n}.$$

Редукцию уравнения (1) удобно проводить с использованием формулы (4), поскольку она сводит нахождение $\Box u$ к менее громоздким вычислениям производных от функций f, ω_1, ω_2.

Редуцированное уравнение, соответствующее анзацу (3), имеет вид

$$a_{11}(x)\varphi_{11} + a_{12}(x)\varphi_{12} + a_{22}(x)\varphi_{22} + b_1(x)\varphi_1 + b_2(x)\varphi_2 + c(x, \varphi) = 0.$$

Ниже для каждой подалгебры L_j, $j = 1, \ldots, 18$ указываем соответствующие ей функции f, ω_1, ω_2, a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_1, b_2, c.

1. Алгебра L_1:

$$f(x) = (x_{m+1}^2 + x_q^2)^{1/(1-k)},$$

$$\omega_1 = \frac{x_0^2 - x_1^2 - \ldots - x_d^2}{x_{m+1}^2 + \ldots + x_q^2}, \quad \omega_2 = \frac{x_{d+1}^2 + \ldots + x_m^2}{x_{m+1}^2 + \ldots + x_q^2},$$

$$a_{11} = 4\omega_1(1 - \omega_1), \quad a_{12} = -8\omega_1\omega_2, \quad a_{22} = -4\omega_2(1 + \omega_2),$$

$$b_1 = 2(d + 1) + \frac{2q - 2m - (2q - 2m - 8)k}{1 - k}\omega_1,$$

$$b_2 = 2(d - m) + \frac{2q - 2m - (2q - 2m - 8)k}{1 - k}\omega_2,$$

$$c = \frac{2(m - q) + (2q - 2m - 4)k}{(1 - k)^2}\varphi + \lambda\varphi^k.$$

2. Алгебра L_2:

$$f(x) = (x_{n-1}^2 + x_n^2)^{1/(1-k)},$$

$$\omega_1 = \alpha \ln(x_{n-1}^2 + x_n^2) - 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{x_n}{x_{n-1}}, \quad \omega_2 = \frac{x_0^2 - x_1^2 - \ldots - x_m^2}{x_{n-1}^2 + x_n^2},$$

$$a_{11} = 4(\alpha^2 + 1), \quad a_{12} = -8\alpha\omega_2, \quad a_{22} = 4\omega_2(\omega_2 - 1),$$

$$b_1 = \frac{8\alpha}{1 - k}, \quad b_2 = \frac{4(k + 1)}{k - 1}\omega_2 - 2m - 2, \quad c = \frac{4}{(1 - k)^2}\varphi - \lambda\varphi^k.$$

3. Алгебра L_3:

$$f(x) = (x_1^2 + \ldots + x_m^2)^{1/(1-k)}, \quad \omega_1 = \frac{x_1^2 + \ldots + x_m^2}{x_0^2},$$

$$\omega_2 = \frac{x_{m+1}^2 + \ldots + x_q^2}{x_0^2}, \quad a_{11} = 4\,\omega_1^2(\omega_2 - 1), \quad a_{12} = 8\,\omega_1^2\omega_2,$$

$$a_{22} = 4\,\omega_2^2(\omega_2 - 1), \quad b_1 = -\frac{8\omega_1}{1 - k} + (6\omega_1 - 2m)\omega_1,$$

$$b_2 = (6\omega_2 - 2q + 2m)\,\omega_2, \quad c = \frac{-2m + 2(m - 2)k}{(1 - k)^2}\varphi + \lambda\varphi^k.$$

4. Алгебра L_4:

$$f(x) = (x_{n-2}^2 + x_{n-1}^2)^{1/(1-k)},$$

$$\omega_1 = 2\ln(x_0 - x_n) - (1+\alpha)\ln(x_{n-2}^2 + x_{n-1}^2) - 2c\,\mathrm{arctg}\,\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}},$$

$$\omega_2 = \frac{x_0^2 - x_1^2 - \ldots - x_m^2 - x_n^2}{x_{n-2}^2 + x_{n-1}^2}, \quad a_{11} = 4[c^2 + (1+\alpha)^2],$$

$$a_{12} = 8[(1+\alpha)\omega_2 - 1], \quad a_{22} = 4\omega_2(\omega_2 - 1), \quad b_1 = \frac{8(1+\alpha)}{k-1},$$

$$b_2 = \frac{4(k+1)\omega_2 - (2m+4)(k-1)}{k-1}, \quad c = \frac{4}{(k-1)^2}\varphi - \lambda\varphi^k.$$

5. Алгебра L_5:

$$f(x) = (x_0^2 - x_n^2)^{1/(1-k)}, \quad \omega_1 = \frac{x_1^2 + \ldots + x_m^2}{x_0^2 - x_n^2}, \quad \omega_2 = \frac{x_{m+1}^2 + \ldots + x_q^2}{x_0^2 - x_n^2},$$

$$a_{11} = 4\omega_1(\omega_1 - 1), \quad a_{12} = 8\omega_1\omega_2, \quad a_{22} = 4\omega_2(\omega_2 - 1),$$

$$b_1 = \frac{4(k+1)}{k-1}\omega_1 - 2m, \quad b_2 = \frac{4(k+1)}{k-1}\omega_2 - 2q + 2m, \quad c = \frac{4}{(1-k)^2}\varphi + \lambda\varphi^k.$$

6. Алгебра L_6:

$$f(x) = (x_1^2 + x_2^2)^{1/(1-k)}, \quad \omega_1 = \frac{x_0^2 - x_n^2}{x_1^2 + x_2^2},$$

$$\omega_2 = (1+\alpha)\ln(x_1^2 + x_2^2) - 2\ln(x_0 - x_n) + 2c\,\mathrm{arctg}\,\frac{x_2}{x_1},$$

$$a_{11} = 4\omega_1(1 - \omega_1), \quad a_{12} = 8(\omega_1 - 1), \quad a_{22} = -4[(1+\alpha)^2 + c^2],$$

$$b_1 = 4 + \frac{4(1+k)}{1-k}\omega_1, \quad b_2 = -\frac{8(1+\alpha)}{1-k}, \quad c = -\frac{4}{(1-k)^2}\varphi + \lambda\varphi^k.$$

7. Алгебра L_7:

$$f(x) = (x_{d+1}^2 + \ldots + x_m^2)^{1/(1-k)}, \quad \omega_1 = \frac{x_0^2 - x_1^2 - \ldots - x_d^2 - x_n^2}{x_{d+1}^2 + \ldots + x_m^2},$$

$$\omega_2 = 2\ln(x_0 - x_n) - (1+\alpha)\ln(x_{d+1}^2 + \ldots + x_m^2), \quad a_{11} = 4\omega_1(1 - \omega_1),$$

$$a_{12} = 8[1 - (1+\alpha)\omega_1], \; a_{22} = -4(1+\alpha)^2,$$

$$b_1 = 2(d+2) + 2(m-d-4)\omega_1 + \frac{8\omega_1}{1-k},$$

$$c = -\frac{2(m-d)(1+k)}{(1-k)^2}\varphi + \lambda\varphi^k, \quad b_2 = 2(1+\alpha)(m-d-2) + \frac{8(1+\alpha)}{1-k}.$$

8. Алгебра L_8:

$$f(x) = (x_0^2 - x_n^2)^{1/(1-k)}, \quad \omega_1 = \frac{x_0^2 - x_n^2}{x_1^2 + \ldots + x_m^2},$$

$$\omega_2 = 2\ln(x_0 - x_n) - (1+\alpha)\ln(x_1^2 + \ldots + x_m^2), \quad a_{11} = 4\omega_1^2(1 - \omega_1),$$

$$a_{12} = 8\omega_1[1 - (1+\alpha)\omega_1], \quad a_{22} = -4(1+\alpha)^2\omega_1,$$

$$b_1 = \frac{4(3-k)\omega_1}{1-k} + (2m-8)\omega_1^2, \quad b_2 = \frac{8}{1-k} + 2(1+\alpha)(m+2)\omega_1,$$

$$c = \frac{4}{(1-k)^2}\varphi + \lambda\varphi^k.$$

9. Алгебра L_9:

$$f(x) = (x_2^2 + \ldots + x_m^2)^{1/(1-k)}, \quad \omega_1 = \frac{(x_0 - x_n)^2 - 4x_1}{(x_2^2 + \ldots + x_m^2)^{1/2}},$$

$$\omega_2 = 3\,[\ln(x_0 - x_n)^2 - 4x_1] - 2\ln[6(x_0 + x_n) - 6x_1(x_0 - x_n) - (x_0 - x_n)^3],$$

$$a_{11} = 16 + \omega_1^2, \quad a_{12} = \frac{96}{\omega_1}, \quad a_{22} = \frac{144(1 - e^{\omega_2})}{\omega_1^2}, \quad b_1 = \frac{(m-4)k - m}{1-k}\omega_1,$$

$$b_2 = -\frac{48 + 72e^{\omega_2}}{\omega_1^2}, \quad c = \frac{(6-2m)k + 2m - 2}{(1-k)^2}\varphi - \lambda\varphi^k.$$

10. Алгебра L_{10}:

$$f(x) = (x_{d+1}^2 + \ldots + x_m^2)^{1/(1-k)}, \quad \omega_1 = \frac{x_{d+1}^2 + \ldots + x_m^2}{x_0 - x_n},$$

$$\omega_2 = \frac{x_0^2 - x_1^2 - \ldots - x_d^2 - x_n^2}{x_0 - x_n} + \ln(x_0 - x_n), \quad a_{11} = -4\omega_1^2, \quad a_{12} = -4\omega_1^2,$$

$$a_{22} = -4\omega_1, \quad b_1 = -\left[2(m-d) + \frac{8}{1-k}\right]\omega_1, \quad b_2 = 2d\omega_1,$$

$$c = \frac{2(d-m) + 2(m-d-2)k}{(1-k)^2}\varphi + \lambda\varphi^k.$$

11. Алгебра L_{11}:

$$f(x) = (x_1^2 + \ldots + x_m^2)^{1/(1-k)}, \quad \omega_1 = \frac{x_1^2 + \ldots + x_m^2}{x_0 - x_n},$$

$$\omega_2 = x_0 + x_n + \ln(x_0 - x_n), \quad a_{11} = -4\omega_1^2, \quad a_{12} = -4\omega_1^2, \quad a_{22} = 4\omega_1,$$

$$b_1 = \frac{4(-2 - m + mk)}{1-k}\omega_1, \quad b_2 = 0, \quad c = \frac{-2m + 2k(m-2)}{(1-k)^2}\varphi + \lambda\varphi^k.$$

12. Алгебра L_{12}:

$$f(x) = (x_{n-2}^2 + x_{n-1}^2)^{1/(1-k)}, \quad \omega_1 = \frac{x_{n-2}^2 + x_{n-1}^2}{x_0 - x_n},$$

$$\omega_2 = \frac{x_0^2 - x_1^2 - \ldots - x_m^2 - x_n^2}{x_0 - x_n} + \ln(x_0 - x_n), \quad a_{11} = 4\omega_1^2, \quad a_{12} = 4\omega_1^2,$$

$$a_{22} = -4\omega_1, \quad b_1 = \frac{4(3-k)\omega_1}{1-k}, \quad b_2 = -2m\omega_1, \quad c = \frac{4}{(1-k)^2}\varphi - \lambda\varphi^k.$$

13. Алгебра L_{13}:

$$f(x) = (x_{n-2}^2 + x_{n-1}^2)^{1/(1-k)}, \quad \omega_1 = \frac{x_{n-2}^2 + x_{n-1}^2}{x_0 - x_n},$$

$$\omega_2 = \frac{x_0^2 - x_1^2 - \ldots - x_m^2 - x_n^2}{x_0 - x_n} + 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}}, \quad a_{11} = -4\omega_1^2, \quad a_{12} = -4\omega_1^2,$$

$$a_{22} = -4\omega_2 - 4, \quad b_1 = \frac{4(-3+k)}{1-k}\omega_1, \quad b_2 = 0, \quad c = -\frac{4}{(1-k)^2}\varphi + \lambda\varphi^k.$$

14. Алгебра L_{14}:

$$f(x) = (x_1^2 + x_2^2)^{1/(1-k)}, \quad \omega_1 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_0 - x_n},$$

$$\omega_2 = x_0 + x_n + \ln(x_0 - x_n) + 2\alpha \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_1}, \quad a_{11} = 4\omega_1^2, \quad a_{12} = 4\omega_1^2,$$

$$a_{22} = 4(\alpha^2 - \omega_1), \quad b_1 = \frac{4(3-k)}{1-k}\omega_1, \quad b_2 = 0, \quad c = \frac{4}{(1-k)^2}\varphi - \lambda\varphi^k.$$

15. Алгебра L_{15}:

$$f(x) = (x_1^2 + x_2^2)^{1/(1-k)}, \quad \omega_1 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_0 - x_n},$$

$$\omega_2 = x_0 + x_n + 2 \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_1}, \quad a_{11} = 4\omega_1^2, \quad a_{12} = 4\omega_1^2,$$

$$a_{22} = 4, \quad b_1 = \frac{4(3-k)\omega_1}{1-k}, \quad b_2 = 0, \quad c = \frac{4}{(1-k)^2}\varphi - \lambda\varphi^k.$$

16. Алгебра L_{16}:

$$f(x) = \left\{-(x_0 + x_n) + \sum_{i=1}^{q-1} \frac{1}{x_0 - x_n + \gamma_i}\left(x_{(i-1)d+1}^2 + \ldots + x_{id}^2\right)\right\}^{1/(1-k)}$$

$$\omega_1 = x_0 - x_n, \quad \omega_2 = \frac{y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_d^2}{\{f(x)\}^{1/(1-k)}},$$

где

$$y_j = \sum_{i=1}^{q-1} \frac{\lambda_i x_{(i-1)d+j}}{x_0 - x_n + \gamma_i} - x_{(q-1)d+j}, \quad j = 1, \ldots, d;$$

$$a_{11} = 0, \quad a_{12} = 4, \quad a_{22} = 4\left\{1 + \sum_{i=1}^{q-1} \frac{\lambda_i^2}{(\omega_1 + \gamma_i)^2}\right\}\omega_2, \quad b_1 = \frac{4}{1-k},$$

$$b_2 = 2d\left[1 - \sum_{i=1}^{q-1} \frac{\omega_2(\omega_1 + \gamma_i) - \lambda_i^2}{(\omega_1 + \gamma_i)^2}\right], \quad c = \frac{2d}{1-k} \sum_{i=1}^{q-1} \frac{1}{\omega_1 + \gamma_i}\varphi - \lambda\varphi^k.$$

17. Алгебра L_{17}:

$$f(x) = (x_{d_t+1}^2 + \ldots + x_m^2)^{1/(1-k)}, \quad \omega_1 = x_0 - x_n,$$

$$\omega_2 = \frac{-(x_0 + x_n) + \sum_{i=1}^{t} \frac{1}{x_0 - x_n + \gamma_i}\left(x_{d_{i-1}+1}^2 + \ldots + x_{d_i}^2\right)}{x_{d_t+1}^2 + \ldots + x_m^2}, \quad a_{11} = 0, \quad a_{12} = 4,$$

$$a_{22} = 4\omega_2^2, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = \sum_{i=1}^{t} \frac{4(d_i - d_{i-1})}{\omega_1 + \gamma_i} - \frac{2(m - d_t) - 2(m - d_t - 4)k}{1-k}\omega_2,$$

$$c = \frac{2(m - d_t) - 2(m - d_t + 2)k}{(1-k)^2}\varphi - \lambda\varphi^k.$$

18. Алгебра L_{18}:

$$f(x) = \left\{\sum_{i=1}^{q-1} \frac{1}{x_0 - x_n + \gamma_i}(x_{(i-1)d+1}^2 + \ldots + x_{id}^2) \right. +$$

$$+ \left.\sum_{i=1}^{t} \frac{1}{x_0 - x_n + \mu_r}\left(x_{l_{r-1}+1}^2 + \ldots + x_{l_r}^2\right) - (x_0 - x_n)\right\}^{1/(1-k)}$$

$$\omega_1 = x_0 - x_n, \quad \omega_2 = \frac{y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_d^2}{f(x)^{1/(1-k)}},$$

где

$$y_j = \sum_{i=1}^{q-1} \frac{\lambda_i x_{(i-1)d+j}}{x_0 - x_n + \gamma_i} - x_{(q-1)d+j}, \quad j = 1, \ldots, d;$$

$$a_{11} = 0, \quad a_{12} = 4, \quad a_{22} = \left[1 + \sum_{i=1}^{q-1} \frac{\lambda_i^2}{(\omega_1 + \gamma_i)^2}\right]\omega_2, \quad b_1 = \frac{4}{1-k},$$

$$b_2 = 2d + 2d\sum_{i=1}^{q-1} \frac{\lambda_i^2 - \omega_2(\omega_1 + \gamma_i)}{(\omega_1 + \gamma_i)^2} - 2\sum_{r=1}^{t} \frac{(l_r - l_{r-1})\omega_2}{\omega_1 + \mu_r},$$

$$c = \left[\frac{2d}{1-k}\sum_{i=1}^{q-1} \frac{1}{\omega_1 + \gamma_i} + \frac{2}{1-k}\sum_{i=1}^{t} \frac{l_r - l_{r-1}}{\omega_1 + \mu_r}\right]\varphi - \lambda\varphi^k.$$

5. Редукция по подалгебрам, содержащим P_0 или $P_0 + P_n$. В настоящем пункте проведем редукцию уравнения (1) к дифференциальным уравнениям с двумя инвариантными переменными, используя подалгебры алгебры $A\tilde{P}(1, n)$, содержащие P_0 или $P_0 + P_n$.

Пусть L — некоторая подалгебра алгебры $A\tilde{P}(1, n)$. Если $P_0 \in L$, то любое решение $u = u(x)$ уравнения (1), инвариантное относительно L, не зависит от x_0 и потому является решением уравнения

$$-\Box u + \lambda u^k = 0 \tag{5}$$

в евклидовом пространстве E_n, где

$$\Box u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}.$$

Уравнение (5) инвариантно относительно расширенной алгебры Евклида $A\tilde{E}(n) = \langle P_1, \ldots, P_n, J_{12}, \ldots J_{n-1,n}\rangle \mathbin{\rlap{+}\supset} \langle D_1\rangle$, генераторы которой имеют вид

$$P_a = \partial_a, \quad J_{ab} = x_b\partial_a - x_a\partial_b, \quad D_1 = -x^a\partial_a + \frac{2}{k-1}u\partial_u, \quad a, b = 1, \ldots, n.$$

Аналогично, если $P_0 + P_n \in L$, то любое решение уравнения (1), инвариантно относительно L, имеет вид $u = u(x_0 - x_n, x_1, \ldots, x_{n-1})$ и потому является решением уравнения (5) в евклидовом пространстве E_{n-1}. Поэтому в рассматриваемых случаях для редукции уравнения (5), а значит, и уравнения (1) к двумерным уравнениям достаточно классифицировать максимальные подалгебры ранга $n-2$ алгебры $A\tilde{E}(n)$, имеющие ненулевую проекцию на $\langle D_1\rangle$.

Теорема 2. *Максимальные подалгебры ранга $n-2$ алгебры $A\tilde{E}(n)$, имеющие ненулевую проекцию на $\langle D_1\rangle$, исчерпываются с точностью до $\tilde{E}(n)$-сопряженности следующими алгебрами:*

$$L_{21} = (AO[1, d] \oplus AO[d+1, m] \oplus AO[m+1, q] \oplus AE[q+1, n]) \mathbin{\rlap{+}\supset} \langle D_1\rangle,$$

$$d = 1, \ldots, n-2; \quad q = d+1, \ldots, n-1; \quad m = q+1, \ldots, n; \quad n \geq 3;$$

$$L_{21} = (AO[1, m] \oplus AE[m+1, n-2]) \ni \langle D_1 + \alpha J_{n-1, n} \rangle,$$

$$m = 1, \dots, n-2; \quad n \geq 3; \quad \alpha > 0;$$

$$L_{22} = (K \oplus AE[m+1, n]) \ni \langle D_1 + \alpha J \rangle,$$

где K — *диагональ в* $A\dot{O}[1, d] \oplus AO[d+1, 2d]$, $J = \sum_{a=1}^{d} J_{a, a+d}$, $d = 2, \dots$ $\dots, [n/2]$; $m = 2d+1, \dots, 2[n/2]$; $\alpha \geq 0$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

Подалгебрам L_{20}, L_{21} соответствуют следующие анзацы и редуцированные уравнения.

1. Алгебра L_{20}:

$$f(x) = (x_1^2 + \dots + x_d^2)^{1/(1-k)}, \quad \omega_1 = \frac{x_1^2 + \dots + x_d^2}{x_{m+1}^2 + \dots + x_q^2},$$

$$\omega_2 = \frac{x_{d+1}^2 + \dots + x_m^2}{x_{m+1}^2 + \dots + x_q^2}, \quad a_{11} = 4\omega_1(1-\omega_1), \quad a_{12} = -8\omega_1\omega_2,$$

$$a_{22} = -4\omega_2(1+\omega_2), \quad b_1 = 2(d+1) + \frac{2q - 2m - (2q - 2m - 8)k}{1-k}\omega_1,$$

$$b_2 = 2(d-m) + \frac{2q - 2m - (2q - 2m - 8)k}{1-k}\omega_2,$$

$$c = \frac{2(m-q) + (2q - 2m - 4)k}{(1-k)^2}\varphi + \lambda\varphi^k.$$

2. Алгебра L_{21}:

$$f(x) = (x_{n-1}^2 + x_n^2)^{1/(1-k)}, \quad \omega_1 = \alpha \ln(x_{n-1}^2 + x_n^2) - 2 \operatorname{arctg}\frac{x_n}{x_{n-1}},$$

$$\omega_2 = \frac{x_1^2 + \dots + x_m^2}{x_{n-1}^2 + x_n^2}, \quad a_{11} = 4(\alpha^2 + 1), \quad a_{12} = -8\alpha\omega_2, \quad a_{22} = -4\omega_2(\omega_2 - 1),$$

$$b_1 = \frac{8\alpha}{1-k}, \quad b_2 = \frac{4(k+1)}{k-1}\omega_2 - 2m - 2, \quad c = \frac{4}{(1-k)^2}\varphi - \lambda\varphi^k.$$

1. *Fushchich W. I., Serov N. I.* The symmetry and some exact solution of the nonlinear multi dimensional Liouville, d'Alembert and eikonal equations // J. Phys. A.: Math. Gen. – 1983. –**16**, №15. – P. 3645 – 3656.
2. *Fushchich W., Sthelen W., Serov N.* Symmetry analysis and exact solutions of equations of nonlinear mathematical physics. – Dordrecht: Kluwer Publ., 1993.
3. *Grundland A. M., Harnad J., Winternitz P.* Symmetry reduction for nonlinear relativistically equations // J. Math. Phys. – 1984. – **25**, №4. – P. 791 – 806.
4. *Фущич В. И., Баранник А. Ф.* Максимальные подалгебры ранга $n-1$ алгебры $AP(1, n)$ и редукция нелинейных волновых уравнений. I // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, №11. – С. 1552 – 1559.
5. *Фущич В. И., Баранник А. Ф.* Максимальные подалгебры ранга $n-1$ алгебры $AP(1, n)$ и редукция нелинейных волновых уравнений. II // Там же. – №12. – С. 1693 – 1700.
6. *Фущич В. И., Баранник Л. Ф., Баранник А. Ф.* Подгрупповой анализ групп Галилея, Пуанкаре и редукция нелинейных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1991. – 304 с.
7. *Баранник А. Ф., Баранник Л. Ф., Фущич В. И.* Редукция многомерного пуанкаре-инвариантного нелинейного уравнения к двумерным уравнениям // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, №10. – С. 1311 – 1323.

Получено 11. 12. 92