УДК 517 988, 517.947

Ю. В. Богданский, канд. физ.-мат. наук (Киев. политехн. ин-т)

ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СУЩЕСТВЕННО БЕСКОНЕЧНОМЕРНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

The Cauchy problem for the equation $\partial u / \partial t = \mathcal{L}_x u = j(x)(u_x'')$ with positive essentially infinite-dimensional functionals $j(x)$ is studied in a certain Banach space of functions on an infinite-dimensional separable real Hilbert space.

Для рівняння $\partial u / \partial t = \mathcal{L}_x u = j(x)(u_x'')$ з додатними суттєво нескінченновимірними функціоналами $j(x)$ досліджується задача Коші у відповідним чином вибраному банаховому просторі функцій на нескінченновимірному сепарабельному дійсному гільбертовому просторі.

1. Пусть H — бесконечномерное сепарабельное вещественное гильбертово пространство; $B_c(H)$ — банахово (в смысле операторной нормы) пространство самосопряженных ограниченных линейных операторов на H. На пространстве $C^2(H)$ определим линейный эллиптический дифференциальный оператор второго порядка формулой

$$(\mathcal{L}\varphi)(x) = \frac{1}{2} j(x)(\varphi''(x)), \tag{1}$$

где $j(x)$ при каждом $x \in H$ — неотрицательный линейный функционал, определенный на $B_c(H)$; $j(x)$ предполагается при каждом $x \in H$ существенно бесконечномерным в том смысле, что в его ядре лежат все конечномерные (а потому и компактные) операторы из $B_c(H)$.

К таким операторам (случай постоянных коэффициентов) относится оператор Лапласа – Леви, продолженный на все пространство $C^2(H)$. Уравнения с операторами Лапласа – Леви и его модификациями изучались в работах Е. М. Полищука, Г. Е. Шилова, М. Н. Феллера, И. Я. Дорфман, А. С. Немировского, В. Я. Сикирявого, В. Б. Соколовского и других авторов. Спецификой этих операторов является то обстоятельство, что они обращаются в нуль на цилиндрических функциях из $C^2(H)$, а потому не допускают нетривиальных конечномерных аналогов.

Для функций $u : H \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ рассмотрим оператор $\mathcal{L}_x u = \frac{1}{2} j(x)(u_x'')$ по переменной x. Для соответствующего параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{L}_x u \tag{2}$$

исследуем задачу Коши

$$u(x, 0) = \varphi(x). \tag{3}$$

Было замечено, что оператор (1) и решение задачи (2), (3) имеют ряд специфических свойств. Например: $\mathcal{L}_x(u \cdot v) = u \cdot \mathcal{L} v + v \cdot \mathcal{L} u$; решения задачи (2), (3) имеют ограниченную область зависимости от начального условия; для финитных начальных условий решение $u(x, t) \equiv 0$ начиная с некоторого $t_0 > 0$ и др. (см. ссылки по тексту статьи).

Существование решений задачи (2), (3) в случае оператора с постоянным коэффициентом для оператора Лапласа – Леви и его модификаций исследовалось в работах Г. Е. Шилова, Е. М. Полищука, И. Я.Дорфман, В. Я. Сикирявого, а в предложенной постановке — в работе [1]. В настоящей работе приведены достаточные условия разрешимости задачи (2), (3) для случая оператора (1) с переменными коэффициентами.

Пусть $\mathfrak{A}$ —алгебра дважды непрерывно дифференцируемых на H функций u с ограниченными носителями, удовлетворяющих условиям:

а) для каждой $u \in \mathfrak{A}$ существует компакт $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_u \subset B_c(H)$ (его можно считать абсолютно выпуклым) и число $d > 0$ такие, что $u''(x) \in \mathfrak{N} + \Gamma_d$ при каждом $x \in H$ (Γ_d — множество операторов Гильберта–Шмидта из $B_c(H)$, для которых норма Гильберта–Шмидта не превышает d);

б) $u''(\cdot)$ равномерно непрерывна на H.

Пусть X — замыкание $\mathfrak{A}$ в норме равномерной сходимости на H. Если $j(x) \equiv j$ (соответствующий оператор обозначим через L^j), то задача Коши для уравнения (2) в банаховом пространстве X равномерно корректна [1]. Соответствующую сжимающую полугруппу обозначим через $T^j(t)$. При этом генератор полугруппы $T^j(t)$ совпадает с замыканием оператора L^j (его также будем обозначать L^j). Для $\varphi \in \mathfrak{A}, t > 0$: $T^j(t)\varphi \in \mathfrak{A}$, $\mathfrak{N}_{T^j(t)\varphi} \subset \mathfrak{N}_\varphi$ и

$$T^j(t)\,\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \int_H \varphi(x-y)\mu_{tA_n}(dy), \tag{4}$$

где $A_n = A_n(\varphi)$ — последовательность ядерных положительных операторов в H таких, что $\mathrm{Sp}A_n = \|j\|$; $\|A_n\| \to 0$; $j(C) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{Sp}A_n C$ для каждого $C \in \mathfrak{N}_\varphi$ (предел равномерный на $\mathfrak{N}_\varphi$); μ_B — гауссова мера с корреляционным оператором B [1, 2].

Формула (4) позволяет предельным переходом доказать коммутируемость полугрупп $T^{j_1}(\cdot)$ и $T^{j_2}(\cdot)$ на X и равенство $T^{j_1+j_2}(t) = T^{j_1}(t)T^{j_2}(t)$.

Лемма 1. *Пусть j_1, j_2 — неотрицательные функционалы из $B_c^*(H)$ и L_1, L_2 — соответствующие операторы; $\varphi \in \mathfrak{A}$. Тогда*

$$T^{j_2}(t)\varphi - T^{j_1}(t)\varphi = t\int_0^1 T^{j_1+\alpha(j_2-j_1)}(t)(L_2-L_1)\,\varphi\, d\alpha.$$

Доказательство. Достаточно проверить непрерывность по α функции $T^{j_1+\alpha(j_2-j_1)}(t)\varphi$, $\varphi \in X$, $0 \le \alpha \le 1$, и равенство

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} T^{j_1+\alpha(j_2-j_1)}(t)\varphi = tT^{j_1+\alpha(j_2-j_1)}(t)(L_2-L_1)\varphi, \quad \varphi \in \mathfrak{A}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Для $j = j_1 + \alpha(j_2 - j_1)$, $0 \le \alpha < 1$, и $h \in (0, 1-\alpha)$ имеем

$$T^{j+h(j_2-j_1)}(t)\varphi - T^j(t)\varphi = [T^{j+hj_2}(t)\varphi - T^j(t)\varphi] - [T^{j+hj_2}(t)\varphi -$$

$$- T^{j+h(j_2-j_1)}(t)\varphi] = T^j(t)[T^{j_2}(ht)\varphi - \varphi] - T^{j+h(j_2-j_1)}(t)[T^{j_1}(ht)\varphi - \varphi],$$

откуда следует $\lim\limits_{h\to+0} T^{j+h(j_2-j_1)}(t)\varphi = T^j(t)\varphi$.

Далее

$$\lim_{h\to+0}\frac{1}{h}[T^{j+h(j_2-j_1)}(t)\varphi - T^j(t)\varphi] = T^j(t)\lim_{h\to+0}\frac{1}{h}[T^{j_2}(ht)\varphi - \varphi] -$$

$$- \lim_{h\to+0} T^{j+h(j_2-j_1)}(t)\frac{1}{h}[T^{j_1}(ht)\varphi - \varphi] = tT^j(t)(L_2-L_1)\varphi.$$

Меняя ролями j_1 и j_2 и меняя α на $1-\alpha$, получаем непрерывность слева и значение левой производной.

2. Пусть отображение $j: H \to B_c^*(H)$ таково, что

$$j(\cdot)(B) \in \mathfrak{A} \quad \text{для каждого} \quad B \in B_c(H). \tag{5}$$

Тогда в силу теоремы Банаха – Штейнгауза оно ограничено: $\|j(x)\| \le c$ для всех $x \in H$.

Зафиксируем $\varphi \in \mathfrak{A}$ и $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_\varphi$. В силу теоремы Арцела $\mathcal{D} = \{ j(x)|_{\mathfrak{N}}, x \in H\}$ компактно в топологии равномерной сходимости на $\mathfrak{N}$.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и пусть $\{ j_1|_{\mathfrak{N}}, \ldots, j_m|_{\mathfrak{N}} \}$ — ε-сеть для $\mathcal{D}$. Фиксируем $C_1, \ldots, C_n \in \mathfrak{N}$, $n \ge m-1$. Пусть $\vec{a}_k = (j_k(C_1), \ldots, j_k(C_n)) \in \mathbb{R}^n$, $k = 1, \ldots, m$; $H \ni x \mapsto \Phi(x) = (j(x)(C_1), \ldots, j(x)(C_n)) \in \mathbb{R}^n$.

Пусть M — выпуклая оболочка $\{ \vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_m \}$ в $\mathbb{R}^n$. Малым по норме $\| \vec{a} \|_\infty = \sup\limits_{1\le k\le n} |a^k|$ сдвигом $\vec{a}_s$ можно превратить M в симплекс M' с вершинами в $\vec{a}'_s$ ($\| \vec{a}'_s - \vec{a}_s \|_\infty < \varepsilon$, $s = 1, 2, \ldots, m$).

Наделим $\mathbb{R}^n$ нормой $\| \vec{a} \|_p = \left(\sum_{k=1}^n |a^k|^p\right)^{1/p}$, $p > 1$, и рассмотрим проекцию $\Phi(H)$ на M' в этой норме. При этом $\mathrm{pr}_{\mathcal{M}'}\vec{a} = \sum_{k=1}^m \alpha_k(\vec{a})\vec{a}'_k$, где $\sum_1^m \alpha_k(\cdot) \equiv 1$; $\alpha_k(\cdot) \ge 0$ и функции α_k непрерывны. Заменив $\alpha_k(\cdot)$ близкими к ним на ограниченном множестве $\Phi(H) \subset \mathbb{R}^n$ гладкими функциями $\tilde{\alpha}_k(\cdot)$ ($|\tilde{\alpha}_k(\vec{a}) - \alpha_k(\vec{a})| < \varepsilon$ на $\Phi(H)$, $k = 1, 2, \ldots, m$), определим $\beta_k(x) = \tilde{\alpha}_k(\Phi(x)) = \tilde{\alpha}_k(j(x)(C_1), \ldots, j(x)(C_n))$ и рассмотрим функционал $\omega(x) = \sum_{k=1}^m \beta_k(x)\, j_k$.

Тогда: 1) $\beta_k(\cdot) = \tilde{\alpha}_k(j(\cdot)(C_1), \ldots, j(\cdot)(C_n)) \in \mathfrak{A}$; 2) выбор достаточно большого $p > 1$ гарантирует неравенство $| \| \vec{a} - \vec{b} \|_\infty - \| \vec{a} - \vec{b} \|_p | < \varepsilon$ для всех $\vec{a}, \vec{b} \in \Phi(H) \cup M'$.

Поэтому

$$\| \Phi(x) - \mathrm{pr}_{\mathcal{M}'}\Phi(x)\|_\infty < \| \Phi(x) - \mathrm{pr}_{\mathcal{M}'}\Phi(x)\|_p + \varepsilon \le$$

$$\le \min_{1\le s\le m} \| \Phi(x) - \vec{a}_s \|_p + \varepsilon \le \min_{1\le s\le m} \| \Phi(x) - \vec{a}'_s \|_\infty + 2\varepsilon \le$$

$$\le \min_{1\le s\le m} \| \Phi(x) - \vec{a}_s \|_\infty + 3\varepsilon = \min_{1\le s\le m} \max_{1\le k\le n} |j(x)(C_k) - j_s(C_k)| + 3\varepsilon \le 4\varepsilon.$$

Отсюда следует, что для всех $l = 1, 2, \ldots, n$, $x \in H$ выполняется неравенство

$$|j(x)(C_l) - \omega(x)(C_l)| = |j(x)(C_l) - \sum_{k=1}^m \tilde{\alpha}_k(\Phi(x)) j_k(C_l)| < 4\varepsilon + \varepsilon c \sup_{\mathfrak{N}} \| C \|.$$

Если при этом $C_1, C_2, \ldots, C_n$ выбраны в $\mathfrak{N}$ так, что они образуют в нем ε-сеть, то, выбрав для каждого $C \in \mathfrak{N}$ соответствующее C_l ($\| C - C_l \| < \varepsilon$), получим

$$|\omega(x)(C) - j(x)(C)| < 4\varepsilon + \varepsilon c \sup_{\mathfrak{N}} \| C \| + 2\varepsilon c.$$

Таким образом, для любых $\varphi \in \mathfrak{A}$ и $\varepsilon > 0$ найдется $\omega : H \to B_c^*(H)$, такое, что: а) $\omega(x) = \sum_{k=1}^{m} \beta_k(x) j_k$; $\beta_k(\cdot) \in \mathfrak{A}$; $\beta_k(\cdot) \geq 0$; $\sum_{k=1}^{m} \beta_k(\cdot) \equiv 1$; j_k, $k = 1, 2, \ldots, m$, — существенно бесконечномерный неотрицательный функционал; б) $|\omega(x)(\varphi''(x)) - j(x)(\varphi''(x))| < \varepsilon$ для всех $x \in H$.

Предложение. *Если j удовлетворяет условию* (5), *то* $\mathcal{L}\varphi \in X$ *для* $\varphi \in \mathfrak{A}$.

3. Пусть J — конус неотрицательных существенно бесконечномерных функционалов на $B_c(H)$.

Лемма 2. *Пусть $j_1, j_2, \ldots, j_m \in J$ и $L_1, \ldots, L_m$ — соответствующие операторы в X.. Тогда множество $Y \subset \mathfrak{A}$, состоящее из всех функций $\varphi \in \mathfrak{A}$, для которых определены $L_{i_1}^{k_1} L_{i_2}^{k_2} \ldots L_{i_s}^{k_s} \varphi \in \mathfrak{A}$, $k_1, \ldots, k_s \in \mathbb{N}$; $i_1, \ldots, i_s = 1, 2, \ldots, m$; $s \in \mathbb{N}$, плотно в X.*

Доказательство. Пусть $\gamma(\tau_1, \ldots, \tau_m)$ — финитная C^∞-функция в области $\{\tau_k > 0,\ k = 1, 2, \ldots, m\}$ и $\varphi \in \mathfrak{A}$. Тогда функция

$$y = \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty \gamma(\tau_1, \ldots, \tau_m) T_1(\tau_1) \ldots T_m(\tau_m) \varphi \, d\tau_1 \ldots d\tau_m \in Y \tag{6}$$

($T_m(\cdot)$ — полугруппа, соответствующая j_k). Множество таких функций при всевозможных γ и φ плотно в X. Рассуждения аналогичны приведенным в работе [3, с.60].

Очевидно, Y — подалгебра в $\mathfrak{A}$, инвариантная относительно действия операторов L_k, $k = 1, 2, \ldots, m$.

Пусть отображение j имеет вид

$$j(x) = \sum_{k=1}^{m} \beta_k(x) j_k, \quad \beta_k \in Y; \quad j_k \in J, \quad \beta_k \geq 0. \tag{7}$$

Для любой функции $\varphi \in X$ определим функцию $S(t)\varphi$ формулой

$$(S(t)\varphi)(x) = (S^j(t)\varphi)(x) = [T^{j(x)}(t)\varphi](x). \tag{8}$$

Громоздкими, но принципиально простыми рассуждениями доказывается, что для $\varphi \in Y : S(t)\varphi \in \mathfrak{A}$ и при этом

$$(S(t)\varphi)''(x) = \frac{1}{2} t T^{j(x)}(t) \Big(\sum_{k=1}^{m} j_k(\varphi''(\cdot)) \beta_k''(\cdot) \Big) + T^{j(x)}(t)(\varphi''(\cdot)) +$$

$$+ \text{ конечномерный оператор.} \tag{9}$$

Здесь $T^{j(x)}(t)(A(\cdot))$ — оператор, определенный формулой $(T^{j(x)}(t)(A(\cdot))h_1, h_2) = T^{j(x)}(t)(A(\cdot)h_1, h_2)$ для всех $h_1, h_2 \in H$, корректной ввиду легко проверяемого факта: $(\varphi''(\cdot)h_1, h_2) \in X$ для любой $\varphi \in \mathfrak{A}$. Гладкость $S(t)\varphi$ устанавливается на основании леммы 1.

Введем на $B_c(H)$ полунорму $\|A\|_\infty = \sup\{|\omega(A)| \mid \omega \in J;\ \|\omega\| = 1\}$.

Из (9) для $x \in H$ следует оценка

$$\|(S(t)\varphi)''(x)\|_\infty \leq (1 + td) \sup_{y \in H} \|\varphi''(y)\|_\infty, \tag{10}$$

где

$$d = d(j) = \frac{1}{2} \sup_{x \in H} \sum_{k=1}^{m} \|j_k\| \, \|\beta_k''(x)\|_\infty. \tag{11}$$

Кроме того (учитывая коммутируемость полугрупп $T^{j_i}(t)$ и $T^{j(x)}(t)$ при каждом $x \in H$)

$$L^{j_i}(S(t)\varphi) = tS(t)\left(\sum_{k=1}^{m} L^{j_k}\varphi \cdot L^{j_i}\beta_k\right) + S(t)(L^{j_i}\varphi) \in S(t)(Y) \subset \mathfrak{A}.$$

Следовательно, Y инвариантно относительно $S(t)$; $S(t) : X \to X$ и $\|S(t)\| = 1$.

4. Покажем, что для любых $\varphi \in Y$, $t > 0$ существует $\lim\limits_{m\to\infty} S(t/2^m)^{2^m}\varphi$ (по норме X). Имеем

$$(S(t)^2\varphi - S(2t)\varphi)(x) = T^{j(x)}(t)[T^{j(\cdot)}(t)\varphi(\cdot) - T^{j(x)}(t)\varphi(\cdot)](x), \tag{12}$$

$$T^{j(y)}(t)\varphi(y) - T^{j(x)}(t)\varphi(y) =$$

$$= t\left(\int_0^1 T^{j(x)+\alpha(j(y)-j(x))}(t)\left(L^{j(y)} - L^{j(x)}\right)\varphi\, d\alpha\right)(y). \tag{13}$$

Так как $\|j(\cdot)\| \le c$ на H, то для оценки правой части равенства (12) достаточно в формуле (13) рассматривать y в окрестности x радиуса $\sqrt{ct}$ [4].

Учитывая, что $j(\cdot)$ в (7) подчинено условию Липшица

$$\|j(y)-j(x)\| \le c_1\|y-x\|,$$

при $\|y-x\| \le \sqrt{ct}$ получаем

$$\|(L^{j(y)} - L^{j(x)})\varphi\| = \frac{1}{2}\|(j(y)-j(x))(\varphi'')\| \le \frac{1}{2}c_1\sqrt{ct}\sup_H\|\varphi''(\cdot)\|_\infty$$

и

$$|T^{j(y)}(t)\varphi(y) - T^{j(x)}(t)\varphi(y)| \le \frac{1}{2}c_1 c^{1/2} t^{3/2}\sup_H\|\varphi''(\cdot)\|_\infty. \tag{14}$$

В силу (12) – (14) имеем

$$\|S(t)^2\varphi - S(2t)\varphi\| \le \tilde c\, t^{3/2}\sup_H\|\varphi''(\cdot)\|_\infty, \quad \tilde c = \frac{1}{2}c_1c^{1/2}.$$

В силу (10)

$$\|(S(t)^m\varphi)''(x)\|_\infty \le (1 + td)^m\sup_H\|\varphi''(\cdot)\|_\infty.$$

Тогда

$$\|S(t/4)^4\varphi - S(t/2)^2\varphi\| \le \|S(t/4)^2(S(t/4)^2 - S(t/2))\varphi\| +$$

$$+\|(S(t/4)^2 - S(t/2))S(t/2)\varphi\| \le \tilde c(t/4)^{3/2}(1 + (1 + (t/2)d))\sup_H\|\varphi''(\cdot)\|_\infty$$

или более общо:

$$\|S(t/2^{n+1})^{2^{n+1}}\varphi - S(t/2^n)^{2^n}\varphi\| \le$$

$$\le \tilde c(t/2^{n+1})^{3/2}\sum_{k=0}^{2^n-1}(1 + (t/2^n)d)^k\sup_H\|\varphi''(\cdot)\|_\infty =$$

$$= \tilde c\,\frac{t^{3/2}}{2^{3(n+1)/2}}\,\frac{\left(1+(t/2^n)\,d\right)^{2^n} - 1}{(t/2^n)d}\sup_H\|\varphi''(\cdot)\|_\infty = O(2^{-n/2}) \text{ при } n\to\infty,$$

откуда при всех $t \ge 0$, $\varphi \in Y$ следует сходимость $S(t/2^n)^{2^n}\varphi \to V^j(t)\varphi$. Поэтому сходимость имеет место и для всех $\varphi \in X$.

5. Покажем, что $V(t) = V^j(t)$ — (C_0)-полугруппа в X. Проверим равенство

$$V(nt) = V^n(t),\ t \geq 0,\ n = 1, 2, \ldots . \tag{15}$$

Пусть $\varphi \in Y$. Тогда

$$\begin{aligned}[S(nt) - S^n(t)]\varphi(x) &= T^{j(x)}(t)\, T^{j(x)}(t) \ldots T^{j(x)}(t)\varphi(x) - \\ &- T^{j(x)}(t)\, T^{j(y)}(t)\, T^{j(z)}(t) \ldots T^{j(u)}(t)\varphi(x) = \\ &= T^{j(x)}(t)[\, T^{j(x)}(t) - T^{j(y)}(t)\,]\, T^{j(x)}(t) \ldots T^{j(x)}(t)\varphi(x) + \\ &+ T^{j(x)}(t)\, T^{j(y)}(t)[\, T^{j(x)}(t) - T^{j(z)}(t)\,] \ldots T^{j(x)}(t)\varphi(x) + \ldots \\ &\ldots + T^{j(x)}(t)\, T^{j(y)}(t) \ldots [\, T^{j(x)}(t) - T^{j(u)}(t)\,]\varphi(x).\end{aligned}$$

Поскольку для любого фиксированного $\omega \in J$: $\sup\limits_H \| \left(T^{\omega}(t)\varphi\right)''(\cdot)\|_\infty \leq \leq \sup\limits_H \| \varphi''(\cdot)\|_\infty$, то для всех $x \in H$

$$\begin{aligned}|(S(nt) - S^n(t))\varphi(x)| &\leq \tilde{c} \sup_H \| \varphi''(\cdot)\|_\infty t\,(t^{1/2} + (2t)^{1/2} + \ldots \\ &\ldots + ((n-1)t)^{1/2}) \leq \tilde{c} \sup_H \| \varphi''(\cdot)\|_\infty t^{3/2} n^{3/2}.\end{aligned}$$

Здесь использованы тот факт, что значение левой части зависит лишь от y, $z, \ldots, u$ таких, что $\| y - x\| \leq \sqrt{ct}$, $\| z - x\| \leq \sqrt{2ct}, \ldots, \| u - x\| \leq \sqrt{c(n-1)t}$ [4], и формула (14).

Отсюда (по аналогии с п. 4):

$$\begin{aligned}&\| [\, S^{nm}(t/m) - S^m(n\,t/m)\,]\varphi \| \leq \\ &\leq \tilde{c} \sup_H \| \varphi''(\cdot)\|_\infty (n\,t/m)^{3/2} \sum_{l=0}^{m-1} (1 + n\,t\,d/m)^l = \\ &= \tilde{c} \sup_H \| \varphi''(\cdot)\|_\infty (n\,t/m)^{1/2} \frac{(1 + ntd/m)^m - 1}{d}\end{aligned}$$

(в силу тождества $A^m - B^m = A^{m-1}(A - B) + A^{m-2}(A - B)B + \ldots + (A - B)B^{m-1}$).

Положив $m = 2^k$, получим при $k \to \infty$ равенство (15).

Для произвольного $\beta \in Q_+$, $\beta = p/q$, $p, q \in \mathbb{N}$,

$$V(\beta t + t) = V\left(\frac{p}{q}t + t\right) = V\left(\frac{t}{q}\right)^{p+q} = V(\beta t)V(t).$$

Пусть $\varphi \in Y$. Тогда

$$\begin{aligned}|[\, S(t + \Delta t) - S(t)\,]\varphi(x)| &= |T^{j(x)}(t)[\, T^{j(x)}(\Delta t) - I\,]\varphi(x)| \leq \\ &\leq \frac{1}{2} c\, \Delta t \sup_H \| \varphi''(\cdot)\|_\infty,\end{aligned}$$

так как $(T^{j(x)}(\Delta t) - I)\varphi = \int_0^{\Delta t} L^{j(x)} T^{j(x)}(t)\varphi\, dt$.

Отсюда

$$\left\| \left(S^m\left(\frac{t + \Delta t}{m}\right) - S^m\left(\frac{t}{m}\right)\right)\varphi \right\| \leq \frac{1}{2} c\, \Delta t \sup_H \| \varphi''(\cdot)\|_\infty \frac{\Delta t}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \left(1 + \frac{td}{m}\right)^k =$$

$$= \frac{1}{2} c \sup_H \| \varphi''(\cdot)\|_\infty \Delta t \frac{\left(1 + \dfrac{td}{m}\right)^m - 1}{td} \leq \frac{1}{2} c \sup_H \| \varphi''(\cdot)\|_\infty \Delta t \frac{e^{td} - 1}{td}.$$

Из последнего неравенства с учетом условия $\|V(t)\| \leq 1$ вытекает сильная непрерывность $V(t), t \geq 0$. Отсюда следует также равенство $V(t+\beta t)\varphi = V(t)V(\beta t)\varphi$ для любых $\beta, t \in \mathbb{R}_+$ и $\varphi \in X$.

Покажем, что генератор полугруппы $V'(0)$ на $\mathfrak{A}$ совпадает с $\mathcal{L}$.

Пусть $\varphi \in \mathfrak{A}$. Тогда для $x, y \in H$ справедлива формула

$$\varphi(y) - \varphi(x) = (\varphi'(x), y-x) + \frac{1}{2}(\varphi''(x)(y-x), y-x) + \vartheta_x(y),$$

в которой $\vartheta_x(y) = o(\|y-x\|^2)$ равномерно по $x \in H$. Поэтому $\vartheta_x \in \mathfrak{A}$ при каждом $x \in H$ и на основании [4] значение $S^n(t/n)\vartheta_x$ в точке x зависит от значений ϑ_x в окрестности точки x радиуса $\sqrt{ct}$. Следовательно, $[S^n(t/n)\vartheta_x](x) = o(t)$ равномерно по $x \in H$ и $n \in \mathbb{N}$.

Далее $(S(t)(\xi, \cdot))(x) = (\xi, x)$, $\xi \in H$, а потому $[S^n(t/n)(\varphi'(x), y-x)](x) = 0$ (среднее берется по переменной y).

Если $g_x(\cdot) = j(\cdot)(\varphi''(x)) \in \mathfrak{A}$, то ввиду формулы $[T^{j(x)}(t)(By, y)](x) = (Bx, x) + tj(x)(B)$ нетрудно получить равенство

$$[S^n(t/n)(\varphi''(x)(y-x), y-x)](x) = (t/n)[g_x(x) + (S(t/n)g_x)(x) + (S^2(t/n)g_x)(x) + \ldots + (S^{n-1}(t/n)g_x)(x)]. \tag{16}$$

Так как $|g_x(y) - g_x(x)| \leq c_1\|y-x\|\|\varphi''(x)\|$, то правая часть равенства (16) отличается от $2t\mathcal{L}\varphi(x)$ не более, чем на $c_1c^{1/2}t^{3/2}\|\varphi''(x)\|$ при всех $x \in H$.

Теперь с помощью стандартных выкладок получаем $V'(0)|_{\mathfrak{A}} = \mathcal{L}$.

6. Теорема. *Пусть*

$$j(x) = \sum_{k=1}^{m} \alpha^k(x)j_k, \tag{17}$$

где $j_k \in J$, *а* $\alpha^k \in \mathfrak{A}$, $\alpha^k \geq 0$. *Тогда существует* (C_0)-*полугруппа* $V(t)$ *в* X, *для которой* $V'(0)|_{\mathfrak{A}} = \mathcal{L}$.

Полугруппа уже построена для случая $\alpha^k \in Y$. В силу леммы 2 функцию $\alpha \in \mathfrak{A}$ можно приблизить в X функциями $\beta_n \in Y$ вида (6), причем если γ_n — δ-образная последовательность функций из $C_0^\infty(\mathbb{R}_+^n)$, то, как нетрудно заметить $\|\beta_n - \alpha\| \to 0$,

$$\sup_H \|\beta_n''(\cdot)\| \leq \sup_H \|\alpha''(\cdot)\| \tag{18}$$

при $n = 1, 2, \ldots$ и $\beta_n''(x)$ слабо сходится к $\alpha''(x)$ равномерно по x.

Пусть $\tilde{j}_r(x) = \sum_{k=1}^m \beta_r^k(x)j_k$, $\beta_r^k \in Y$, $r = 1, 2$. Оценим разность $\left\|V^{\tilde{j}_1}(t)\varphi - V^{\tilde{j}_2}(t)\varphi\right\|$, $\varphi \in Y$. В силу (13)

$$\left|(S^{\tilde{j}_1}(t)\varphi - S^{\tilde{j}_2}(t)\varphi)(x)\right| \leq t\left\|L^{\tilde{j}_1(x)}\varphi - L^{\tilde{j}_2(x)}\varphi\right\|.$$

Поэтому

$$\left\|S^{\tilde{j}_1}(t)\varphi - S^{\tilde{j}_2}(t)\varphi\right\| \leq \frac{t}{2}\sup_H\|\tilde{j}_1(\cdot) - \tilde{j}_2(\cdot)\|\sup_H\|\varphi''(\cdot)\|_\infty. \tag{19}$$

Отсюда по аналогии с п.4 имеем

$$\left\| S^{\tilde{j}_1}(t/n)^n \varphi - S^{\tilde{j}_2}(t/n)^n \varphi \right\| \le$$

$$\le \frac{t}{2n} \sum_{k=1}^{n} (1 + td/n)^k \sup_H \left\| \tilde{j}_1(\cdot) - \tilde{j}_2(\cdot) \right\| \sup_H \|\varphi''(\cdot)\|_\infty =$$

$$= \frac{1}{2d}\left((1+td/n)^n - 1\right) \sup_H \left\| \tilde{j}_1(\cdot) - \tilde{j}_2(\cdot) \right\| \sup_H \|\varphi''(\cdot)\|_\infty,$$

где $d = d(\tilde{j}_2)$ определено формулой (11).

С помощью перехода $(n = 2^k \to \infty)$ получаем

$$\left\| V^{\tilde{j}_1}(t)\varphi - V^{\tilde{j}_2}(t)\varphi \right\| \le \frac{e^{td} - 1}{2d} \sup_H \left\| \tilde{j}_1(\cdot) - \tilde{j}_2(\cdot) \right\| \sup_H \|\varphi''(\cdot)\|_\infty. \qquad (20)$$

Если теперь $\tilde{j}_s(x) = \sum_{k=1}^m \beta_s^k(x) j_k$, $s = 1, 2, \ldots$, где $\beta_s^k \in Y$ построены по α^k (см. (17)) указанным выше способом, то в силу (18)

$$d(\tilde{j}_s) \le \frac{1}{2} \sup_{x \in H} \sum_{k=1}^{m} \| j_k \| \|\alpha^k(x)\|$$

и из (20) следует сильная сходимость полугрупп $V^{\tilde{j}_s}(t)$ к сжимающей (C_0)-полугруппе $V(t) = V^j(t)$.

$S^j(t): X \to X$, а в силу (19) имеет место сильная сходимость $S^{\tilde{j}_s}(t) \to S^j(t)$. С помощью стандартных рассуждений убеждаемся в сильной сходимости $[S^j(t/2^n)]^{2^n} \to V^j(t)$. Поэтому рассуждения п.5 показывают, что $V'(0)|_{\mathfrak{A}} = \mathcal{L}$.

***Замечание* 1.** Условие финитности функций из алгебры $\mathfrak{A}$ не принципиально для результата. $\mathfrak{A}$ можно заменить алгеброй $\tilde{\mathfrak{A}}$ ограниченных на H функций, совпадающих на каждом шаре в H с некоторой функцией из $\mathfrak{A}$.

***Замечание* 2.** В случае, когда $\alpha^k(x) \ge \varepsilon > 0$ — функции из $\tilde{\mathfrak{A}}$, генератор построенной полугруппы совпадает с $\overline{\mathcal{L}}$ и при этом справедлива формула

$$[V(s)u](x) = \left[\prod_{k=1}^m T^{j_k}(t_k(s,x))\, u \right](x),$$

где $u \in X$, а функции $t_k(s,x)$ удовлетворяют условиям

$$\frac{\partial}{\partial s} t_k(s,x) = \left(T^{j_k}(t_k(s,x))\alpha^k\right)(x),$$

$$t_k(0,x) = 0, \; k = 1, 2, \ldots, m.$$

В этом случае в силу формулы Чернова [5] $V(t)\varphi = \lim\limits_{n\to\infty} S(t/n)^n \varphi$ для всех $\varphi \in X$.

1. *Богданский Ю. В.* Задача Коши для уравнения теплопроводности с нерегулярным эллиптическим оператором // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 5. – С. 584 – 590.
2. *Богданский Ю. В.* Принцип максимума для нерегулярного эллиптического дифференциального уравнения в счетномерном гильбертовом пространстве // Там же. – 1988. – **40**, № 1. – С. 21 – 25.
3. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1967. – 464 с.
4. *Богданский Ю. В.* Задача Коши для параболических уравнений с существенно бесконечномерными эллиптическими операторами // Укр. мат. журн. – 1977. – **29**, № 6. – С. 781 – 784.
5. *Голдстейн Дж.* Полугруппы линейных операторов и их приложения. – Киев: Вища шк., 1989. – 348 с.

Получено 13. 03. 92