УДК 512.54

Ю. В. Боднарчук, канд. физ.-мат. наук (Винниц. пед. ин-т)

ОБ ИЗОМОРФИЗМЕ СПЛЕТЕНИЙ ГРУПП

The well-known P. Neumann's theorem on the isomorphism of standard wreath products is generalized for the wreath products of an arbitrary transitive permutation group with an abstract group.

Відома теорема П. Неймана про ізоморфізм стандартних вінцевих добутків груп узагальнюється на вінцеві добутки довільної транзитивної групи підстановок з абстрактною групою.

Настоящая работа посвящена обобщению хорошо известной теоремы П. Неймана [1] об изоморфизмах стандартных сплетений групп на сплетения произвольной транзитивной группы подстановок с абстрактной группой. Отметим также работы [2, 3] в этом направлении.

Пусть $W = (G, X) \wr H$, $W_1 = (B, Y) \wr L$ — декартовые (прямые) сплетения групп подстановок с абстрактными группами, через F и V обозначим их базы.

Теорема. *Пусть* $\mu : W \to W_1$ *— изоморфизм декартовых (прямых) сплетений. Тогда справедливо только одно из следующих утверждений:*

1. $F^{\mu} = V$, *тогда* $H \cong L$ *и существует автоморфизм* $\gamma \in \operatorname{Aut} W_1 : G^{\mu\gamma} = B$.

2. $F^{\mu} \supset V$, *тогда можно продолжить разложение* W *и* W_1 *в декартовые (прямые) сплетения:* $(B, Y) = (B^1, Y^1) \wr (R, Y_0)$, $H \cong (R, Y_0) \wr L$, *где* (B^1, Y^1), (R, Y_0) *— транзитивные группы подстановок. С помощью ассоциативности операции сплетения группы подстановок этот случай сводится к случаю* 1.

3. $F^{\mu} \subset V$. *Заменой* $\mu \to \mu^{-1}$ *сводится к случаю* 2.

4. $F^{\mu} \not\subset V$ *и* $F^{\mu} \not\supset V$, *тогда* $H \cong L$ *— группа диэдра специального типа* [1] *и имеют место разложения в декартовые (прямые) сплетения* $(G, X) = (G^1, X^1) \wr C_2$, $(B, Y) = (B^1, Y^1) \wr C_2$, *где* C_2 *— циклическая группа второго порядка. Перестановкой скобок в* W *и* W_1 *этот случай также сводится к* 1.

Доказательство. Введем некоторые обозначения:

$$\varepsilon_{t,l}(y) = \begin{cases} l \in L, \text{ если } y = t \in Y; \\ e \text{ — единичный элемент при } t \neq l. \end{cases}$$

Положим $Q_x = \{\varepsilon_{x,h} \mid h \in H\} \cong H$, $P_y = \{\varepsilon_{y,l} \mid l \in L\} \cong L$.

Подгруппы Q_x, $x \in X$, P_y, $y \in Y$, порождают базы прямых сплетений. Пусть $x_0 \in X$ и $y_0 \in Y$ — произвольные точки, G_0 и B_0 — их стабилизаторы в G и B соответственно, $Q = Q_{x_0}$, $P = P_{y_0}$. Через π_1 и π обозначим канонические гомоморфизмы $W \to G$, $W_1 \to B$ соответственно. Справедливо соотношение

$$\left[w_0^{-1} \varepsilon_{x_0,h} w_0, \varepsilon_{x_0,h_1}\right] = e, \tag{1}$$

которое должно выполняться для любого $w \in W$ такого, что $w^{\pi_1} \notin G_0$.

Перейдем теперь к рассмотрению случая 1 теоремы. Если база переходит в базу, то образом группы G будет некоторое дополнение к V, т. е. $W = V \lambda G^{\mu}$.

Согласно [4], каждое дополнение с точностью до сопряженности характеризуется гомоморфизмом $\theta: B_0 \to L$.

Лемма 1. *Если* θ *— гомоморфизм, который соответствует дополнению* G^{μ}, *то* $\operatorname{Im}\theta \leq Z(L)$.

Доказательство. Пусть $G^{\mu} = \{bV_b \mid b \in B\}$, соответствующий гомоморфизм θ определяется следующим образом: $b_0^{\theta} = v_{b_0}(y_0) \quad \forall\, b_0 \in B_0$. Пусть $f_l(x)$ — прообраз функции $\varepsilon_{y_0,l}$ и ψ — произвольная функция из F. Поскольку $(\psi^{\mu b_0})(\psi^{\mu})^{-1}(y_0) = e \quad \forall\, b_0 \in B_0$, то имеем равенство $\left[\varepsilon_{y_0,l}, b_0(\psi^{\mu b_0})(\psi^{\mu})^{-1}\right] = e \quad \forall\, l \in L,\ b_0 \in B_0,\ \psi \in F$. Пусть $w^{\mu} = b_0$, где $w = g_1\varphi_1 \in W$. Так как $b_0\varphi^{\mu b_0}(\psi^{\mu})^{-1} = \psi^{\mu} b_0(\psi^{-1})^{\mu} = (\psi w \psi^{-1})^{\mu}$, то, применяя к коммутаторному равенству μ^{-1}, получаем $[f_l, \psi w \psi^{-1}] = e$ или $\left[f_l, g_1\psi^{g_1}\varphi_1\psi^{-1}\right] = e$. Пусть $z \in X$ — произвольная точка. Если $g_1 z \neq z$, то ψ можно выбрать таким образом, что $\psi^{g_1}\varphi_1\psi^{-1}(z) = e$. Тогда из предыдущего равенства следует $f_l(g_1 z) = f_l(z)$. Если $g_1 z = z$, то это также выполняется, поэтому $[f_l, g_1] = e \quad \forall\, l \in L$. Поскольку $(g_1\varphi_1)^{\mu} = b_0$, то $g_1^{\mu} = b_0\varphi_{b_0}$, где $\varphi_{b_0} = (\varphi_1^{\mu})^{-1}$. Применяя к последнему коммутаторному равенству μ, получаем $\left[\varepsilon_{y_0,l}, b_0\varphi_{b_0}\right] = e \quad \forall\, l \in L$, откуда $\varphi_{b_0}(y_0) \in Z(L) \quad \forall\, b_0 \in B_0$. Лемма доказана.

Как следует из [4], можно построить автоморфизм $\gamma \in \operatorname{Aut} W_1$ такой, что $B^{\gamma} = G^{\mu}$, $v^{\gamma} = v \quad \forall\, v \in V$. Перейдя к изоморфизму $\mu_1 = \mu\gamma^{-1}$, получим $G^{\mu} = B$, $F^{\mu_1} = V$. Доказательство изоморфизма $H \cong L$, данное в [1] для стандартных сплетений, дословно переносится на общий случай.

Для дальнейшего нам понадобится ряд утверждений об изоморфизмах типа 2 – 4. Пусть $\varepsilon_{x_0,h} = b_h v_h$, $h \in H$, $v_h \in V$, где $\{b_h v_h \mid h \in H\} = G^{\mu\pi}$.

Применяя μ к соотношению (1), получаем равенство

$$\left[w b_h v_h w^{-1}, b_{h_1} v_{h_1}\right] = e \tag{2}$$

$\forall\, h, h_1 \in H$ и любого $w \in W_1$ такого, что

$$w^{\mu^{-1}\pi_1} \notin G_0 \tag{3}$$

Подставив в (2) $w = q^{-1}p(y)$, $q \in B$, $p(y) \in V$, будем иметь

$$b_h^q b_{h_1} = b_{h_1} b_h^q, \tag{4}$$

$$\left(p^{b_h} v_h p^{-1}\right)^{q b_{h_1}} v_{h_1} = v_{h_1}^{b_h^q}\left(p^{b_h} v_h p^{-1}\right)^q. \tag{5}$$

Лемма 2. *Если* μ *— гомоморфизм такой, что* $F^{\mu\pi} \neq \{e\}$, *то существует функция* $p(x) \in F$ *такая, что* $p(x)^{\mu\pi} \notin B_0$.

Доказательство следует из того, что подгруппа B_0 антиинвариантна (не содержит нормальных делителей B), что эквивалентно точности действия (B, Y). Перейдем к рассмотрению случая 4.

Лемма 3. *В случае 4 существует $f \in F$ с конечным носителем такая, что $f^{\mu\pi} \neq e$.*

Доказательство. Для прямых сплетений лемма очевидна. Положим в (5) $q = e$:

$$\left(p^{b_h} v_h p^{-1}\right)^{b_{h_1}} v_{h_1} = v_{h_1}^{b_h}\left(p^{b_h} v_h p^{-1}\right). \tag{6}$$

Предположим, что для всех $\varphi \in V$ с конечным носителем $\varphi^{\mu^{-1}\pi_1} = e$. Согласно лемме 2 (для μ^{-1}), существует $p(y) \in V$, удовлетворяющая условию (3). Тогда функция $p_1 = p\varphi$ удовлетворяет (3) для любой φ с конечным носителем. Выберем φ таким образом, чтобы $p_1\left(g_{h_1} t\right) = p_1(g_h t) = p_1(t) = e$. Тогда, положив в (7) $p = p_1$ в произвольной точке $t \in Y$, получим $v_h\left(b_{h_1} t\right) v_{h_1}(t) = v_{h_1}(b_h t)\, v_h(t)$, которое вместе с равенством (4) означает, что $Q^{\mu} \cong H$ — абелева группа (а значит, и F — абелева). С другой стороны, в силу леммы 2 существует $q(x) \in F$ такая, что $q^{\mu\pi} \notin B_0$. Тогда $\left[q^{\mu}, \varepsilon_{y_0,l}\right] \neq e$. Исходя из сделанного предположения $\varepsilon_{y_0,l}^{\mu^{-1}} = \psi \in F$. Применяя μ^{-1} к коммутаторному равенству, приходим к противоречию с $[q, \psi] \neq e$. Лемма доказана.

Учитывая антиинвариантность G_0, получаем такое следствие.

Следствие. *Существует точка $t \in Y$ и элемент $l \in L$ такие, что для $w = \varepsilon_{t,l}$ выполнено условие* (3).

Так как y_0 выбиралось произвольно, то можно положить $y_0 = t$. Обозначим через $N(M)$ нормальное замыкание $Q^{\mu\pi}\left(p^{\mu^{-1}\pi_1}\right)$ в $B(G)$. Положим $H_1 = \left\{h \in H \,\middle|\, \left(\varepsilon_{x_0,h}\right)^{\mu\pi} \in B_0\right\}$, $L_1 = \left\{l \in L \,\middle|\, \left(\varepsilon_{y_0,l}\right)^{\mu^{-1}\pi_1} \in G_0\right\}$, $H_2 = \left\{h \in H \,\middle|\, \left(\varepsilon_{x_0,h}\right)^{\mu\pi} = e\right\}$, $L_2 = \left\{l \in L \,\middle|\, \left(\varepsilon_{y_0,l}\right)^{\mu^{-1}\pi_1} = e\right\}$. Из леммы 3 и следствия вытекает, что H_2, L_2, L_1 — собственные подгруппы H и L.

Лемма 4. *N — абелевый нормальный делитель в B.*

Доказательство следует из формулы (4).

Лемма 5. *L — группа диэдра.*

Доказательство. Пусть $\left(\varepsilon_{x_0,h}\right)^{\mu} = b_h v_h$ и $Y = \bigcup_{\alpha} Y_{\alpha}$ — цикленное разложение b_h, а y_{α} — представители циклов, один из которых совпадает с y_0. Положив в (6) $h = h_1$, получим

$$p\left(b_h^2 y\right) v_h(b_h y) p^{-1}(b_h y) v_h(y) = v_h(b_h y) p(b_h y) v_h(y) p^{-1}(y). \tag{7}$$

Предположим, что существует b_h, содержащий цикл Y_{α} длины больше 2.

Положим $y = y_{\alpha}$. Если $y \notin Y_{\alpha}$, то последнее равенство должно выполняться для любых значений $p(y)$ на Y_{α}. Если же $y_0 \in Y_{\alpha}$, то для $p(y) = \varepsilon_{y_0,l}$, $l \in L \setminus L_1$, должно выполняться условие (3). Положив в (7) $p(y) = \varepsilon_{y_0,l}$ и $y = y_{\alpha}$, получим равенство $l = e$, что противоречит выбору l. Следовательно, $|Y_{\alpha}| = 2\ \ \forall\, \alpha$. Рассмотрим равенство (7) на Y_{α} и положим $y = b_h y_{\alpha}$. Если

$y_0 \notin Y_\alpha$, то равенство (7) должно выполняться в любой точке Y_α. Положив $p(y_\alpha) = l$, $p(b_h y_\alpha) = e$, придем к равенству $l = l^{-1}$ $\forall\, l \in L$, т. е. L — элементарная абелева 2-группа. Если же $y_0 \in Y_\alpha$, то последнее равенство должно выполняться $\forall\, l \in L \backslash L_1$. Это означает, что L — группа диэдра — расширение абелевой группы L_1 с помощью инверсного автоморфизма. Лемма доказана.

***Следствие* 1.** *N — элементарная абелева 2-группа.*

***Следствие* 2.** *Если L — неабелева группа, то $Q^{\mu\pi} = (\tau)$, где τ — транспозиция на $Y(y_0, y_1)$.*

***Следствие* 3.** $H_1 = H_2$, $L_1 = L_2$.

Чтобы доказать равенство $H_1 = H_2$, достаточно показать, что $G^{\mu\pi} \cap B_0 = (e)$. Пусть $b_h \in G^{\mu\pi} \cap B_0$. Если $b_h \neq e$, то существует цикл Y_α, не содержащий точку y_0, и, как следует из доказательства леммы, L — элементарная абелева 2-группа. Тогда $\forall\, l \in L$ $[b_h v_h, \varepsilon_{y_0, l}] = e$. Выбрав l из $L \backslash L_1$ и применив μ^{-1}, получим $\left[\varepsilon_{x_0, h}, g_l f_l\right] = e$. Так как $g_l \notin G_0$, то мы пришли к противоречию с предположением $b_h \neq e$, что и доказывает равенство $H_1 = H_2$. В частности, H_1 (как и L_1) — собственная подгруппа. Следовательно, ситуация симметрична и все утверждения для μ справедливы и для μ^{-1}. Например, из этого принципа следует равенство $L_1 = L_2$ и то, что H — группа диэдра, а M — элементарная абелева 2-группа.

Лемма 6. *Если L или H абелева, то $L \cong H \cong C_2$.*

Доказательство. Предположим, что L — абелева и выберем $l \in L \backslash L_1$ таким, что $(\varepsilon_{y_0, l})^{\mu^{-1}\pi_1} = g_l \notin G_0$ и $h_1 \in H_1$. Тогда $(\varepsilon_{x_0, h_1})^{\mu} = b_0 v_h \in V$. Поскольку $\left[b_0 v_h, \varepsilon_{y_0, l}\right] = e$, то, применяя μ^{-1}, получаем $\left[\varepsilon_{x_0, h_1}, g_l f_l\right] = e$, что возможно только для $h_1 = e$, откуда $H_1 = \{e\}$, а $H \cong C_2$. Лемма доказана.

Лемма 7. *Y_0 — орбита группы N.*

Доказательство достаточно провести для случая $L \cong H \cong C_2$. Пусть σ — образующий $Q^{\mu\pi}$. Выберем $q \in B$ таким, что $\sigma^q \neq \sigma$. Нетрудно убедиться, что элемент $q\varepsilon_{y_0, l}$ удовлетворяет условию (3) для любого $l \in L$. Действительно, если $\left(q\varepsilon_{y_0, l}\right)^{\mu^{-1}\pi_1} \in G_0$, то $\left[\varepsilon_{x_0, h}, \left(q\varepsilon_{y_0, l}\right)^{\mu^{-1}}\right] = e$. Применяя $\mu\pi$, придем к противоречию $[\sigma, q] = e$. Предположим, что существует q такой, что $\sigma^q Y_0 = Y_1$ $(Y_0 \neq Y_1)$. Положим в (5) $h = h_1$, $b_h = \sigma$: $p(\sigma q \sigma y) \times$ $\times\, v_h(q\sigma y) p^{-1}(q\sigma y) v_h(y) = v_h(q^{-1}\sigma q) p(\sigma q y) v_h(q y) p^{-1}(q y)$. Как показано выше, элемент $q\varepsilon_{y_0, l}$ удовлетворяет (3). Подставив $y = q^{-1} y_0$, $p = \varepsilon_{y_0, l}$, получим равенство $v_h(q\sigma q^{-1} y_0) v_h(q^{-1} y) = v_h(q^{-1}\sigma) v_h(q y) l$, которое должно выполняться для любого $l \in L$. Получено противоречие с предположением существования q, для которого $\sigma^q Y_0 \neq Y_0$. Лемма доказана.

Лемма 8. $Q^{\mu\pi} = (\tau)$.

Доказательство достаточно провести для случая $L \cong H \cong C_2$. Пусть $H == (h)$, $h^2 = (e)$ и $\left(\varepsilon_{x_0,h}\right)^{\mu} = b_h v_h$. Предположим что b_h, кроме точек y_0, y_1, переставляет и точки y_2, $y_3 \in G$. Пусть $(\varepsilon_{y_\gamma,l})^{\mu^{-1}} = \sigma_\gamma f_\gamma$ и рассмотрим элементы $w_\gamma = \varepsilon_{y_\gamma,l}\left(\varepsilon_{y_\gamma,l}\right)^{b_h v_h}$, где $\gamma = 0, 2$. Поскольку $b_h \notin B_0$, то $w_\gamma \neq e$ и $w_0 \neq w_2$. Учитывая, что $(\sigma_\gamma f_\gamma)^2 = e$, получаем $(w_\gamma)^{\mu^{-1}} = \sigma_\gamma f_\gamma\left(\sigma_\gamma f_\gamma\right)^{\varepsilon_{x_0,h}} == \sigma_\gamma f_\gamma \sigma_\gamma \varepsilon_{\sigma_\gamma x_0,h} f_\gamma \varepsilon_{x_0,h} = \varepsilon_{\sigma_\gamma x_0,h}\varepsilon_{x_0,h}$. Поскольку $w_\gamma \neq e$, то $\sigma_\gamma \notin B_0$. По лемме 7 $\sigma_0 x_0 = \sigma_2 x_0 = x_1$, а элементы $\left(w_\gamma\right)^{\mu^{-1}}$, $\gamma = 0, 2$, совпадают. Полученное противоречие доказывает лемму.

Следствие. $N = \underset{\alpha}{\times}(\tau_\alpha)$, *где* τ_α — *транспозиции на* $Y_\alpha = (y_\alpha, y'_\alpha)$.

Это следует из того, что Y_0 — орбита нормального делителя N (нормального замыкания (τ) в B) и является областью импримитивности транзитивной группы подстановок.

Обозначим множество областей импримитивностей (G, X) $((B, Y))$ через X^1 (Y^1). Тогда можно отождествить X (Y) с $X^1 \times X_0$ $(Y^1 \times Y_0)$. Очевидно, что для прямых сплетений $F^{\mu\pi} = N$. Положим, $\overline{N} = \overline{\underset{\alpha}{\times}}(\tau_\alpha)$ — декартово произведение. Для того чтобы для декартовых сплетений показать, что $F^{\mu\pi} = \overline{N}$ $\left(V^{\mu^{-1}\pi_1} = \overline{M}\right)$, нам понадобится следующая лемма.

Лемма 9. *Пусть* $(\varepsilon_{x,h})^{\mu} = \tau_{\alpha_1} v_h$, *тогда* $v_h(y_\alpha) = v_h(y'_\alpha) \in Z(L)$ *для любого* $\alpha \neq \alpha_1$.

Доказательство достаточно провести для $x = x_0$. Выберем в (5) q таким, что $q y_0 = y_\alpha$. Тогда, полагая $h = h_1$ и учитывая, что $b_h = \tau = (y_0, y_1)$ в точке y_0, получаем

$$p(y'_\alpha) v_h(y'_\alpha) p^{-1}(y'_\alpha) v_h(y_0) = v_h(y)\left(p(y_\alpha) v_h(y_\alpha) p^{-1}(y_\alpha)\right);$$

так как значения $p(y_\alpha)$, $p(y'_\alpha)$ можно выбирать произвольным образом, то, положив $p(y_\alpha) = l$, получим $v_h(y_\alpha) = l v_h(y'_\alpha) l^{-1}$ $\forall\, l \in L$. Лемма доказана.

Следствие. *Для любого* $x \in X$ *существует* $h \in H$ *такой, что* $(\varepsilon_{x,h})^{\mu} = b_h v_h$, *где* $b_h \neq e$ *и* $v_h(y_\alpha) = v_h(y'_\alpha)$ *для любого* $\alpha \in Y_1$.

Ввиду сопряженности достаточно показать это для $x = x_0$. Как вытекает из леммы, достаточно доказать равенство для Y_0. При $h \in H \backslash H_1$ имеем $(\varepsilon_{x_0,h})^{\mu} = \tau v_h$. Так как $h^2 = e$, то $v_h(y_0) = (v_h(y'_0))^{-1}$. Если $v_h(y_0) = l \in L \backslash L_1$, то $l = l^{-1}$. Предположим, что $l \in L_1$. Тогда рассмотрим элемент $\varepsilon_{y_0,l} \tau v_h \varepsilon_{y_0,l^{-1}} = \tau v$, для которого $v(y_0) = v(y_1) = e$. Причем поскольку $\left(\varepsilon_{y_0,l}\right)^{\mu^{-1}} \in F$, то τv является образом некоторого ε_{x_0,h_1}.

Лемма 10. *Пусть* $f = \prod_{x \in X}\left(\varepsilon_{x_0,h_x}\right)^{g_x} \in F$ — *произвольная функция с бесконечным носителем. Тогда* $f^{\mu\pi} = \prod_{x \in X}\left(\varepsilon_{x_0,h_x}\right)^{\mu\pi(g_x)^{\mu\pi}}$.

Доказательство. Пусть $f^\mu = bv_f$ и $f(x_\alpha) = h_1$, $f(x'_\alpha) = h_2$, $\left(\varepsilon_{x_\alpha, h_1^{-1}}\right)^\mu = b_{h_1} v_1$, $\left(\varepsilon_{x'_\alpha, h_2^{-1}}\right)^\mu = b_{h_2} v_2$, где каждый b_{h_1}, b_{h_2} может быть либо единичным, либо транспозицией на некоторой общей области Y_β. Положим $\hat f = f \varepsilon_{x_\alpha, h_1^{-1}} \varepsilon_{x'_\alpha, h_2^{-1}}$. Тогда $\hat f^\mu = b b_{h_1} b_{h_2} \hat v$ ($\hat v$ — некоторая функция из V). Достаточно показать, что элемент $\hat b = b b_{h_1} b_{h_2}$ действует тождественно на Y_β. Пусть $l \in L$ такой, что $\left(\varepsilon_{y_\beta, l}\right)^{\mu^{-1}} = \tau_\alpha f_l$. Учитывая, что $\hat f(x_\alpha) = \hat f(x'_\alpha) = e$ и $f_l(x) \in Z(H)$ $\forall x \notin X_\alpha$ (лемма 9), получаем $[\tau_\alpha f_l, \hat f] = e$. Применяя $\mu\pi$, приходим к равенству $\left[\varepsilon_{y_\beta, l}, \hat b\right] = e$, которое возможно только, если $\hat b$ действует тождественно на Y_β. Лемма доказана.

Лемма 11. $(B, Y) = (B, Y^1) \wr ((\tau), Y_0)$.

Доказательство. Так как μ — изоморфизм, то $B = (G)^{\mu\pi}(F)^{\mu\pi}$ и $B < |F|^{\mu\pi}$. Покажем, что $(G)^{\mu\pi} \cap (F)^{\mu\pi} = (e)$. Предположим, что $g^\mu = b v_1$ и $f^\mu = b v_2$, и $by \neq y$. Тогда $(g f^{-1})^\mu = v \in V$. Как следует из леммы 10, $g = \prod_{i \in I} (\sigma_i)$ $(I \subset X_1)$. По следствию из леммы 9 существует $l \in L$ такой, что $\left(\varepsilon_{y, l}\right)^{\mu^{-1}} = \sigma f$, причем $f(x_\alpha) = f(x'_\alpha)$ $\forall \alpha \in X_1$. Применяя μ к равенству $[\sigma f, g] = e$, получаем $[\varepsilon_{y, l}, b v_1] = e$, что противоречит выбору y. Следовательно, $b = e$ и $B = (F)^{\mu\pi} \lambda (G)^{\mu\pi}$. Как следует из леммы 10, $F^{\mu\pi} = \prod_{\alpha \in Y^1} ((\tau_\alpha), Y_\alpha)$. Лемма доказана.

Используя ассоциативность операции сплетения групп подстановок, получаем $\mu: (G_1, X^1) \wr \hat H \to (B_1, Y^1) \wr \hat L$, где $\hat L = ((\tau), Y_0) \wr L$, $\hat H = ((\sigma), X_0) \wr H$. Для изоморфизма этих сплетений выполнено условие уже доказанного п. 1 теоремы, откуда $\hat H \cong \hat L$. Применяя теорему [1] к стандартным сплетениям $\hat H$ и $\hat L$, завершаем доказательство этого случая.

Перейдем теперь к рассмотрению случая 2 теоремы, когда $F^\mu \supset V$.

Лемма 12. *В случае 2 H — неабелева группа.*

Доказательство. Согласно лемме 2 $\exists\, p(x) \in F$ такая, что $p(x)^{\mu\pi} \notin B_0$. Предположим, что H — абелева, тогда, учитывая, что $V^{\mu^{-1}} \subset F$, получаем равенство $\left[p, \varepsilon_{y_0, l}^{\mu^{-1}}\right] = e$ или $\left[p^\mu, \varepsilon_{y_0, l}\right] = e$, что противоречит выбору p. Лемма доказана.

Лемма 13. *Существует $\psi \in F$ с конечным носителем такая, что $\psi^{\mu\pi} \neq e$.*

Доказательство. Предположим, что такой функции не существует и $\varepsilon_{y_0, l}^{\mu^{-1}} = f_l \in F$. Применив формулу (6) для $\mu^{-1}(p f_l p^{-1}) f_{l_1} = f_{l_1}(p f_l p^{-1})$, где p выбрана, как и в предыдущей лемме. Тогда для функции $p\varphi$ условие типа (3) (для μ) выполнено для любой φ с конечным носителем. Выбирая φ так, что $p\varphi(y) = e$, в произвольной точке y получаем $f_l f_{l_1} = f_{l_1} f_l$ в любой точке, что означает, что L, а значит, и V — абелевы. Если $\left(\varepsilon_{x_0,h}\right)^{\mu} \subseteq V$ для любого $h \in H$, то и H — абелева, что невозможно. Лемма доказана.

Обозначим через $F_0 < F$ подгруппу функций таких, что $f(x_0) = e$, через $Y_0\ (Y^0)$ подмножество точек $y \in Y$ таких, что для каждой существует $b \in \in Q^{\mu\pi}\,(F_0^{\mu\pi})$: $by \neq y$ и положим $Z = Y_0 \cap Y^0$.

Лемма 14. *Если* $Z \neq \varnothing$, *то* а) L *— элементарная абелева* 2*-группа*; б) $\forall\, z \in Z$, $b_h \in Q^{\mu\pi}$, $b_0 \in F_0^{\mu\pi}$ *таких, что передвигают* z, $b_h z = b_0 z = z_1$ и $b_h z_1 = b_0 z_1 = z$, *т. е.* (z, z_1) *— их общая транспозиция.*

Доказательство. Пусть $\left(\varepsilon_{x_0,h}\right)^{\mu} = b_h v_h$ и $(f_0)^{\mu} = b_0 v$, где $f_0 \in F_0$ и $v_h, v \in V$. Тогда для любых функций $\psi_1, \psi_2 \in V$ $\left[(b_h v_h)^{\psi_1}, (b_0 v)^{\psi_2}\right] = e$. Обозначим через $\hat{v}_h$, $\hat{v}$ проекции элементов коммутатора на базу. Тогда

$$\hat{v}_h\,(b_0 y)\,\hat{v}\,(y) = \hat{v}\,(b_h y)\,\hat{v}_h\,(y). \tag{8}$$

Если $b_h z \neq b_0 z$, то для любых $l_1, l_2, l_3, l_4 \in L$ существуют ψ_1, ψ_2 такие, что $\hat{v}_h\,(b_0 z) = l_1$, $\hat{v}_h\,(z) = l_2$, $\hat{v}\,(b_h z) = l_3$, $\hat{v}_h\,(z) = l_4$. Подставив в предыдущее равенство, получим противоречие. Следовательно, $b_h z = b_0 z$. Предположим, что z входит в цикл длины, большей 2, либо элемента b_h, либо элемента b_0, например, b_h. Тогда, выбрав ψ_1, как и выше, и положив $\psi_2 = e$, получим $l_1 v(z) = v(b_h z)\, l_2 \quad \forall\, l_1, l_2 \in L$. Аналогично приходим к противоречию, когда b_0 имеет такой цикл. Таким образом, п. б) доказан. Если $b_h z = b_0 z = z_1$, то ψ_1, ψ_2 можно выбрать так, что $\hat{v}_h\,(z_1) = l_1$, $\hat{v}_h\,(z) = l_1^{-1} d_1$, $\hat{v}\,(z_1) = l_3$, $\hat{v}\,(z) = l_3^{-1} d_2$, где d_1, d_2 — фиксированные элементы. Очевидно, что равенство $l_1 l_3^{-1} d_2 = l_3 l_1^{-1} d_1$ может выполняться $\forall\, l_1$, l_2, только если $d_1 = d_2$ и L — элементарная абелева 2-группа. Лемма доказана.

Следствие. *Множество* Z *инвариантно при действии* $F^{\mu\pi}$.

Действительно, пусть b_h и b_0— те же элементы, что и в лемме. Поскольку $Q^{\mu\pi}$, $F_0^{\mu\pi}$ — нормальные делители $F^{\mu\pi}$, то $\forall\, b \in F^{\mu\pi}$ $\exists\, b_h', b_0'$: $b_h' b z = = b b_h z = b z_1 \neq bz$. Аналогично, $b_0' bz \neq bz$, т. е. $bz \in Z$.

Рассмотрим множества функций из V: $M_1 = \left\{ v_h \;\middle|\; \exists\, h\colon \varepsilon_{x_0,h}^{\mu} = v_h \right\}$, $M_2 = = \left\{ v \;\middle|\; \exists\, f_0 \in F_0\colon f_0^{\mu} = v \right\}$.

Лемма 15. *Функции из* M_1, M_2 *принимают постоянные значения из центра* L *на орбитах групп* $F_0^{\mu\pi}$, $Q^{\mu\pi}$, *лежащих в* Y^0, Y_0 *соответственно.*

Доказательство. Для доказательства воспользуемся формулой (8), где $b_0 = e$, $\hat{v} = v$. Пусть $y \in Y_0$ и b_h двигает y. Тогда в этой точке имеем $\hat{v}_h\,(y)\, v(y) = v(b_h y)\,\hat{v}_h\,(y)$. Поскольку $\forall\, l \in L$ $\exists\, \psi \in V$: $\hat{v}_h\,(y) = l$, то $v(b_h y) = l\, v(y)\, l^{-1}$ $\forall\, l \in L$. Для функций из M_2 доказательство аналогично.

Пусть $t \in Y_0$ и $p\,(x) \in F$ такая, что $p\,(x) = \varepsilon_{t,l}^{\mu^{-1}}$ для некоторого $l \neq e$. Как следует из леммы 15, функция p не может принадлежать F_0. Тогда имеем мономорфизм $\lambda_t\colon L \to H\colon l \to h_l = p(x_0)$. Пусть p_0 — такая функция, что $p = \varepsilon_{x_0,h_l} p_0(x)$ и $p_0^{\mu} = bv$. Покажем, что $b = e$. Для произвольной точки t_1 имеем $\left[\varepsilon_{t_1,l}, \varepsilon_{t,l}\right] = e$. Применяя μ^{-1}, получаем $[f, p] = e$ $\left(f^{\mu} = \varepsilon_{t_1,l}\right)$, откуда $[f, p_0] = e$. Применяя μ, приходим к равенству $\left[\varepsilon_{t_1,l}, bv\right] = e \;\; \forall\, t_1 \in Y$. Это означает, что $b = e$. Таким образом, $v \in M_2$ и, как следует из леммы 15, принимает постоянные значения из центра L на орбитах из Y_0. С другой стороны, поскольку $\varepsilon_{x_0,h_l} \to \varepsilon_{t,l} v^{-1}$ и $t \in Y_0$, то v^{-1} принимает постоянные значения из центра и на орбитах из Y^0, т. е. на орбитах $F^{\mu\pi}$. Таким образом, справедлива формула

$$\left(\varepsilon_{x_0,h_l}\right)^{\mu} = \varepsilon_{t,l} z(y) \tag{9}$$

для любого $t \in Y^0$, где $h_l = \lambda_t(l)$, а $z(y)$ — функция, принимающая значения из центра L и постоянная на орбитах $F^{\mu\pi}$. Так как $z(y)$ принадлежит центру $Z(F^{\mu})$, то $z_1(x) = z(y)^{\mu^{-1}} \in Z(F)$. Из (9) получаем

$$\left(\varepsilon_{x_0,h_l} z_1(x)\right)^{\mu} = \varepsilon_{t,l}. \tag{10}$$

Лемма 16. 1. $Z = Y_0 \cap Y^0 = \varnothing$. 2. $Q^{\mu\pi} \cap F_0^{\mu\pi} = (e)$.

Доказательство. Пусть $t \in Z$. Тогда, с одной стороны, справедлива формула (9), а с другой, $\exists\, p(x) \in F_0\colon\; p(x)^{\mu} = b\varphi$, где $bt \neq t$. Применяя μ к равенству $\left[p(x), \varepsilon_{x_0,h_l}\right] = e$ и учитывая (9), получаем $[\varepsilon_{t,l} z(y), b\varphi] = e$. Так как $z(by) = z(y) \;\; \forall\, y \in Y$, и L — абелева (лемма 14), то это возможно лишь при $bt = t$. Получено противоречие с предположением существования $t \in Z$. Лемма доказана.

Следствие. $(F^{\mu\pi}, Y) = (G^{\mu\pi}, Y_0) + (F_0^{\mu\pi}, Y^0)$, *где* $+$ *— прямая сумма групп подстановок.*

Так как орбиты нормального делителя $F^{\mu\pi}$ являются областями импримитивности (B, Y), то имеем разложение $Y = \bigcup_{x \in X} Y_x$ на области импримитивности, причем $(F_f^{\mu\pi}, Y) = \prod_{x \in X} (Q_x^{\mu\pi}, Y_x)$, где F_f — подгруппа функций с конечным носителем, $Y_x = b_x Y_0$, $b_x = g_x^{\mu\pi}$, $g_x\colon x \to x_0$ $\left(\prod \;\; \left(\overline{\prod}\right) —\right.$ прямое (декартовое) произведение$\left.\right)$.

Лемма 17. *Если* $b_g \in G^{\mu\pi}\colon\; b_g Y_0 = Y_0$, *то* b_g *фиксирует каждый элемент из* Y_0.

Доказательство. Пусть $t_1, t_2 \in Y_0\colon\; b_g t_1 = t_2$. Пусть $\cup_1, \cup_2$ — орбиты $Q^{\mu\pi}$, содержащие t_1, t_2 соответственно (по определению Y_0 $|\cup_1|, |\cup_2| > 1$). Воспользуемся формулой (9) для $t = t_1$: $\left(\varepsilon_{x_0,h_l}^{g}\right)^{\mu} = \left(\varepsilon_{t_1,l} z(y)\right)^{b_g v_g} = \varepsilon_{t_2,l_1} z(b_g y) = v^{*}$, где $l_1 = v_g^{-1}(t_2)\, l\, v_g(t_2)$. Функция $z(y)$ постоянна на орбитах $F^{\mu\pi}$, которые являются областями импримитивности группы B, следовательно, $z(b_g y)$ также имеет это свойство. Предположим, что $g x_0 \neq x_0$. Тогда $v^* \in M_2$ и по лемме 15 должна быть постоянна на орбитах $Q^{\mu\pi}$, что очевидно не выполняется на $\bigcup_2$. Если же $g x_0 = x_0$, то имеем равенство $\varepsilon_{t_1, l} z(y) = \varepsilon_{t_2, l_1} z(b_g y)$, которое может выполняться только при $t_1 = t_2$. Лемма доказана.

Следствие. *Y_0 — орбита $Q^{\mu\pi}$ и $F^{\mu\pi}$.*

Лемма 18 (*для декартовых сплетений*).

$$\Big(\overline{\prod_{x \in X}} \varepsilon_{x, h_x} \Big)^{\mu\pi} = \overline{\prod_{x \in X}} \big(\varepsilon_{x, h_x} \big)^{\mu\pi}.$$

Доказательство. Пусть $f = \overline{\prod}_{x \in X} \varepsilon_{x, h_x}$ и $f^{\mu} = b\varphi$. Покажем, что ограничение b на Y_x совпадает с действием $\varepsilon^{\mu\pi}_{x, h_x}$ для произвольных $x \in X$ и $h_x \in H$. Без ограничения общности можно считать, что $x = x_0$. Умножив равенство $f^{\mu} = b\varphi$ на равенство $\varepsilon_{x_0, h} = b_h f_h$, взятое в степени -1, получим $f_1^{\mu} = b_1 \varphi_1$, где при выборе $h = f(x_0)$, имеем $f_1 = F_0$. Предположим, что существует точка $t \in Y_0$, на которую действует b_1. Тогда $[\varepsilon_{t, l}, b_1 \varphi_1] \neq e$. Применяя μ^{-1} и учитывая (10), получаем $\big[\varepsilon_{x_0, h_l} z_1(x), f_1 \big] \neq e$. Так как $f_1(x_0) = e$, то последнее неравенство выполняться не может. Следовательно, b_1 действует тождественно на Y_0, т. е. действия b и b_h на Y_0 совпадают, что и доказывает лемму.

Лемма 19. $(B, Y) \cong (B^1, X) \wr (B_0, Y_0)$, *где* $B_0 = Q^{\mu\pi}$.

Доказательство. Поскольку $W = F \lambda G$, то $B = W^{\mu\pi} = F^{\mu\pi} \cdot G^{\mu\pi}$. Покажем, что последнее произведение также полупрямое. Предположим, что существуют $f \in G$, $g \in G$ такие, что $f^{\mu} = b v_1$, $g^{\mu} = b v_2$. Тогда $(g f^{-1})^{\mu} \in V$, что в рассматриваемом случае $\big(V^{\mu^{-1}} \subset F \big)$ возможно лишь при $b = e$, т. е. $F^{\mu\pi} \cap G^{\mu\pi} = e$. Таким образом, имеем разложение $B = F^{\mu\pi} \lambda B^1$, где $B^1 = G^{\mu\pi}$. Как следует из леммы 17, $(F^{\mu\pi}, Y) = \overline{\prod}_{x \in X} \big(Q_x^{\mu\pi}, Y_x \big)$, причем B^1 либо перемещает Y_x, либо фиксирует каждый его элемент. Лемма доказана.

Таким образом, имеем изоморфизм $\mu : (G, X) \wr H \to [(B^1, X) \wr (B_0, Y_0)] \wr L$. Осталось воспользоваться ассоциативностью операции сплетения групп подстановок и свести к случаю 1. Теорема доказана.

1. *Neumann P.* The structure of standard wreath products // Math. Z. – 1964. – **84**. – P. 343 – 373.
2. *Gross F.* On the uniqueness of wreath products // Math. Inst., Univ. Warwick Coventry. – 1989. – CV47AL, U. K. – 20 p.
3. *Kovas L. G.* Wreath decomposition of finite permutation groups // Bull. Austral. Math. Soc. – 1989. – **40**. – P. 255 – 279.
4. *Боднарчук Ю. В.* Строение группы автоморфизмов нестандартного сплетения групп // Укр. мат. журн. – 1984. – **36**, № 2. – С. 143 – 148.

Получено 30. 09. 92