УДК 512.745.4

Н. Л. Іваненко, acист. (Київ. ун-т)

НОРМАЛЬНА БУДОВА ГРУПИ ЖОНК'ЄРА НАД ПОЛЕМ НУЛЬОВОЇ ХАРАКТЕРИСТИКИ

The lattice of normal subgroups of the Jonquere group over a field with characteristic zero is described.

Описана решітка нормальних дільників групи Жонк'єра над полем характеристики нуль.

Нехай K — поле, A_n — афінний простір над полем вимірності n. Відображення простору A_n які задаються набором многочленів

$$\langle f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_n)\rangle, \quad f_i \in K[x_1, \ldots, x_n], \tag{1}$$

називаються поліноміальними. Відображення, що мають обернені, які також є поліноміальними, утворюють групу бiраціональних перетворень афінного простору A_n, яку називають групою Кремони.

Група Кремони містить підгрупу „трикутних" перетворень, тобто перетворень вигляду

$$\langle x_1 + a_1, x_2 + a_2(x_1), \ldots, x_n + a_n(x_1, \ldots, x_{n-1})\rangle, \quad a_i \in K[x_1, \ldots, x_{i-1}]. \tag{2}$$

Ця підгрупа називається групою Жонк'єра і надалі позначатиметься $\mathcal{J}_n$.

Будова групи Жонк'єра над полем із p елементів досліджена Л. А. Калужніним [1, 2]. В цьому випадку група Кремони є симетричною групою S_{p^n} на множині, що є векторним простором вимірності n над полем із p елементів. Група Жонк'єра — силівська p-підгрупа симетричної групи S_{p^n}.

Групи Кремони і Жонк'єра над полем характеристики 0 досліджені досить погано. Відомі деякі факти про будову групи Кремони, в основному при $n = 2$, і існує багато неперевірених гіпотез [3, 4].

1. Попередні відомості. Надалі K — поле нульової характеристики. Набір змінних $x_1, \ldots, x_k$ позначимо через X_k, тоді $K[X_k]$ — кільце многочленів від k змінних. Вважатимемо, що $K[X_0] = K$. Елементи групи $\mathcal{J}_n$ типу (2) записуватимемо у вигляді таблиць

$$[a_1, a_2(X_1), \ldots, a_n(X_{n-1})], \quad a_i \in K[X_{i-1}].$$

Довільний многочлен $a(X_k) \in K[X_k]$ можна подати у вигляді

$$a(X_k) = a_0(X_{k-1}) + a_1(X_{k-1})x_k + \ldots + a_n(X_{k-1})x_k^n.$$

Число n називатимемо степенем многочлена $a(X_k)$ і позначимо ст. $a(X_k)$. Якщо $U = [a_1, \ldots, a_n(X_{n-1})]$ — деяка таблиця із $\mathcal{J}_n$, то $U_k = [a_1, \ldots$ $\ldots, a_k(X_{k-1})]$ — k-й початок таблиці U, $[U]_k = a_k(X_{k-1})$ — її k-та координата. Група $\mathcal{J}_k$ діє на $K[X_k]$ зсувами. Для довільних $a(X_k) \in K[X_k]$ і $U \in \mathcal{J}_k$ маємо

$$a(X_k) \xrightarrow{U} a(X_k^U), \tag{3}$$

$$U = [b_1, \ldots, b_k(X_{k-1})],$$

$$a(X_k^U) = a(x_1 + b_1, x_2 + b_2(x_1), \ldots, x_k + b_k(X_{k-1})).$$

Причому для довільних многочленів $a(X_k), b(X_k) \in K[X_k]$ і таблиць $U, V \in$ $\in \mathcal{J}_k$ виконуються рівності

$$a\left(X_k^{UV}\right) = a\left(\left(X_k^V\right)^U\right),$$

$$(a+b)\left(X_k^U\right) = a\left(X_k^U\right) + b\left(X_k^U\right),$$

тобто $K[X_k]$ утворює $\mathcal{J}_k$-модуль відносно дії (3).

Далі будуть використовуватись дві відомі конструкції над частково впорядкованими множинами.

Означення 1. *Ординальною сумою $P \oplus Q$ впорядкованих множин P і Q $(P \cap Q = \varnothing)$ називається множина $P \cup Q$, в якій $p < q$ для довільних $p \in \in P$ і $q \in Q$, а відношення $p < p'$, $q < q'$, $p, p' \in P$, $q, q' \in Q$, зберігають своє значення.*

Означення 2. *Ординальним добутком $P \circ Q$ впорядкованих множин P і Q називається множина впорядкованих пар (p, q) (де $p \in P, q \in Q$), впорядкована зворотним лексикографічним правилом, тобто $(p, q) < (p', q')$ тоді і тільки тоді, коли $q < q'$ або $q = q'$ і $p < p'$.*

В роботі [5] вказані основні властивості таких конструкцій. Зокрема, якщо множини P і Q лінійно впорядковані, то множини $P \oplus Q$ і $P \circ Q$ також лінійно впорядковані.

Конструкцію ординального добутку можна поширити на випадок, коли P — довільна решітка, а Q — ланцюг (лінійно впорядкована множина).

Означення 3. *Суперпозицією решітки P і ланцюга Q називається решітка $Q(P)$ на множині $P \times Q$ з діями*

$$(p_1, q_1) \vee (p_2, q_2) = \begin{cases} (p_1, q_1), & \text{якщо} \quad q_1 > q_2; \\ (p_2, q_2), & \text{якщо} \quad q_1 < q_2; \\ (p_1 \vee p_2, q_1), & \text{якщо} \quad q_1 = q_2, \end{cases}$$

$$(p_1, q_1) \wedge (p_2, q_2) = \begin{cases} (p_1, q_1), & \text{якщо} \quad q_1 < q_2; \\ (p_2, q_2), & \text{якщо} \quad q_1 > q_2; \\ (p_1 \wedge p_2, q_1), & \text{якщо} \quad q_1 = q_2. \end{cases}$$

Нехай $\mathbb{Z}^+$ — множина цілих невід'ємних чисел з природним відношенням порядку. Покладемо $P_k = \mathbb{Z}^+ \circ \mathbb{Z}^+ \circ \ldots \circ \mathbb{Z}^+$ k разів, $Q_n = \bigoplus_{i=n}^{0} P_i$. Далі вважатимемо, що P_0 складається з одного елемента. Легко зрозуміти, що P_k — ланцюг наборів $(n_1, \ldots, n_k)$ зі зворотним лексикографічним порядком.

Означення 4. *Висотою одночлена $\alpha x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_k^{n_k}$ називатимемо набір $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ із P_k. Висотою многочлена $a(X_k) \in K[X_k]$ називатимемо найбільшу (в розумінні введеного порядку на P_k) з висот його одночленів. Висоту многочлена позначатимемо $h(a(X_k))$.*

Означення 5. *Старшим одночленом многочлена $a(X_k) \in K[X_k]$ називатимемо найбільшу (в розумінні множини P_k) з висот його одночленів. Коефіцієнт при старшому одночлені називатимемо старшим коефіцієнтом многочлена $a(X_k)$.*

Лема 1. *Нехай $a(X_k) \in K[X_k]$,*

$$a(X_k) = a_0(X_{k-1}) + a_1(X_{k-1})x_k + \ldots + a_{n_k}(X_{k-1})x_k^{n_k},$$

$h(a_{n_k}(X_{k-1})) = (n_1, \ldots, n_{k-1})$, α — *старший коефіцієнт многочлена* $a_{n_k}(X_{k-1})$. *Тоді* $h(a(X_k)) = (n_1, \ldots, n_{k-1}, n_k)$, α — *старший коефіцієнт многочлена* $a(X_k)$.

Доведення. Припустимо, що $a(X_k)$ містить одночлен висоти $(m_1, \ldots, m_k) > (n_1, \ldots, n_k)$. Тоді можливі такі варіанти: $m_k > n_k$ або $(m_1, \ldots, m_{k-1}) > (n_1, \ldots, n_{k-1})$, $m_k = n_k$. В першому випадку ст. $a(X_k) > n_k$, що суперечить умові, в другому — $h(a_{n_k}(X_k)) \geq (m_1, \ldots, m_{k-1}) > (n_1, \ldots, n_{k-1})$, що також суперечить умові.

Многочлен $a(X_k)$ містить одночлен висоти $(n_1, \ldots, n_k)$ з коефіцієнтом α, отже цей одночлен є старшим, $h(a(X_k)) = (n_1, \ldots, n_k)$, α — старший коефіцієнт многочлена $a(X_k)$.

Лема 2. *Нехай* $a(X_k)$, $b(X_k) \in K[X_k]$. *Тоді*

$$h(a(X_k) + b(X_k)) \leq \max\{h(a(X_k)), h(b(X_k))\}.$$

Якщо $h(a(X_k)) = h(b(X_k)) = h(a(x_k) + b(x_k))$, *то старший коефіцієнт суми є сумою старших коефіцієнтів доданків; якщо висоти різні, то старший коефіцієнт суми збігається зі старшим коефіцієнтом доданка з більшою висотою.*

Доведення. Дія додавання многочленів зводиться до додавання коефіцієнтів при відповідних одночленах. Якщо $h(a(X_k)) \neq h(b(X_k))$, то твердження очевидне, причому виконується рівність. Нехай $h(a(X_k)) = h(b(X_k)) = (n_1, \ldots, n_k)$, α, β — старші коефіцієнти многочленів $a(X_k)$ і $b(X_k)$ відповідно. Якщо $\alpha \neq -\beta$, то $h(a(X_k) + b(X_k)) = (n_1, \ldots, n_k)$ і старший коефіцієнт суми $a(X_k) + b(X_k)$ є елементом поля $\alpha + \beta$; якщо $\alpha = -\beta$, то $h(a(X_k) + b(X_k)) < (n_1, \ldots, n_k)$.

Лема 3. *Нехай* $a(X_k) \in K[X_k]$, $U_k \in \mathcal{J}_k$. *Тоді* $h\left(a\left(X_k^{U_k}\right)\right) = h(a(X_k))$, *причому старший коефіцієнт многочлена* $a\left(X_k^{U_k}\right)$ *дорівнює старшому коефіцієнту многочлена* $a(X_k)$.

Доведення. Проведемо індукцію за кількістю змінних. База індукції $k = 0$. Многочлен є елементом поля K, таблиця U_k його не змінює, отже твердження леми виконується.

Припустимо, що твердження справедливе для многочленів із $K[X_{k-1}]$. Тоді для довільних

$$a(X_k) = a_0(X_{k-1}) + a_1(X_{k-1})x_k + \ldots + a_{n_k}(X_{k-1})x_k^{n_k} \in K[X_k],$$

маємо

$$a(X_k^{U_k}) = a_0(X_{k-1}^{U_{k-1}}) + \ldots + a_n(X_{k-1}^{U_{k-1}})(x_k + b_k(X_{k-1}))^{n_k} =$$
$$= a_0(X_{k-1}^{U_{k-1}}) + \ldots + a_{n_k}(X_{k-1}^{U_{k-1}})x_k^{n_k}.$$

За припущенням індукції $h\left(a_{n_k}\left(X_{k-1}^{U_{k-1}}\right)\right) = h\left(a_{n_k}(X_{k-1})\right)$ і старші коефіцієнти цих многочленів рівні. За лемою 1 аналогічні рівності виконуються для многочлена $a(X_k)$.

2. Будова циклічних $\mathcal{J}_k$-підмодулів в $K[X_k]$.

Теорема 1. *Циклічний* $\mathcal{J}_k$*-підмодуль в* $K[X_k]$, *породжений многочленом*

$a(X_k)$, $h(a(X_k)) = (n_1, \ldots, n_k)$, зі старшим коефіцієнтом α складається із усіх многочленів висоти не більше $(n_1, \ldots, n_k)$, причому якщо висота дорівнює $(n_1, \ldots, n_k)$, то старший коефіцієнт многочлена лежить в циклічній групі, породженій α.

Доведення. Позначимо множину, описану в формулюванні теореми, через M. За лемою 2 множина M замкнена відносно дії додавання многочленів, за лемою 3 — відносно дії зсуву елементами $\mathcal{J}_k$. Отже, M утворює $\mathcal{J}_k$-підмодуль в $K[X_k]$.

Доведемо, що M — циклічний підмодуль. Проведемо індукцію за числом k. База індукції $k = 0$. Многочлен $a(X_k)$ є елементом поля K і збігається зі своїм старшим коефіцієнтом. Циклічний модуль, породжений многочленом $a(X_k)$, збігається з циклічною групою, породженою його старшим коефіцієнтом. Твердження теореми виконується.

Нехай твердження виконується для $\mathcal{J}_{k-1}$-підмодулів в $K[X_{k-1}]$. З многочлена

$$a(X_k) = a_0(X_{k-1}) + \ldots + a_n(X_{k-1})x_k^n, \quad n \neq 0,$$

за допомогою дій додавання і зсуву побудуємо многочлен

$$b^{(0)}(X_k) = b_0^{(0)}(X_{k-1}) + \ldots + b_n^{(0)}(X_{k-1})x_k^n,$$

де $b_n^{(0)}(X_{k-1})$ — довільний наперед заданий многочлен висоти не більше $h(a_n(X_k))$, причому якщо висоти збігаються, то старший коефіцієнт $b_n^{(0)}(X_{k-1})$ лежить в циклічній групі, породженій α, і також набір многочленів

$$b^{(i)}(X_k) = b_0^{(i)}(X_{k-1}) + \ldots + b_{n-i}^{(i)}(X_{k-1})x_k^{n-i}, \quad 1 \le i \le n,$$

з такими властивостями: ст. $b^{(i)}(X_k) = n - i$, $b_{n-i}^{(i)}(X_{k-1})$ — довільний наперед заданий многочлен із $K[X_{k-1}]$. Очевидно, що всі такі многочлени утворюють систему твірних модуля M.

Дія додавання многочленів в $K[X_k]$ зводиться до дії над многочленами $a_i(X_{k-1}) \in K[X_{k-1}]$; дії зсуву за допомогою таблиці $U_k \in \mathcal{J}_k$ з нульовою останньою координатою відповідає зсув многочленів $a_i(X_{k-1})$ таблицею U_{k-1}. За припущенням індукції і лемою 1 модуль M містить многочлен $b^{(0)}(X_k)$ потрібного вигляду.

З многочлена $b^{(0)}(X_k)$ побудуємо многочлен $b^{(1)}(X_k)$. Подіємо на $b^{(0)}(X_k)$ таблицею спеціального вигляду $U_k = [0, \ldots, 0, x_{k-1}^m]$, де $m \in \mathbb{N}$ — деяке число:

$$b^{(0)}(X_k^{U_k}) = b_0^{(0)}(X_{k-1}) + \ldots + \left(b_{n-1}^{(0)}(x_{k-1}) + n\,b_n^{(0)}(X_{k-1})x_{k-1}^m\right)x_k^{n-1} +$$

$$+ b_n^{(0)}(X_{k-1})x_k^n = c_0(X_{k-1}) + \ldots + c_{n-1}(X_{k-1})x_k^{n-1} + b_n^{(0)}(X_{k-1})x_k^n,$$

$$c_{n-1}(X_{k-1}) = b_{n-1}^{(0)}(X_{k-1}) + n\,b_n^{(0)}(X_{k-1})x_{k-1}^m,$$

ст. $b^{(0)}(X_k) = n$, отже, $b_n^{(0)}(X_{k-1}) \neq 0$. Взявши $m \geq$ ст. $b_{n-1}^{(0)}(X_{k-1})$, одержимо ст. $c_{n-1}(X_{k-1}) =$ ст. $b_n^{(0)}(X_{k-1}) + m$. Зафіксуємо деяке натуральне число l. Візьмемо два так побудовані многочлени

$$c^{(1)}(X_k) = c_0^{(1)}(X_{k-1}) + \ldots + c_{n-1}^{(1)}(X_{k-1})x_k^{n-1} + b_n^{(0)}(X_{k-1})x_k^n,$$
$$c^{(2)}(X_k) = c_0^{(2)}(X_{k-1}) + \ldots + c_{n-1}^{(2)}(X_{k-1})x_k^{n-1} + b_n^{(0)}(X_{k-1})x_k^n$$

такі, що ст. $c^{(2)}(X_k) <$ ст. $c^{(1)}(X_k) = l$. Многочлен $c^{(0)}(X_k) = c^{(1)}(X_k) - c^{(2)}(X_k)$ має такі властивості: $c^{(0)}(X_k) \in M$, ст. $c^{(0)}(X_k) = n-1$, ст. $c_{n-1}^{(0)}(X_{k-1}) = l$. За припущенням індукції модуль M містить многочлени вигляду

$$b^{(1)}(X_k) = b_1^{(1)}(X_{k-1}) + \ldots + b_{n-1}^{(1)}(X_{k-1})x_k^{n-1},$$

де $b_{n-1}^{(1)}(X_{k-1})$ — довільний многочлен із $K[X_{k-1}]$ степеня менше l. Вибір l був довільний, отже, $b_{n-1}^{(1)}(X_{k-1})$ може бути довільним наперед заданим із $K[X_{k-1}]$.

Аналогічно можна побудувати в M многочлени $b^{(i)}(X_k)$, $1 \le i \le n$.

Наслідок. *Довільний $\mathcal{J}_k$-підмодуль в $K[X_k]$ складається з усіх многочленів висоти не більше деякого набору $(n_1, \ldots, n_k)$, причому якщо висота дорівнює $(n_1, \ldots, n_k)$, то старший коефіцієнт многочлена лежить в деякій підгрупі адитивної групи поля K.*

3. Нормальні дільники групи $\mathcal{J}_n$.

Означення 6. *Глибиною таблиці $U \in \mathcal{J}_n$ називається таке число r, що для всіх $i \le r$ маємо $[U]_i = 0$, але $[U]_{r+1} \ne 0$. Старшим коефіцієнтом таблиці $U \in \mathcal{J}_n$ глибини r називатимемо старший коефіцієнт многочлена $[U]_{r+1}$. Глибину таблиці позначатимемо $d(U)$.*

Множина Q_n є об'єднанням множин P_k, причому якщо $i \ne j$, то $P_i \cap \cap P_j = \varnothing$.

Означення 7. *Висотою таблиці $U \in \mathcal{J}_n$, $d(U) = r$, називатимемо набір $h([U]_{r+1}) \in P_r$. Висотою множини таблиць $M \subset \mathcal{J}_n$ називатимемо набір*

$$h(M) = \sup\{h(U) \in Q_n | U \in M\},$$

де порядок розглядається в розумінні множини Q_n.

Означення 8. *Глибиною множин таблиць $M \subset \mathcal{J}_n$ називатимемо число k таке, що $h(M) \in P_k$. Глибину множини таблиць позначатимемо $d(M)$.*

Лема 4. *Нехай $U \in \mathcal{J}_n$, $d(U) = k$, $h(U) = (n_1, \ldots, n_k)$, α — старший коефіцієнт U. Тоді нормальним замиканням таблиці U буде множина H, що складається із таблиць V глибини не менше k таких, що $h(V) \le h(U)$ і якщо $h(V) = h(U)$, то старший коефіцієнт V лежить в $\langle\alpha\rangle$.*

Доведення. Нехай

$$V^{(1)} = [0, \ldots, 0, b_{k+1}^{(1)}(X_k), \ldots],$$
$$V^{(2)} = [0, \ldots, 0, b_{k+1}^{(2)}(X_k), \ldots]$$

— дві таблиці із H, $W \in \mathcal{J}_n$ — довільна таблиця. Тоді

$$V^{(1)} V^{(2)} = [0, \ldots, 0, b_{k+1}^{(1)}(X_k) + b_{k+1}^{(2)}(X_k), \ldots]$$

і за лемою 2 множина H утворює підгрупу в $\mathcal{J}_n$,

$$WVW^{-1} = [0, \ldots, 0, b_{k+1}(X_k^{W_k}), \ldots],$$

за лемою 3 ця підгрупа є нормальним дільником в $\mathcal{J}_n$.

Побудуємо в H систему твірних, що складається з таблиць вигляду

$$U^{(0)} = [\,0, \ldots, 0, b_{k+1}(X_k), \ldots\,],$$

де $h(b_{k+1}(X_k)) \le h(U)$, якщо $h(b_{k+1}(X_k)) = h(U)$, то старший коефіцієнт $b_{k+1}(X_k)$ лежить в $\langle\alpha\rangle$, і таблиць вигляду

$$U^{(i)} = [\,0, \ldots, 0, b_{k+i+1}(X_{k+i}), \ldots\,],$$

де $1 \le i \le n-k$, $b_{k+i+1}(X_{k+i})$ — довільний многочлен із $K[k+i]$. Решта координат не грають ніякої ролі і можуть бути довільними.

Якщо знехтувати координатами таблиць починаючи з $(k+2)$-ї, то дії множення в групі H і спряження таблиць із H елементами $\mathcal{J}_n$ аналогічні діям додавання і зсуву в $K[X_n]$. За теоремою 1 H містить таблиці вигляду $U^{(0)}$.

Доведемо, що для довільного наперед заданого натурального числа l підгрупа H містить таблиці вигляду

$$U' = [\,0, \ldots, 0, b_{k+2}(X_{k+1}), \ldots\,],$$

де $b_{k+2}(X_{k+1})$ — довільний многочлен такий, що ст. $b_{k+2}(X_{k+1}) < l$.

Подіємо на таблицю

$$U = [\,0, \ldots, 0, a_{k+1}(X_k), \ldots, a_n(X_{n-1})]$$

таблицею спеціального вигляду $D = [0, \ldots, 0, x_{k+1}^m, 0, \ldots, 0]$ — таблицею глибини $k+1$, $m \in \mathbb{N}$ — деяке число. Одержимо

$$DUD^{-1} = [\,0, \ldots, 0, a_{k+1}(X_k), a_{k+2}(X_{k+1}) + x_{k+1}^m - (x_{k+1} + a_{k+1}(X_k))^m, \ldots\,] =$$

$$= [\,0, \ldots, 0, a_{k+1}(X_k), a_{k+2}(X_{k+1}) + b(X_{k+1}) - m\,x_{k+1}^{m-1} a_{k+1}(X_k), \ldots\,],$$

де ст. $b(X_{k+1}) \le m-2$. За умовою $d(U) = k$, отже $a_{k+1}(X_k) \ne 0$. При досить великому m ст. $[\,DUD^{-1}]_{k+2} = m-1$. Побудуємо таким чином в H дві таблиці

$$C^{(1)} = [\,0, \ldots, 0, a_{k+1}(X_k), c_{k+2}^{(1)}(X_{k+1}), \ldots\,],$$

$$C^{(2)} = [\,0, \ldots, 0, a_{k+1}(X_k), c_{k+2}^{(2)}(X_{k+1}), \ldots\,],$$

де ст. $c_{k+2}^{(2)}(X_{k+1}) <$ ст. $c_{k+2}^{(1)}(X_{k+1})$, ст. $c_{k+2}^{(1)}(X_{k+1}) > l$ — деяке натуральне число.

Нехай

$$C^{(0)} = C^{(1)}(C^{(2)})^{-1} = \left[\,0, \ldots, 0, c_{k+2}^{(1)}(X_{k+1}) - c_{k+2}^{(2)}\left(X_{k+1}^{U_{k+1}(C_{k+1}^{(2)})^{-1}}\right), \ldots\,\right]$$

— таблиця глибини $k+1$. За лемами 2 і 3 ст. $[\,C^{(0)}]_{k+2} > l$. Застосувавши теорему 1 так, як це вже було зроблено вище, можно довести, що H містить таблиці вигляду U'. Оскільки число l можна вибрати яким завгодно, то підгрупа H містить всі таблиці вигляду $U^{(1)}$.

Таблиці $U^{(i)}$, $1 < i \le n-k$, будуються аналогічно.

Наслідок. *Кожний нормальний дільник $H \lhd \mathcal{J}_n$ містить всі підгрупи висоти менше $h(H)$.*

Нехай $A < \mathcal{J}_n$ — деяка підгрупа глибини r. За лемою 2 множина старших коефіцієнтів таблиць глибини r із A утворює підгрупу адитивної групи поля K.

Означення 9. *Групою старших коефіцієнтів підгрупи $A < \mathcal{J}_n$ називатимемо підгрупу адитивної групи поля K, утворену старшими коефіцієнтами таблиць із A глибини $d(A)$.*

Теорема 2. *Підгрупа $H < \mathcal{J}_n$ буде нормальною тоді і тільки тоді, коли вона містить всі таблиці $U \in \mathcal{J}_n$, висоти не більше $h(H)$, причому якщо $h(U) = h(H)$, то старший коефіцієнт таблиці U лежить в деякій підгрупі A адитивної групи поля K.*

Доведення. За лемою 4 описана підгрупа містить нормальне замикання всіх своїх елементів, отже вона є нормальною в $\mathcal{J}_n$.

Нехай $H \triangleleft \mathcal{J}_n$ — нормальна підгрупа групи Жонк'єра, $h(H) = h$, A — її група старших коефіцієнтів. Для кожного елемента $\alpha \in A$ підгрупа H містить таблицю висоти h зі старшим коефіцієнтом α. За лемою 4 підгрупа H містить всі таблиці висоти менше h і таблиці висоти h зі старшим коефіцієнтом α. Отже, підгрупа H має вигляд, описаний у формулюванні теореми.

Теорема 3. *Решітка нормальних дільників групи $\mathcal{J}_n$ ізоморфна решітці $Q_n(L_K)$, де L_K — решітка підгруп адитивної групи поля K.*

Доведення. Решітка $Q_n(L_K)$ складається з елементів вигляду (A, h), де $h \in Q_n$, A — підгрупа адитивної групи поля K. Нехай $H \triangleleft \mathcal{J}_n$. Задамо відображення φ із решітки нормальних дільників групи $\mathcal{J}_n$ в $Q_n(L_K)$ таким чином: $\varphi(H) = (A, h(H))$, де A — група старших коефіцієнтів підгрупи H. За теоремою 2 відображення φ є бієкцією. Нехай G і H — два нормальних дільники в $\mathcal{J}_n$, $\varphi(H) = (A, h)$, $\varphi(G) = (B, g)$. Якщо $h > g$, то за наслідком до леми 4

$$\varphi(G \vee H) = \varphi(H) = \varphi(G) \vee \varphi(H),$$

$$\varphi(G \wedge H) = \varphi(G) = \varphi(G) \wedge \varphi(H).$$

Нехай $g = h$, тоді за лемою 2 (A, H) — група старших коефіцієнтів підгрупи $\langle G, H \rangle$,

$$\varphi(G \vee H) = \varphi(\langle G, H\rangle) = (\langle A, B\rangle, h) =$$

$$= (A, h) \vee (B, g) = \varphi(G) \vee \varphi(H),$$

$$\varphi(G \wedge H) = \varphi(G \cap H) = (A \cap B, h) =$$

$$= (A, h) \wedge (B, g) = \varphi(G) \wedge \varphi(H).$$

Отже, φ — ізоморфізм решіток.

1. *Kaloujnine L.* Sur les p-groupes de Sylow du groupe symétrique du deré p^m // C. r. Acad. sci. Paris. – 1945. – № 221. – P. 222 – 224.
2. *Kaloujnine L.* Sur les p-groupes de Sylow du groupe symétrique finis // Ann. sci. Ecole norm. supér. – 1948. – № 65. – P. 239 – 279.
3. *Попов В. Л.* Группы автоморфизмов алгебр многочленов // Вопросы алгебры. – 1989. – № 4. – С. 4 – 16.
4. *Шафаревич И. Р.* О некоторых бесконечномерных группах. II // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1981. – **45**, № 1. – С. 214 – 226.
5. *Биркгоф Г.* Теория решеток. – М.: Наука, 1984. – 566 с.

Одержано 04. 06. 92