УДК 519.21

С. М. Краснитский, канд. физ.-мат. наук (Киев. технол. ин-т легк. пром-сти),

О НЕОБХОДИМЫХ УСЛОВИЯХ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ГАУССОВСКИХ МЕР, СООТВЕТСТВУЮЩИХ ОДНОРОДНЫМ СЛУЧАЙНЫМ ПОЛЯМ

Necessary conditions are given for the equivalence of the probability measures corresponding to the generalized homogeneous Gaussian fields. The results are mainly new also for the standard homogeneous fields as well, and even in the one-dimensional case, i.e., for stationary processes.

Наведені необхідні умови еквівалентності ймовірнісних мір, що відповідають узагальненим однорідним гауссівським полям. Більшість результатів є новими і для звичайних однорідних полів, причому навіть в одновимірному випадку, тобто для стаціонарних процесів.

Постановка задачи. Пусть $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{S}$ — пространства соответственно бесконечно дифференцируемых, финитных бесконечно дифференцируемых и быстро убывающих бесконечно дифференцируемых функций на R^N, снабженных топологиями, принятыми в теории обобщенных функций [1, 2]. $\mathfrak{E}'$, $\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{S}'$ будут обозначать соответствующие пространства обобщенных функций (линейных непрерывных функционалов соответственно на $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{S}$). Пусть, далее, $\xi = \xi(\omega, \varphi)$ (часто пишем еще $\xi(\varphi)$), $(\omega, \varphi) \in \Omega \times \mathfrak{D}$ или $(\omega, \varphi) \in \in \Omega \times \mathfrak{S}$ — действительное случайное однородное поле соответственно на $\mathfrak{D}$ или на $\mathfrak{S}$ [3 – 5]. Здесь, как обычно, Ω — пространство элементарных событий, снабженное некоторой σ-алгеброй его подмножеств $\mathfrak{G}$.

Символ ξ_φ обозначает поле ξ, рассматриваемое как случайная величина при фиксированном φ; знаки $\overline{\cdot}$, $\tilde{\cdot}$, $\overline{\overline{\cdot}}$ есть соответственно комплексное сопряжение, прямое и обратное преобразование Фурье; всегда $\int = \int_{R^N}$, $\iint = = \iint_{R^N \times R^N}$.

При весьма общих условиях, которые будут считаться выполненными, корреляционный функционал $B(\varphi, \psi) = M\xi(\varphi)\overline{\xi(\psi)}$ поля ξ допускает представление [3 – 5]

$$B(\varphi, \psi) = \int \tilde{\varphi}(\lambda)\,\overline{\tilde{\psi}}(\lambda)\,m(d\lambda), \quad \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_N), \tag{1}$$

где $m(\cdot)$ — σ-конечная мера, называемая спектральной мерой поля ξ. Она удовлетворяет условию

$$\int (1 + |\lambda|^2)^{-p} m(d\lambda) < +\infty \tag{2}$$

для некоторого $p \geq 0$ ($|\lambda|^2 = \lambda_1^2 + \ldots + \lambda_N^2$). Если мера m абсолютно непрерывна относительно меры Лебега в R^N, то ее производная по этой мере называется спектральной плотностью поля ξ.

Будем считать, что на $\mathfrak{G}$ заданы две вероятностные меры P_1 и P_2, относительно каждой из которых ξ является полем описанного типа, причем соответствующие средние — нулевые, так что

$$M_i\,\xi(\varphi) = 0, \tag{3}$$

$$B_i(\varphi, \psi) = \int \tilde{\varphi}(\lambda)\,\overline{\tilde{\psi}}(\lambda)\,f_i(\lambda)\,d\lambda, \quad i = 1, 2, \tag{4}$$

где M_i и B_i — соответственно математическое ожидание и корреляционный функционал относительно меры P_i, f_i — соответствующие спектральные плотности. Кроме того, предполагаем, что действительная часть ξ является гауссовским случайным полем по обеим мерам.

Пусть Φ — подмножество $\mathfrak{L}$, входящее в область определения ξ. В дальнейшем без специальных оговорок предполагается, что Φ содержит все действительные финитные бесконечно дифференцируемые функции, сосредоточенные в некотором открытом подмножестве T пространства R^N, причем все функции из Φ обращаются в 0 вне T. При этом само T может быть ограниченным или неограниченным.

Обозначим через $\mathfrak{S}_\xi^\Phi$ σ-алгебру, порожденную величинами ξ_φ, $\varphi \in \Phi$. P_1^Φ, P_2^Φ будут обозначать сужения мер P_1^Φ, P_2^Φ на $\mathfrak{S}_\xi^\Phi$. Согласно общей теории [5, 6], P_1^Φ и P_2^Φ либо эквивалентны ($P_1^\Phi \sim P_2^\Phi$), либо ортогональны $P_1^\Phi \perp \perp P_2^\Phi$. Нас будут интересовать необходимые условия эквивалентности этих мер, выраженные в терминах взаимного поведения спектральных плотностей f_1 и f_2.

Отметим, что основа всех полученных результатов — это обобщение одного утверждения об ортогональности гауссовских мер из [7, 8], приведенное там для суммируемых по R^N плотностей f_1, f_2. С другой стороны, многие из полученных нами результатов являются, по-видимому, новыми и для такого случая (даже при $N = 1$). Кроме того, в процессе выполнения работы выяснилось, что формулировка упомянутого критерия ортогональности из [7, 8] нуждается в некотором уточнении. В связи с этим приводится соответствующий пример и формулируется условие, когда указанное уточнение не требуется.

Основные результаты. Введем некоторые обозначения. $f(\lambda) << g(\lambda)$ означает, что $f(\lambda) \le cg(\lambda)$, $0 < c = \text{const} < +\infty$, $f(\lambda) \asymp g(\lambda)$ означает, что $f(\lambda) << g(\lambda)$ и $g(\lambda) << f(\lambda)$; $L_p(T)$ обозначает пространство функций на $T \subset R^N$ с интегрируемым в степени p по мере Лебега модулем. При $T = R^N$ часто пишем просто L_p. Если $\mathcal{H}$ — какое-либо функциональное пространство и для функций из $\mathcal{H}$ определен некоторый оператор A, то $A\mathcal{H} = \{Ah, h \in \in \mathcal{H}\}$ (например, $\tilde{\mathcal{H}} = \{\tilde{h}, h \in \mathcal{H}\}$, $\overline{\mathcal{H}} = \{\overline{h}, h \in \mathcal{H}\}$ $f\mathcal{H} = \{fh, h \in \in \mathcal{H}\}$, где fh — произведение функций $f(\cdot)$ и $h(\cdot)$. Как обычно, $C_0^\infty(T)$ есть множество всех бесконечно дифференцируемых функций с компактными носителями, лежащими в T. Мы пишем C_0^∞ вместо $\mathfrak{D}(T)$ в тех случаях, когда наличие топологии на пространстве „пробных функций" не имеет значения.

Теорема 1. *Пусть $P_1^\Phi \sim P_2^\Phi$ и для некоторой п. в. не равной 0 комплекснозначной функции $g(\lambda)$, $\lambda \in R^N$, выполняется неравенство*

$$f_1(\lambda) << \frac{1}{|g^2(\lambda)|}. \tag{5}$$

Предположим, что для некоторого открытого $S \subset R^N$ множество функций $\overline{g^{-1}\tilde{\Phi}}$ содержит $C_0^\infty(S)$. Тогда $\forall\, u \in C_0^\infty(S)$ существует, конечна и неотрицательна величина

$$I(u) = \lim_{a \to -\infty,\, b \to +\infty} \iint f(\lambda) f(\mu) \left| \int_a^b \overline{\tilde{u}}(x-\lambda)\tilde{u}(x-\mu)\,dx \right|^2 d\lambda\, d\mu, \tag{6}$$

где $f(\lambda) = (f_1 - f_2)(\lambda)|g^2(\lambda)|$, $a = (A_1, \dots, A_N)$, $b = (B_1, \dots, B_N)$, $a \to -\infty$, $b \to +\infty$ означает $A_i \to -\infty$, $B_i \to +\infty$, $i = \overline{1, N}$, $\int_a^b = \int_{A_1}^{B_1} \dots \int_{A_N}^{B_N}$. Более *того, если* U *— такое подмножество* $C_0^\infty(S)$, *для которого* $\sup_{u \in U} \| u \|_{L_2(T)} <$ $< +\infty$, *то*

$$0 \le \sup_{u \in U} l(u) < +\infty. \tag{7}$$

Доказательство теоремы 1 приводится в приложении.

В дальнейшем часто предполагается, что $f_1(\lambda)$ удовлетворяет неравенству

$$f_1(\lambda) << \frac{1}{\left|\tilde{s}_0(\lambda)\right|^2}, \tag{8}$$

где $\tilde{s}_0$ — преобразование Фурье обобщенной функции $s_0 \not\equiv 0$ с компактным носителем.

***Замечание* 1.** $\tilde{s}_0(\lambda)$ может обращаться в 0 не более, чем на множестве лебеговой меры 0.

$\tilde{s}_0(\lambda)$ является сужением на R^N аналитической функции N комплексных переменных [1, 2]. Согласно одному принципу единственности [9] обращение такой функции в 0 на множестве положительной меры Лебега в R^N влечет тождественное ее равенство нулю.

***Замечание* 2.** Пусть выполняется (8). Обозначим через K_0 носитель s_0. Предположим, что существует такое открытое $S \subset R^N$, что

$$K_0 + S \subset T \tag{9}$$

(сумма алгебраическая). Тогда множество функций $\overline{\tilde{s}_0^{-1} \tilde{\Phi}}$ содержит $C_0^\infty(S)$.

Для доказательства достаточно убедиться, что множество $\tilde{s}_0^{-1} \tilde{\Phi}$ содержит преобразования Фурье всех функций из $C_0^\infty(S)$ (в том смысле, что любая функция из $\widetilde{C_0^\infty(S)}$ либо совпадает с некоторой функцией из $\tilde{s}_0^{-1} \tilde{\Phi}$, либо получается из таковой путем переопределения последней на множестве лебеговой меры 0). Для этого рассмотрим уравнение

$$\tilde{s}_0 \tilde{\varphi} = \tilde{\psi}, \tag{10}$$

где $\psi \in C_0^\infty(S)$, знак $=$ понимается как равенство п. в., а решение φ ищется в $C_0^\infty(T)$. Положим

$$\tilde{\varphi} = \tilde{s}_0 \tilde{\psi}. \tag{11}$$

Из замечания 1 следует, что тогда равенство (10) в требуемом смысле выполняется. Из (11) вытекает

$$\varphi = s_0 * \psi, \tag{12}$$

где $*$ есть операция свертки обобщенных функций. Согласно известным свойствам этой операции правая часть (12) является бесконечно дифференцируемой, финитной и сосредоточена в $K_0 + S \subset T$.

***Замечание* 3.** Знаки $\lim$ и $\iint$ в условии (6), вообще говоря, нельзя менять местами. В качестве примера можно рассмотреть случай $N = 1$, $f_1(\lambda) = 1$, $f_2(\lambda) = 1 - \cos\lambda$, $T = (0, 1)$. Вкратце ситуация здесь такова (детали мы опускаем). Во-первых, $P_1^\Phi \sim P_2^\Phi$. Во-вторых, если обозначить $h_u(\lambda, \mu) =$ $= \left|\int \bar{\tilde{u}}(x-\lambda)\tilde{u}(x-\mu)\,dx\right|^2$, где $u \in C_0^\infty(T)$, то а) существует (зависящая от

$u(\cdot)$ функция $g(\alpha)$, $\alpha \in (-\infty, \infty)$, такая, что $h_u(\lambda, \mu) = g(\lambda - \mu)$; б) $\int |g(\alpha)|\, d\alpha < +\infty$; в) $g(-\alpha) = g(\alpha)\, \forall \alpha \in (-\infty, \infty)$. В-третьих, если бы обсуждаемую перестановку можно было бы осуществить, то нетрудно обнаружить, что тогда должен был бы сходиться

$$\int\left(\cos^2\lambda \int \cos\alpha\, g(\alpha)\, d\alpha + \cos\lambda \sin\lambda \int \sin\alpha\, g(\alpha)\, d\alpha\right) d\lambda =$$

$$= \int \cos^2\lambda \int \cos a g(\alpha)\, d\alpha\, d\lambda.$$

Но последнее выражение есть

$$\mathrm{const} \cdot \int \cos^2\lambda\, d\lambda = +\infty.$$

Следующая теорема, будучи очевидным следствием теоремы 1 и замечаний 1, 2, является непосредственным обобщением и уточнением достаточного условия ортогональности гауссовских мер [7, 8], о котором говорилось во введении.

Теорема 2. *Пусть* $P_1^\Phi \sim P_2^\Phi$ *и выполнено неравенство* (8). *Предположим, что существует такое открытое* $S \subset R^N$, *что выполняется* (9). *Тогда справедливо неравенство* (7), *в котором следует положить* $f(\lambda) = (f_1 - f_2)(\lambda)\, |\tilde{s}_0^2(\lambda)|$.

Приведем несколько примеров спектральных плотностей, удовлетворяющих условиям (8):

1) простейший пример: $f_1(\lambda) << |\mathcal{P}^{-2}(\lambda)|$, где $\mathcal{P}$ — многочлен от $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$. Поскольку $\mathcal{P}$ — преобразование Фурье обобщенной функции с носителем в нуле, то в качестве S можно взять само T;

2) $f_1(\lambda) << k(\lambda)$, где $k \in \mathcal{K}$, $\mathcal{K}$ — класс умеренно растущих весовых функций [2]; например, в этот класс входят функции вида $k(\lambda) = \left(1 + |\lambda_1|^{\alpha_1} + \ldots + |\lambda_N^{\alpha_N}|\right)^\alpha$ при любых действительных $\alpha_1, \ldots, \alpha_N, \alpha$; несколько уточнив рассуждения из [10], можно показать, что каково бы ни было $\varepsilon > 0$, можно найти оценку вида $k(\lambda) \asymp \left|\tilde{s}_0^{-1}(\lambda)\right|^2$, в которой s_0 имеет носитель в $T_\varepsilon = \{(t_1, \ldots, t_N): -\varepsilon < t_i < \varepsilon,\ i = \overline{1, N}\}$; таким образом, в качестве S можно взять любое множество из R^N, для которого $S + T_\varepsilon \subset T$ ($\varepsilon > 0$ — фиксированное произвольное);

3) $f_1(\lambda) << \mathcal{P}(\lambda)/\mathcal{Q}(\lambda)$, где $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ — неотрицательные многочлены от $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$; здесь справедливо то же утверждение о выборе K_0 и S, что и в предыдущем примере; это следует из соотношений $\mathcal{P}\mathcal{Q}^{-1} = (\mathcal{P}\mathcal{Q})\mathcal{Q}^{-2} \leq k\mathcal{Q}^{-2}$, где k — функция класса $\mathcal{K}$ (если не преследовать цели выбора как можно более точной оценки, то в качестве k можно взять тривиальный вариант $(1 + |\lambda|^2)^\alpha$, где α — достаточно большое действительное число) и того, что $k \in \mathcal{K} \Rightarrow k^{-1} \in \mathcal{K}$, а также оценки предыдущего примера;

4) $f_1(\lambda) << |g^{-2}(\lambda)|$, где $g(\cdot)$ — целая функция экспоненциального типа $\mathfrak{M}_{\sigma\alpha}$, $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_N)$, $1 \leq \alpha \leq +\infty$ [11]; при этом $\overline{g}$ имеет носитель в $T_\sigma = \{(t_1, \ldots, t_N): |t_j| \leq \sigma_j, j = \overline{1, N}\}$, так что можем взять $K_0 = T_\sigma$;

5) $f_1(\lambda)$ есть произведение функций каких-либо из указанных выше типов; в качестве K_0 можно взять алгебраическую сумму соответствующих носителей.

Некоторые следствия из теорем 1, 2. ***Следствие* 1.** *Пусть в условиях теоремы* 1 *разность* $f_1 - f_2$ *не меняет знак, так что*

$$(f_1 - f_2)(\lambda) \gtrless 0. \tag{13}$$

Тогда $\forall\, U \subset C_0^\infty(S)$ *выполняется*

$$\sup_{u \in U} \iint f(\lambda) f(\mu) \left| \widetilde{|u|^2} \right|^2 (\lambda - \mu)\, d\lambda\, d\mu < +\infty, \tag{14}$$

где $\sup_{u \in U} \| u \|_{L_2(S)} < +\infty$.

В данном случае подынтегральное выражение в (6) неотрицательно, так что применима лемма Фату [12, 13], согласно которой $\sup_u$ выражений (6) больше или равен, чем

$$\sup_{u \in U} \iint f(\lambda) f(\mu)\, \underline{\lim} \left| \int_a^b \bar{\tilde{u}}(x - \lambda)\, \tilde{u}(x - \mu)\, dx \right|^2 d\lambda\, d\mu.$$

Ввиду сходимости $\int \tilde{u}(x - \lambda)\, \bar{\tilde{u}}(x - \mu)\, dx$ выражение $\underline{\lim} \ldots$ равно

$$\lim \left| \int_a^b \ldots \right|^2 = \left| \int \tilde{u}(x - \lambda)\, \bar{\tilde{u}}(x - \mu)\, dx \right|^2 = \left| \int e^{i\langle \lambda, t \rangle} u(t)\, e^{-i\langle \mu, t \rangle}\, \bar{u}(t)\, dt \right|^2,$$

где $\langle \lambda, t \rangle = \lambda_1 t_1 + \ldots + \lambda_N t_N$, а в последнем случае использовано равенство Парсеваля. В частности, видим, что при наших условиях

$$\sup_{u \in U} \iint f(\lambda) f(\mu) \left| \int e^{-i\langle \mu - \lambda, t \rangle} u(t)\, \bar{u}(t)\, dt \right|^2 d\lambda\, d\mu < +\infty. \tag{15}$$

Этим, очевидно, (14) доказано.

***Следствие* 2.** *В условиях предыдущего следствия для любой функции* $g \in L_1(S)$ *выполняется неравенство*

$$\iint f(\lambda) f(\mu) \left| \int_S e^{-i\langle \lambda - \mu, t \rangle} |g(t)|\, dt \right|^2 d\lambda\, d\mu < +\infty. \tag{16}$$

В частности, если S *ограничено,* I_S — *индикатор* S, *то*

$$\iint f(\lambda) f(\mu) \left| \int e^{-i\langle \lambda - \mu, t \rangle} I_S(t)\, dt \right|^2 d\lambda\, d\mu < +\infty. \tag{17}$$

Выберем любую последовательность $u_n \in C_0^\infty(S)$, сходящуюся к $\sqrt{|g|}$ в $L_2(S)$. Тогда

$$\lim_n \int e^{-i\langle \mu - \lambda, t \rangle} u_n(t)\, \bar{u}_n(t)\, dt = \int e^{-i\langle \mu - \lambda, t \rangle} \sqrt{|g(t)|} \sqrt{|g(t)|}\, dt.$$

При этом из (15) и леммы Фату следует

$$+\infty > \underline{\lim}_n \iint f(\lambda) f(\mu) \left| \int e^{-i\langle \mu - \lambda, t \rangle} u_n(t)\, \bar{u}_n(t)\, dt \right|^2 d\lambda\, d\mu \ge$$

$$\ge \iint f(\lambda) f(\mu)\, \underline{\lim}_n \left| \int e^{-i\langle \mu - \lambda, t \rangle} u_n(t)\, \bar{u}_n(t)\, dt \right|^2 d\lambda\, d\mu =$$

$$= \iint f(\lambda) f(\mu) \lim_n \left| \int e^{-i\langle \mu - \lambda, t \rangle} u_n(t)\, \bar{u}_n(t)\, dt \right|^2 d\lambda\, d\mu =$$

$$= \iint f(\lambda) f(\mu) \left| \int e^{-i\langle \mu - \lambda, t \rangle} |g(t)|\, dt \right|^2 d\lambda\, d\mu.$$

***Замечание* 4.** Ясно, что если вместо (15) или (7) имеют место более сильные ограничения

$$f_1(\lambda) \asymp |g^{-2}(\lambda)| \tag{18}$$

или соответственно

$$f_1(\lambda) \asymp \left|\tilde{s}_0^{-2}(\lambda)\right|, \tag{19}$$

то при выполнении (13) в условии (14) под f можно подразумевать выражение $(f_1 - f_2)/f_1$.

***Замечание* 5.** Как и обычно в таких вопросах [5, 6, 8], можно добиться ослабления условий предыдущих результатов, не требуя, чтобы оценки для f_1 или неравенство (13) выполнялись для всех λ, а лишь для $|\lambda| \geq R > 0$. Так, из результатов [15] вытекает, что если выполнено условие

$$f_1(\lambda) \geq c|\tilde{k}_0(\lambda)|^2, \tag{20}$$

где $k_0 \in \mathcal{E}'$, то мера P_1^{Φ} эквивалентна мере $P_1'^{\Phi}$, имеющей спектральную плотность f_1', совпадающей с $f_1(\lambda)$ для $|\lambda| \geq R$ и обладающей нужными свойствами уже для всех λ, если, например, выполняется (не слишком ограничительное) условие $(f_1 - f_1')||\tilde{k}_0|^2 \in L_p(R^N)$ для некоторого $p \in [1, 2]$. Так, если выполняется (20) с функцией $\tilde{k}_0(\lambda)$, локально интегрируемой в степени $-2p$, то условия (5), (7), (13) можно считать выполняющимися лишь для $|\lambda| \geq R$. При этом в неравенствах (6), (14), (16) и (17) следует заменить $\int\int$ на $\int_{|\lambda|>R} \int_{|\mu|>R}$.

***Замечание* 6.** Условие эквивалентности (17) при выполнении неравенства типа (19), где $f = (f_1 - f_2)/f_1$, $\tilde{s}_0$ — преобразование Фурье целой функции экспоненциального типа, $f_i \in L_1(R^N)$, $i = 1, 2$, приведено, например, в [7, 8]. При этом в [7, 8] не требуется выполнения ни неравенства (13), ни его ослабления в духе замечания 5. Ниже приводится пример, показывающий, что указанные условия все же нельзя игнорировать.

Пусть $N = 1$, $T = (0, 1)$, $f_1(\lambda) = (\pi(\lambda^2 + 1))^{-1}$, $f_2(\lambda) = (\pi\lambda^2)^{-1}(1 - \cos\lambda)$. Хорошо известно, что в этом случае $P_1^{\Phi} \sim P_2^{\Phi}$ [6, 14]. Для функций $f_1(\lambda)$, удовлетворяющих условию $f_1(\lambda) \asymp (1 + \lambda^2)^{-1}$, необходимым условием эквивалентности, согласно [7, 8], является конечность интеграла

$$\int\int f(\lambda) f(\mu) \left| \int_0^1 e^{-i(\lambda - \mu)t} dt \right|^2 d\lambda\, d\mu,$$

где $f(\lambda) = \dfrac{f_1 - f_2}{f_1}(\lambda)$.

Поскольку для двойных интегралов речь может идти только об абсолютной сходимости [16], а, с другой стороны, $\left| \int_{[0,1]} e^{-i(\lambda - \mu)t} dt \right| \asymp \left| \dfrac{\sin((\lambda - \mu)/2)}{(\lambda - \mu)/2} \right|$, то должен сходиться

$$\int\int |f(\lambda) f(\mu)| \frac{\sin^2((\lambda - \mu)/2)}{(\lambda - \mu)^2/4} d\lambda\, d\mu.$$

При этом, поскольку $|f(\lambda)| \asymp |\cos\lambda|$, должно быть

$$\iint |\cos\lambda \cos\mu| \frac{\sin^2(\lambda-\mu)}{(\lambda-\mu)^2} \, d\lambda \, d\mu < +\infty.$$

Но тогда в силу неравенства $\sin^2 x/x \geq \text{const} > 0$ при $0 < x < \pi/2$ должен сходиться

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\cos\lambda| \int_{\lambda-\pi}^{\lambda+\pi} |\cos\mu| \, d\mu \, d\lambda = \text{const} \int_{-\infty}^{\infty} |\cos\lambda| \, d\lambda,$$

что, конечно, неверно.

***Следствие* 3.** *Пусть выполнены условия следствия* 1. *Тогда для почти каждого* $\mu \in R^N$

$$\int f(\lambda) f(\lambda+\mu) \, d\lambda < +\infty. \tag{21}$$

Условие (21) есть необходимое условие сходимости интеграла под знаком sup в (14), которое получается записью этого интеграла в виде повторного, выполнением замены $\mu - \lambda = \nu$ во внутреннем интеграле и изменением порядка интегрирования.

***Замечание* 7.** При выполнении условий замечания 5 вместо сходимости интеграла (21) речь должна идти о сходимости интеграла

$$\int_{|\lambda| > R} f(\lambda) f(\lambda+\mu) \, d\lambda \tag{22}$$

для почти всех $\mu \in \{x: |x| > R\}$.

***Замечание* 8.** Ясно, что если асимптотическое поведение $f(\lambda)$ на ∞ такое же, как и $f(\lambda+\mu)$ при фиксированных μ, то сходимость интегралов (21), (22) влечет сходимость

$$\int_{|\lambda| > v} f^2(\lambda) \, d\lambda, \tag{23}$$

где v достаточно велико.

Например, пусть в условиях следствия 1 функция f удовлетворяет условию: для некоторого $r \geq 0$

$$\sup_{|\lambda| \geq r} \frac{f(\lambda+h)}{f(\lambda)} \leq c(h) < +\infty \tag{24}$$

или

$$\inf_{|\lambda| \geq r} \frac{f(\lambda+h)}{f(\lambda)} \geq c(h) > 0 \tag{25}$$

для каждого $h \in H \subset R^N$, где множество N имеет положительную лебегову меру. Тогда нетрудно видеть, что сходится интеграл (23) при $v = r$; если выполнены условия замечания 5, то $v = \max\{r, R\}$.

Например, (24) и (25) выполняются, если f является непрерывной правильно меняющейся функцией типа $\mathfrak{M}_2(\Gamma)$ [17], поскольку для нее выполняется равенство

$$\lim_{|\lambda| \to \infty} \frac{f(\lambda+h)}{f(\lambda)} = 1, \quad h \in R^N.$$

При весьма общих условиях выполнение (23) достаточно для эквивалентности P_1^{Φ} и P_2^{Φ} [5–9, 14, 15]. То, что (23) близко к необходимому, отмечалось в [14]. На замечание 8 можно смотреть как на формулировку условий, при которых (23) и в самом деле необходимо.

Приложение. ***Доказательство теоремы* 1.** В этом пункте часто будут встречаться обобщенные функции — функционалы на обычных функциях, определенных не на R^N, а на $R^N \times R^N$. Чтобы различать эти ситуации, будем использовать обозначения типа $\mathfrak{L}(R^N)$, $\mathfrak{L}'(R^N \times R^N)$ и т. п.

Само доказательство основано на следующих ниже леммах.

Лемма 1. *Существует (и единственна) обобщенная функция r из $\mathfrak{D}'(R^N \times R^N)$, для которой справедливо равенство*

$$b(\varphi, \psi) = \langle r, \varphi \psi^* \rangle, \quad \varphi \in \mathfrak{D}(R^N), \quad \psi \in \mathfrak{D}(R^N), \tag{26}$$

где $b(\varphi, \psi) = B_1(\varphi, \psi) - B_2(\varphi, \psi)$ — *разность корреляционных функционалов*, $\psi^*(t) = \overline{\psi}(-t)$, $\langle r, \varphi\psi^* \rangle$ — *действие функционала r на функцию* $\varphi(s) \times \psi^*(t) \in \mathfrak{D}(R^N \times R^N)$.

Пусть $f(\lambda) = (f_1 - f_2)(\lambda)$, δ — δ-функция Дирака [1]. Определим обобщенную функцию $f(\lambda) \times \delta(\lambda - \mu)$ на $\mathfrak{L}(R^N \times R^N)$ (в частности, на $\mathfrak{D}(R^N \times R^N)$) с помощью равенства

$$\langle f(\lambda) \times \delta(\lambda - \mu), \kappa(\lambda, \mu) \rangle = \langle f(\lambda), \langle \delta(\mu), \kappa(\lambda, \lambda + \mu) \rangle \rangle,$$
$$\kappa(\cdot, \cdot) \in \mathfrak{L}(R^N \times R^N). \tag{27}$$

Положим

$$r = \overbrace{f(\lambda) \times \delta(\lambda - \mu)}. \tag{28}$$

Из (28) получаем

$$\langle r, \varphi\psi \rangle = \langle \tilde{r}, \tilde{\varphi}\tilde{\psi} \rangle = \int f(\lambda)\, \tilde{\varphi}(\lambda) \langle \delta(\mu)\, \tilde{\psi}(\lambda + \mu) \rangle\, d\lambda = \int f(\lambda)\, \tilde{\varphi}(\lambda)\, \tilde{\psi}(\lambda)\, d\lambda. \tag{29}$$

Из (29) имеем

$$\langle r, \varphi\psi \rangle = \langle b, \varphi\psi^* \rangle. \tag{30}$$

Очевидно (30) эквивалентно (26).

Пусть u — элемент $C_0^\infty(R^N)$. Введем функционал uu^*r из $\mathfrak{L}'(R^N \times R^N)$, определив его равенством

$$\langle uu^*r, \kappa \rangle = \langle r, u(s)\, u^*(t) \kappa(s, t) \rangle, \quad \kappa(\cdot, \cdot) \in \mathfrak{L}(R^N \times R^N). \tag{31}$$

Лемма 2. *Преобразование Фурье функционала uu^*r задается обычной функцией* $F(\lambda, \mu)$:

$$F(\lambda, \mu) = \int f(x)\, \overline{\tilde{u}}(x - \lambda)\, \tilde{u}(x - \mu)\, dx, \tag{32}$$

где $f(x) = (f_1 - f_2)(x)$.

Для доказательства (32) достаточно убедиться, что

$$\langle uu^*r, \varphi\psi \rangle = \iint \tilde{\varphi}(\lambda)\, \tilde{\psi}(\mu) \left(\overline{\int f(x)\, \overline{\tilde{u}}(x - \lambda)\, \tilde{u}(x - \mu)\, dx} \right) d\lambda\, d\mu.$$

По определению uu^*r и ввиду (26) имеем

$$\langle uu^*r, \varphi\psi \rangle = b(u\varphi, (u^*\psi)^*) = \int f(x)\, \widetilde{u\varphi}(x)\, \overline{\widetilde{u\psi^*}}(x)\, dx. \tag{33}$$

При этом

$$\widetilde{u\varphi}(x) = (\tilde{u} * \tilde{\varphi})(x) = \int \tilde{\varphi}(\lambda)\, \tilde{u}(x - \lambda)\, d\lambda,$$

$$\overline{\widetilde{u\psi^*}}(x) = \overline{\int \tilde{\psi}^*(\mu) \tilde{u}(x - \mu)\, d\mu} = \overline{\int \overline{\tilde{\psi}}(\mu) \tilde{u}(x - \mu)\, d\mu} = \int \tilde{\psi}(\mu) \overline{\tilde{u}}(x - \mu)\, d\mu.$$

Поэтому, меняя порядок интегрирования, получаем

$$\langle u u^* r, \varphi\psi \rangle = \iint \tilde{\varphi}(\lambda)\, \tilde{\psi}(\mu) \int f(x)\, \tilde{u}(x-\lambda)\, \overline{\tilde{u}}\,(x-\mu)\, dx\, d\lambda\, d\mu,$$

что и доказывает лемму.

Лемма 3. *Пусть* $P_1^\Phi \sim P_2^\Phi$ *и выполнено неравенство* (5). *Тогда*

$$b(\varphi, \psi) = \iint \tilde{\varphi}(\lambda)\, \overline{\tilde{\psi}}(\mu)\, G(\lambda, \mu)\, |g^{-2}(\lambda)|\, |g^{-2}(\mu)|\, d\lambda\, d\mu,$$

где

$$\iint |G^2(\lambda, \mu)|\, |g^{-2}(\lambda)\, g^{-2}(\mu)|\, d\lambda\, d\mu < +\infty.$$

Лемма 3 легко следует из общего результата ([10], теорема 1) об эквивалентности P_1^Φ и P_2^Φ.

Лемма 4. *Пусть* $P_1^\Phi \sim P_2^\Phi$, $u \in C_0^\infty(T)$,

$$f_1 \ll 1. \tag{34}$$

Тогда функционал $u u^* r$ *задается функцией*

$$\overline{u(s)\, u^*(t)}\, r^\infty(s, t),$$

где $r^\infty \in L_2(R^N \times R^N)$.

Достаточно проверить, что для любых φ, ψ из $\mathfrak{D}(R^N)$

$$\langle u u^* r, \varphi\psi^* \rangle = \iint \varphi(s)\, \psi^*(t)\, u(s)\, u^*(t)\, \overline{r^\infty(s, t)}\, ds\, dt. \tag{35}$$

Очевидно, если не существует точек, в которых u и φ одновременно не равны 0 или если такое имеет место для u^* и ψ^*, то обе части формулы (35) обращаются в 0. В противном случае $0 \not\equiv u\varphi \in C_0^\infty(T)$, $0 \not\equiv u^*\psi^* \in C_0^\infty(-T)$, где $-T = \{(-t_1, \ldots, -t_N) \colon t_i \in T,\ i = \overline{1, N}\}$. С другой стороны, из леммы 3 следует, что при выполнении (34) справедливо представление

$$b(\varphi, \psi) = \iint \varphi(s)\, \psi^*(t)\, \overline{r^\infty(s, t)}\, ds\, dt, \quad \varphi \in C_0^\infty(T), \quad \psi \in C_0^\infty(T)$$

с некоторой функцией $r^\infty \in L_2(R^N \times R^N)$. Значит,

$$\langle u u^* r, \varphi\psi^* \rangle = \langle r, u\varphi u^* \psi^* \rangle = b(u\varphi, u\psi) =$$

$$= \iint (u\varphi)(s)\, (u\psi)^* r^\infty(s, t)\, ds\, dt = \iint \varphi(s)\, \psi^*(t)\, u(s)\, u^*(t)\, r^\infty(s, t)\, ds\, dt.$$

Следующая лемма есть частный случай теоремы 1 для f_1, удовлетворяющей (34).

Лемма 5. *Пусть* $P_1^\Phi \sim P_2^\Phi$ *и выполняется условие* (34). *Тогда* $\forall\, u \in C_0^\infty(T)$ *существует, конечна и неотрицательна величина*

$$l(u) = \lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to +\infty}} \iint f(\lambda) f(\mu) \left| \int_a^b \overline{\tilde{u}}\,(x-\lambda)\, \tilde{u}(x-\mu)\, dx \right|^2 d\lambda\, d\mu, \tag{36}$$

где $f(\lambda) = (f_1 - f_2)(\lambda)$, $a = (A_1, \ldots, A_N)$, $b = (B_1, \ldots, B_N)$, $a \to -\infty$, $b \to +\infty$ *означает* $A_i \to -\infty$, $B_i \to +\infty$, $i = \overline{1, N}$, $\int_a^b = \int_{A_1}^{B_1} \ldots \int_{A_N}^{B_N}$. *Более того, если* U *— такое подмножество* $C_0^\infty(T)$, *для которого* $\sup_{u \in U} \|u\|_{L_2(T)} < +\infty$, *то*

$$(0 \le) \sup_{u \in U} l(u) < +\infty. \tag{37}$$

Пусть $r^\infty \in L_2(R^N \times R^N)$ — функция из леммы 4. Очевидно,

$$0 \le \sup_{u \in U} \left\| \overline{u(s) u^*(t)} r^\infty(s,t) \right\|^2_{L_2(R^N \times R^N)} < +\infty.$$

Тогда в силу равенства Парсеваля

$$0 \le \sup_{u \in U} \left\| \widetilde{\overline{u(s) u^*(t)} r^\infty(s,t)} \right\|^2 < +\infty.$$

Однако, в силу леммы 4 функция $\widetilde{\overline{u(s) u^*(t)} r^\infty(s,t)}$ совпадает с функцией, которой задается преобразование Фурье функционала $u u^* r$. Следовательно, в силу леммы 2 получаем

$$(0 \le) \sup_{u \in U} \iint \left| \int f(\lambda) \bar{\tilde{u}}(\lambda - x) \tilde{u}(\lambda - y) d\lambda \right|^2 dx\, dy < +\infty. \tag{38}$$

Осталось показать, что выражение под знаком sup в (38) равно правой части формулы (36). Отметим сперва, что $\int f(x) \bar{\tilde{u}}(\lambda - x) \tilde{u}(\lambda - y) dx$ для любой пары (λ, μ) абсолютно сходится ($\tilde{u}(\cdot)$ быстро убывает, а f — разность функций медленного роста). Поэтому можем записать

$$\left| \int \ldots d\lambda \right|^2 = \int\int f(\lambda) f(\mu) \bar{\tilde{u}}(\lambda - x) \tilde{u}(\lambda - y) \tilde{u}(\mu - x) \bar{\tilde{u}}(\mu - y) d\lambda\, d\mu.$$

Если бы теперь можно было осуществить изменение порядка интегрирования в

$$\iint \left(\iint \ldots d\lambda\, d\mu \right) dx\, dy, \tag{39}$$

то все было бы доказано. Однако такая возможность не гарантирована (сходимость (39) подразумевает конечность

$$\iint \left| \iint \ldots d\lambda\, d\mu \right| dx\, dy,$$

но не

$$\iiiint | \ldots | \, d\lambda\, d\mu\, dx\, dy).$$

Поэтому, введя функции

$$[f(\lambda) f(\mu)]_n = \begin{cases} f(\lambda) f(\mu), & (\lambda, \mu) \in X_n; \\ 0, & (\lambda, \mu) \notin X_n, \end{cases}$$

где X_n — последовательность произвольных расширяющихся множеств конечной меры в $R^N \times R^N$, $\bigcup_n X_n = R^N \times R^N$, запишем интеграл (39) в виде предела

$$\lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to +\infty}} \int_a^b \int \lim_n [f(\lambda) f(\mu)]_n \ldots \, d\lambda\, d\mu\, dx\, dy. \tag{40}$$

При этом нетрудно проверить, что последовательность функций

$$|g(x,y)|_n = \left| \iint [f(\lambda) f(\mu)]_n \ldots \, d\lambda\, d\mu \right|$$

равномерно ограничена в $[a, b] = [A_1, B_1] \times \ldots \times [A_N, B_N]$ ($|g(x,y)|_n \le$ $\le \iint |[f(\lambda) f(\mu)]_n \ldots | d\lambda\, d\mu \le \iint | f(\lambda) f(\mu) \ldots | d\lambda\, d\mu$, далее используем быстрое убывание функции $\tilde{u}(\cdot)$).

Поэтому правая часть (40) равна

$$\lim_{a,b}\lim_{n}\iint\limits_a^b\iint [f(\lambda)f(\mu)]_n \dots\, d\lambda d\mu\, dx\, dy. \tag{41}$$

Теперь можно изменить порядок интегрирования, так что (41) равно

$$\lim_{a,b}\lim_{n}\iint [f(\lambda)f(\mu)]_n \iint\limits_a^b \dots\, dx\, dy\, d\lambda d\mu =$$

$$= \lim_{a,b}\lim_{n}\iint [f(\lambda)f(\mu)]_n \left|\int\limits_a^b \dots\, dx\right|^2 d\lambda\, d\mu.$$

По определению, последнее выражение равно

$$\lim_{a,b}\iint f(\lambda)f(\mu)\left|\int\limits_a^b \dots\, dx\right|^2 d\lambda\, d\mu,$$

что и требовалось.

***Замечание* 9.** Из доказательства леммы 5 ясно, что если положить $b = (A, \dots, A)$, $a = (-A, \dots, -A)$, то выражение под знаком $\lim$ в (36) в этом случае будет монотонно возрастающей функцией $A \in (0, \infty)$, так что неравенство (37) можно записать в виде

$$0 \le \sup_{u\in U}\lim_{A\uparrow\infty}\iint \dots\left|\int\limits_{-A}^{A} \dots\right|^2 = \sup_{u}\sup_{A}\iint \dots\left|\int\limits_{-A}^{A} \dots\right|^2 =$$

$$= \sup_{A}\sup_{u}\iint \dots\left|\int\limits_{-A}^{A} \dots\right|^2 < +\infty.$$

Аналогичное замечание справедливо для теоремы 1 во всей общности.

Пусть U_f обозначает множество пар $\{\varphi(\cdot), \psi(\cdot)\}$ измеримых комплекснозначных функций на R^N, для которых сходится

$$\int \varphi(\lambda)\psi(\lambda)f(\lambda)\, d\lambda \tag{42}$$

с заданной функцией $f\colon R^N \to [-\infty, \infty]$. Определим на U_f функционал k_f, полагая $k_f(\varphi, \psi)$ равным (42).

Следующая лемма поясняет, в частности, каким образом можно переходить от неравенства (34) к общему случаю (5).

Лемма 6. *Пусть $u(\cdot)$ — измеримая п. в. $\ne 0$ комплекснозначная функция на R^N. Для того, чтобы функционал $k_f(\cdot,\cdot)$ на функциях $(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi})$, $\varphi \in \Phi$, $\psi \in \Phi$ допускал представление*

$$k_f(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) = \iint \tilde{\varphi}(\lambda)\,\overline{\tilde{\psi}}(\mu)\, G(\lambda, \mu) f_1(\lambda) f_1(\mu)\, d\lambda\, d\mu,$$

где

$$\iint |G(\lambda, \mu)|^2 f_1(\lambda) f_1(\mu)\, d\lambda\, d\mu < +\infty,$$

необходимо и достаточно, чтобы функционал $k_{|U^2|f}$ на функциях $(u^{-1}\tilde{\varphi}$, $\overline{u^{-1}\tilde{\psi}})$ допускал представление

$$k_{|U^2|f}\left(u^{-1}\tilde{\varphi}, \overline{u^{-1}\tilde{\psi}}\right) =$$
$$= \iint (u^{-1}\tilde{\varphi})(\lambda)\left(\overline{u^{-1}\tilde{\psi}}\right)(\mu)\, G'(\lambda,\mu)\,(|u^2|f_1)(\lambda)\,(|u^2|f_1)(\mu)\, d\lambda\, d\mu,$$

где

$$\iint |G'(\lambda,\mu)|^2(|u^2|f_1)(\lambda)\,(|u^2|f_2)(\mu)\, d\lambda\, d\mu < +\infty.$$

Прямая проверка утверждения леммы 5 не содержит трудностей.

Завершим доказательство теоремы 1. Используем леммы 5 и 6, причем в последней в качестве $u(\cdot)$ возьмем $g(\cdot)$ из (5). Получим, что условие $P_1^\Phi \sim$ $\sim P_2^\Phi$ влечет равенство

$$\int f(\lambda)(g^{-1}\tilde{\varphi})(\lambda)\left(\overline{g^{-1}\tilde{\psi}}\right)(\lambda)\, d\lambda =$$
$$= \iint (g^{-1}\tilde{\varphi})(\lambda)\left(\overline{g^{-1}\tilde{\psi}}\right)(\lambda)\, G'(\lambda,\mu)\,(|g^2|f_1)(\lambda)\,(|g^2|f_1)(\mu)\, d\lambda\, d\mu,$$

где

$$\iint |G'(\lambda,\mu)|^2(|g^2|f_1)(\lambda)\,(|g^2|f_1)(\mu)\, d\lambda\, d\mu < +\infty.$$

Поскольку, по условию, множество $\overline{g^{-1}\tilde{\Phi}}$ содержит $C_0^\infty(S)$ для некоторого $S \subset R^N$, то эквивалентны меры $P_1^{\Phi'}$ и $P_2^{\Phi'}$, соответствующие случайным полям со спектральными плотностями $f_1' = |g^2|f_1$, $f_2' = |g^2|f_2$ на множестве $\Phi' = C_0^\infty(S)$ [10], причем $f_1' << 1$. Следовательно, можем применить лемму 5, заменив в ней Φ на $C_0^\infty(S)$, T на S и f_1, f_2 на $|g^2|f_1$, $|g^2|f_2$.

1. *Владимиров В. С.* Обобщенные функции в математической физике. – М.: Наука, 1976. – 280 с.
2. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными: в 4-х т. – М.: Наука, 1986. – Т.1. – 462 с.
3. *Яглом А. М.* Некоторые классы случайных полей в n-мерном пространстве, родственные стационарным случайным процессам // Теория вероятностей и ее применения. – 1957. – **2**, №3. – С. 292 – 338.
4. *Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я.* Обобщенные функции. – М.: Физматгиз, 1961. – Вып. 4. – 472. с.
5. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов: в 3-х т. – М.: Наука, 1975. – Т.1. – 231 с.
6. *Розанов Ю. А.* Гауссовские бесконечномерные распределения // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1968. – **108**. – 135 с.
7. *Скороход А. В., Ядренко М. И.* Абсолютная непрерывность мер, соответствующих однородным случайным полям // Теория вероятностей и ее применения. – 1973. – **18**, №2. – С. 30 – 43.
8. *Ядренко М. И.* Спектральная теория случайных полей. – Киев.: Вища шк., 1980. – 208 с.
9. *Федерер Г.* Геометрическая теория меры. – М.: Наука, 1987. – 760 с.
10. *Красницкий С. М.* Условия эквивалентности распределений гауссовских однородных полей // Теория вероятностей и ее применения. – 1989. – **34**, №4. – С. 786 – 791.
11. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1977. – 485 с.
12. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Введение в теорию случайных процессов. – М.: Наука, 1965. – 654 с.
13. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы: в 3-х т. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – Т.1. – 895 с.
14. *Ибрагимов И. А., Розанов Ю. А.* Гауссовские случайные процессы. – М.: Наука, 1970. – 384 с.
15. *Красницкий С. М.* Об условиях эквивалентности распределений гауссовских однородных полей // Теория вероятностей и мат. статистика: Тр. междунар. конф. (Вильнюс, 24 – 29 июня 1985 г.). – Вильнюс, 1985. – Т.2. – С. 72 – 74.
16. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3-х т. – М.: Наука, 1969. – Т.3. – 656 с.
17 *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. – М.: Наука, 1985. – 142 с.

Получено 09. 03. 92