УДК 517.929

А. М. Самойленко, чл.-корр. АН Украины,
Г. П. Пелюх, д-р физ.-мат. наук (Ин-т математики АН Украины, Киев)

ОГРАНИЧЕННЫЕ НА ВСЕЙ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ОСИ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ИХ СВОЙСТВА*

For a system of nonlinear functional-differential equations with a linearly transformed argument, we establish the conditions of existence and uniqueness for a solution bounded on the entire real axis and study the properties of this solution.

Одержані умови існування та єдиності обмеженого на всій дійсній осі розв'язку системи нелінійних диференціально-функціональних рівнянь з лінійно перетвореним аргументом і досліджені його властивості.

Рассмотрим систему нелинейных дифференциально-функциональных уравнений вида

$$x'(t) = Ax(t) + Bx'(\lambda t) + F(t, x(t), x(\lambda t), x'(\lambda t)), \tag{1}$$

где $t \in R = (-\infty, \infty)$, A, B — постоянные вещественные матрицы размера $n \times n$, вектор-функция $F(t, x, y, z): R \times R^n \times R^n \times R^n \to R^n$ является непрерывной по всем переменным, $\lambda = \text{const} \neq 0, \pm 1$. Отдельные классы таких уравнений были объектом исследования многих математиков. При этом особенно активно изучались вопросы существования и единственности различного рода решений [1 – 5], поведения решений [6 – 8] и др. В настоящей работе установлены условия существования и единственности ограниченного на R решения системы (1) и изучаются его свойства.

Обозначим через λ_i, $i = 1, \dots, n$, собственные значения матрицы A и предположим выполненными следующие условия: $\operatorname{Re}\lambda_i \neq 0$, $i = 1, \dots, n$. Тогда существует неособая постоянная матрица C размера $n \times n$, приводящая матрицу A к виду

$$A = C^{-1} \operatorname{diag}(\Lambda_1, \Lambda_2)\, C,$$

где Λ_1 и Λ_2 — постоянные матрицы размера $(p \times p)$ и $(n-p \times n-p)$, собственные значения которых удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re}\lambda_j(\Lambda_1) > 0, \quad j = 1, \dots, p, \\ &\operatorname{Re}\lambda_j(\Lambda_2) < 0, \quad j = p+1, \dots, n. \end{aligned} \tag{2}$$

Для исследования вопроса о существовании ограниченных на всей оси решений системы (1) выполним преобразование

$$x'(t) = Ax(t) + y(t), \tag{3}$$

где $y(t) \in C^0$, причем C^0 — пространство непрерывных на R вектор-функций, удовлетворяющих условию

$$\sup_{t \in R} |y(t)| \leq M, \tag{4}$$

$M = \text{const} > 0$. Из (3) непосредственно вытекает, что $x(t)$ определяется единственным образом с помощью соотношения

* Работа выполнена при финансовой поддержке Государственного комитета Украины по вопросам науки и технологий.

$$x(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t-\tau)y(\tau)\,d\tau, \tag{5}$$

где

$$G(t) = \begin{cases} -C^{-1}\operatorname{diag}\left(e^{\Lambda_1 t}, 0\right)C & \text{при } t < 0; \\ C^{-1}\operatorname{diag}\left(0, e^{\Lambda_2 t}\right)C & \text{при } t > 0. \end{cases}$$

Нетрудно показать, что матричная функция $G(t)$ удовлетворяет условиям:

1) $G(+0) - G(-0) = E$, где E — единичная матрица размера $n \times n$;

2) $|G(t)| \le L e^{-\alpha|t|}$ при всех $t \ne 0$, где L, $\alpha = \text{const} > 0$ и норма матрицы $G = (q_{ij})$ определяется с помощью соотношения $|G| = \max\limits_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |q_{ij}|$;

3) $G'(t) = AG(t)$, $t \ne 0$.

В результате преобразования (3) исследование вопроса о существовании и единственности ограниченного на всей оси решения системы (1) сводится к исследованию аналогичного вопроса для системы уравнений

$$y(t) = By(\lambda t) + \lambda BA \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(\lambda(t-\tau))\,y(\lambda\tau)\,d\tau + F\Bigg(t, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t-\tau)\,y(\tau)\,d\tau,$$

$$\lambda \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(\lambda(t-\tau))\,y(\lambda\tau)\,d\tau,\quad y(\lambda t) + \lambda A \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(\lambda(t-\tau))\,y(\lambda\tau)\,d\tau\Bigg). \tag{6}$$

Теорема 1. *Пусть выполняются условия:*

а) $|B| + 2\dfrac{L}{\alpha}|BA| < 1$;

б) $\sup\limits_{t \in R} |F(t, 0, 0, 0)| = N < \infty$;

в) *вектор-функция* $F(t, x, y, z)$ *удовлетворяет условию*

$$|F(t, x_1, y_1, z_1)| - |F(t, x_2, y_2, z_2)| \le l\,(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|),$$

где $(t, x_1, y_1, z_1), (t, x_2, y_2, z_2) \in R \times R^n \times R^n \times R^n$, $l = \text{const} > 0$. *Тогда при достаточно малом* l *существует единственное непрерывное и ограниченное на всей оси* $R = (-\infty, +\infty)$ *решение* $\gamma = \gamma(t)$ *системы уравнений* (6).

Доказательство. В пространстве $C^0\left(M = N\left[1 - \left(|B| + \dfrac{2L}{\alpha}|BA| + l\left(1 + \dfrac{4L}{\alpha} + \dfrac{2L}{\alpha}|A|\right)\right)\right]^{-1}\right)$ рассмотрим отображение T:

$$Ty(t) = By(\lambda t) + \lambda BA \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(\lambda(t-\tau))\,y(\lambda\tau)\,d\tau + F\Bigg(t, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t-\tau)\,y(\tau)\,d\tau,$$

$$\lambda \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(\lambda(t-\tau))\,y(\lambda\tau)\,d\tau,\quad y(\lambda t) + \lambda A \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(\lambda(t-\tau))\,y(\lambda\tau)\,d\tau\Bigg). \tag{7}$$

Из (7) непосредственно вытекает, что при $y(t) \in C^0$ вектор-функция $Ty(t)$ определена и непрерывна при всех $t \in R$. Принимая во внимание свойства матричной функции $G(t)$ и условия а) – в), (4), получаем

$$|Ty(t)| \le |B||y(\lambda t)| + |\lambda BA| \int_{-\infty}^{+\infty} |G(\lambda(t-\tau))||y(\lambda\tau)|\,d\tau + |F(t,0,0,0)| +$$

$$+ l\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} |G(t-\tau)||y(\tau)|\,d\tau + |\lambda| \int_{-\infty}^{+\infty} |G(\lambda(t-\tau))||y(\lambda\tau)|\,d\tau + |y(\lambda t)| +$$

$$+ |\lambda A| \int_{-\infty}^{+\infty} |G(\lambda(t-\tau))||y(\lambda\tau)|\,d\tau \Big) \le$$

$$\le N + \left(|B| + \frac{2L}{\alpha}|BA| + l\left(1 + \frac{4L}{\alpha} + \frac{2L}{\alpha}|A|\right)\right) \sup_{t\in R} |y(t)| \le$$

$$\le N + \left(|B| + \frac{2L}{\alpha}|BA| + l\left(1 + \frac{4L}{\alpha} + \frac{2L}{\alpha}|A|\right)\right) M. \tag{8}$$

Так как в силу а) константу l можно выбрать такой, что

$$\theta = |B| + \frac{2L}{\alpha}|BA| + l\left(1 + \frac{4L}{\alpha} + \frac{2L}{\alpha}|A|\right) < 1, \tag{9}$$

то из (8) получаем

$$\sup_{t\in R} |Ty(t)| \le M$$

и, таким образом, вектор-функция $Ty(t) \in C^0$.

В пространстве C^0 введем расстояние между его элементами $y(t)$, $z(t)$ с помощью соотношения

$$\rho\,(y(t), z(t)) = \sup_{t\in R} |y(t) - z(t)|.$$

Тогда оно будет полным метрическим пространством и для доказательства теоремы 1 остается показать, что оператор T является сжатым при выполнении условия (9). Действительно, поскольку

$$|Ty(t) - Tz(t)| \le |B||y(\lambda t) - z(\lambda t)| + |\lambda BA| \int_{-\infty}^{+\infty} |G(\lambda(t-\tau))||y(\lambda\tau) -$$

$$- z(\lambda\tau)|\,d\tau + l\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} |G(t-\tau)||y(\tau) - z(\tau)|\,d\tau +$$

$$+ |\lambda| \int_{-\infty}^{+\infty} |G(\lambda(t-\tau))||y(\lambda\tau) - z(\lambda\tau)|\,d\tau + |y(\lambda t) - z(\lambda t)| +$$

$$+ |\lambda A| \int_{-\infty}^{+\infty} |G(\lambda(t-\tau))||y(\lambda\tau) - z(\lambda\tau)|\,d\tau \Big),$$

то в силу (9) получаем

$$|Ty(t) - Tz(t)| \le \left[|B| + \frac{2L}{\alpha}|BA| + l\left(1 + \frac{4L}{\alpha} + \frac{2L}{\alpha}|A|\right) \right] \rho\,(y(t), z(t))$$

и, следовательно,

$$\rho(Ty(t), Tz(t)) \le \theta\rho(y(t), z(t)).$$

Тем самым доказано, что в пространстве C^0 оператор T имеет единственную неподвижную точку $\gamma(t)$. Вектор-функция $\gamma(t)$ является единственным непрерывным и ограниченным на всей оси R решением системы уравнений (6), которое можно построить с помощью метода последовательных приближений. При этом последовательные приближения $y_n(t)$, $n = 0, 1, \dots$, определяются соотношениями

$$y_0(t) = 0, \quad y_n(t) = Ty_{n-1}(t), \quad n = 1, 2, \dots . \tag{10}$$

Теорема 1 доказана.

Принимая во внимание (5) и теорему 1, получаем единственное ограниченное на всей оси R решение $w(t)$ системы (1):

$$w(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t-\tau)\gamma(\tau)\,d\tau. \tag{11}$$

Выполним в (1) замену переменных

$$x(t) = \tilde{y}(t) + w(t). \tag{12}$$

Тогда будем иметь

$$\tilde{y}'(t) = A\tilde{y}(t) + B\tilde{y}'(\lambda t) + \Phi(t, \tilde{y}(t), \tilde{y}(\lambda t), \tilde{y}'(\lambda t)), \tag{13}$$

где $\Phi(t, \tilde{y}(t), \tilde{y}(\lambda t), \tilde{y}'(\lambda t)) = F(t, \tilde{y}(t) + w(t), \tilde{y}(\lambda t) + w(\lambda t), \tilde{y}'(\lambda t) + w'(\lambda t)) - - F(t, w(t), w(\lambda t), w'(\lambda t))$. При этом легко убедиться, что вектор-функция $\Phi(t, x, y, z)$ удовлетворяет условию в) теоремы 1.

Поскольку для системы (13) выполняются все условия теоремы 1 и $\Phi(t, 0, 0, 0) = 0$, то функция $\tilde{y}(t) = 0$ является ее единственным решением, ограниченным при всех $t \in (-\infty, +\infty)$. Отсюда, однако, не следует, что система (13) не имеет других решений, ограниченных при $t \in (\alpha, \beta) \subset R$.

Предположим сначала, что $\lambda > 1$, и рассмотрим систему уравнений

$$z(t) = BA\Gamma(\lambda t)c + Bz(\lambda t) + BA\lambda\int_0^{\infty} G(\lambda(t-\tau))z(\lambda\tau)\,d\tau +$$

$$+ \Phi\Big(t, \Gamma(t)c + \int_0^{\infty} G(t-\tau)z(\tau)\,d\tau,\ \Gamma(\lambda t)c + \lambda\int_0^{\infty} G(\lambda(t-\tau))z(\lambda\tau)\,d\tau,$$

$$A\Gamma(\lambda t)c + z(\lambda t) + A\lambda\int_0^{\infty} G(\lambda(t-\tau))z(\lambda\tau)\,d\tau\Big), \tag{14}$$

где $\Gamma(t) = C^{-1}\operatorname{diag}(0, e^{\Lambda_2 t})C$, $c = (0, \dots, 0, c_{p+1}, \dots, c_n)$, c_i, $i = p+1, \dots, n$ — произвольные постоянные.

Покажем, что система (14) имеет $n-p$-параметрическое семейство непрерывных при $t \in [0, +\infty)$ решений $z(t, c)$, удовлетворяющих условию

$$\lim_{t\to\infty} z(t, c) = 0. \tag{15}$$

Для этого воспользуемся методом последовательных приближений. Последовательные приближения $z_m(t)$, $m = 0, 1, \dots$, определим с помощью следующих формул:

$$z_0(t) = 0,$$

$$z_m(t) = BA\Gamma(\lambda t)c + Bz_{m-1}(\lambda t) + BA\lambda\int_0^\infty G(\lambda(t-\tau))z_{m-1}(\lambda\tau)\,d\tau +$$

$$+\Phi\Big(t, \Gamma(t)c + \int_0^\infty G(t-\tau)z_{m-1}(\tau)\,d\tau,\ \Gamma(\lambda t)c + \lambda\int_0^\infty G(\lambda(t-\tau))z_{m-1}(\lambda\tau)\,d\tau,$$

$$A\Gamma(\lambda t)c + z_{m-1}(\lambda t) + A\lambda\int_0^\infty G(\lambda(t-\tau))z_{m-1}(\lambda\tau)\,d\tau\Big), \tag{16}$$

$$m = 1, 2, \ldots .$$

Принимая во внимание вид матрицы $G(t)$ и условия (2), можно указать положительные постоянные α_1, α_2 такие, что

$$|G(t)| = \begin{cases} Le^{\alpha_1 t}, & t<0; \\ Le^{-(\alpha_1+\alpha_2)t}, & t>0, \end{cases} \tag{17}$$

где L — достаточно большая положительная постоянная.

Покажем, что при всех $t\in[0,+\infty)$ и $m = 1, 2, \ldots$ выполняются оценки

$$|z_m(t)-z_{m-1}(t)| \le Kq^{m-1}e^{-\alpha_2 t}|c|, \tag{18}$$

где $q = |B|+2|BA|\dfrac{L}{\alpha_1}+l\left(1+2\dfrac{L}{\alpha_1}+2(1+|A|)\dfrac{L}{\alpha_1}\right)<1$, $K = L(|BA|+$ $+l(2+|A|))$.

В самом деле, так как $|\Gamma(t)c| \le Le^{-(\alpha_1+\alpha_2)t}|c|$, то

$$|z_1(t)-z_0(t)| = |BA\Gamma(\lambda t)c + [\Phi(t, \Gamma(t)c, \Gamma(\lambda t)c, A\Gamma(\lambda t)c) -$$

$$-\Phi(t,0,0,0)]| \le |BA||\Gamma(\lambda t)c| + l(|\Gamma(t)c|+|\Gamma(\lambda t)c|+|A||\Gamma(\lambda t)c|) \le$$

$$\le |BA|Le^{-\lambda(\alpha_1+\alpha_2)t}|c| + l\Big(Le^{-(\alpha_1+\alpha_2)t}|c| + Le^{-\lambda(\alpha_1+\alpha_2)t}|c| +$$

$$+L|A|e^{-\lambda(\alpha_1+\alpha_2)t}|c|\Big) \le Ke^{-\alpha_2 t}|c|$$

и, таким образом, оценка (18) справедлива при $m = 1$. Рассуждая по индукции, предположим, что оценка (18) доказана для некоторого $m\ge 1$ и покажем, что она не изменится при переходе от m к $m+1$.

Действительно, принимая во внимание (16), (17), (18) и в), находим

$$|z_{m+1}(t)-z_m(t)| \le |B||z_m(\lambda t)-z_{m-1}(\lambda t)| + |\lambda BA|\int_0^\infty |G(\lambda(t-$$

$$-\tau))||z_m(\lambda\tau)-z_{m-1}(\lambda\tau)|\,d\tau + l\Big(\int_0^\infty |G(t-\tau)||z_m(\tau)-z_{m-1}(\tau)|\,d\tau +$$

$$+\lambda\int_0^\infty |G(\lambda(t-\tau))||z_m(\lambda\tau)-z_{m-1}(\lambda\tau)|\,d\tau + |z_m(\lambda t)-z_{m-1}(\lambda t)| +$$

$$+ \lambda|A|\int_0^{\infty}|G(\lambda(t-\tau))||z_m(\lambda\tau)-z_{m-1}(\lambda\tau)|d\tau\Bigg) \le |B||z_m(\lambda t)-$$

$$-z_{m-1}(\lambda t)| + |\lambda BA|\int_0^t |G(\lambda(t-\tau))||z_m(\lambda\tau)-z_{m-1}(\lambda\tau)|d\tau +$$

$$+ |\lambda BA|\int_t^{\infty}|G(\lambda(t-\tau))||z_m(\lambda\tau)-z_{m-1}(\lambda\tau)|d\tau + l\Bigg(\int_0^t |G(t-\tau)||z_m(\tau)-$$

$$-z_{m-1}(\tau)|d\tau + \int_t^{\infty}|G(t-\tau)||z_m(\tau)-z_{m-1}(\tau)|d\tau + |z_m(\lambda t)-z_{m-1}(\lambda t)| +$$

$$+ \lambda(1+|A|)\int_0^t |G(\lambda(t-\tau))||z_m(\lambda\tau)-z_{m-1}(\lambda\tau)|d\tau +$$

$$+ \lambda(1+|A|)\int_t^{\infty}|G(\lambda(t-\tau))||z_m(\lambda\tau)-z_{m-1}(\lambda\tau)|d\tau\Bigg) \le$$

$$\le |B|Kq^{m-1}e^{-\lambda\alpha_2 t}|c| + \lambda|BA|KLq^{m-1}\int_0^t e^{-\lambda(\alpha_1+\alpha_2)(t-\tau)}e^{-\lambda\alpha_2\tau}d\tau|c| +$$

$$+ \lambda|BA|KLq^{m-1}\int_t^{\infty}e^{\lambda\alpha_1(t-\tau)}e^{-\lambda\alpha_2\tau}d\tau|c| +$$

$$+ |c|l\Bigg(KLq^{m-1}\int_0^t e^{-(\alpha_1+\alpha_2)(t-\tau)}e^{-\alpha_2\tau}d\tau + KLq^{m-1}\int_t^{\infty}e^{\alpha_1(t-\tau)}e^{-\alpha_2\tau}d\tau +$$

$$+ Kq^{m-1}e^{-\lambda\alpha_2 t} + \lambda(1+|A|)KLq^{m-1}\int_0^t e^{-\lambda(\alpha_1+\alpha_2)(t-\tau)}e^{-\lambda\alpha_2\tau}d\tau +$$

$$+ \lambda(1+|A|)KLq^{m-1}\int_t^{\infty}e^{\lambda\alpha_1(t-\tau)}e^{-\lambda\alpha_2\tau}d\tau\Bigg) \le Kq^{m-1}|c|\Bigg(|B|e^{-\alpha_2 t} +$$

$$+ \lambda|BA|L\,e^{-\lambda(\alpha_1+\alpha_2)t}\int_0^t e^{\lambda\alpha_1\tau}d\tau + \lambda|BA|L\,e^{\lambda\alpha_1 t}\int_t^{\infty}e^{-\lambda(\alpha_1+\alpha_2)\tau}d\tau +$$

$$+ l\Bigg(L\int_0^t e^{-(\alpha_1+\alpha_2)t}e^{\alpha_1\tau}d\tau + L\,e^{\alpha_1 t}\int_t^{\infty}e^{-(\alpha_1+\alpha_2)\tau}d\tau + e^{-\alpha_2 t} +$$

$$+ \lambda(1+|A|)L\,e^{-\lambda(\alpha_1+\alpha_2)t}\int_0^t e^{\lambda\alpha_1\tau}d\tau + \lambda(1+|A|)L\,e^{\lambda\alpha_1 t}\int_t^{\infty}e^{-\lambda(\alpha_1+\alpha_2)\tau}d\tau\Bigg) \le$$

$$\le Kq^{m-1}|c|\Bigg(|B|e^{-\alpha_2 t} + \lambda|BA|\frac{L}{\lambda\alpha_1}e^{-\lambda(\alpha_1+\alpha_2)t}(e^{\lambda\alpha_1 t}-1) +$$

$$+ \lambda|BA|\frac{L}{\lambda(\alpha_1+\alpha_2)}e^{\lambda\alpha_1 t}e^{-\lambda(\alpha_1+\alpha_2)t} + l\Bigg(\frac{L}{\alpha_1}e^{-(\alpha_1+\alpha_2)t}(e^{\alpha_1 t}-1) +$$

$$+ \frac{L}{\alpha_1+\alpha_2}e^{\alpha_1 t}e^{-(\alpha_1+\alpha_2)t} + e^{-\alpha_2 t} + \frac{\lambda(1+|A|)}{\lambda\alpha_1}L\,e^{-\lambda(\alpha_1+\alpha_2)t}(e^{\lambda\alpha_1 t}-1) +$$

$$+ \frac{\lambda(1+|A|)}{\lambda(\alpha_1+\alpha_2)} L\, e^{\lambda\alpha_1 t} e^{-\lambda(\alpha_1+\alpha_2)t} \Bigg)\Bigg) \le K q^{m-1} |c| \Bigg[|B| + 2|BA| \frac{L}{\alpha_1} +$$

$$+ l\left(1 + 2\frac{L}{\alpha_1} + 2\frac{(1+|A|)}{\alpha_1} L \right) \Bigg] e^{-\alpha_2 t} \le K q^m |c| e^{-\alpha_2 t}.$$

Таким образом, оценка (18) справедлива при всех $t \in [0, \infty)$ и $m = 1, 2, \dots$.

Из (18) вытекает, что последовательность вектор-функций $z_m(t)$, $m = 0, 1, \dots$, равномерно сходится к вектор-функции $z(t, c)$, которая удовлетворяет неравенству

$$|z(t, c)| \le \frac{K}{1-q} |c| e^{-\alpha_2 t}. \tag{19}$$

При этом вектор-функция $z(t, c)$ является непрерывной по t, c при $t \in [0, \infty)$, $|c| \le c_*$ (c_* — положительная постоянная) и

$$\lim_{t\to\infty} z(t, c) = 0.$$

Переходя в (16) к пределу при $m \to \infty$, можно убедиться, что вектор-функция $z(t, c)$ удовлетворяет системе уравнений (14).

Принимая во внимание (17), (19), легко показать, что $\tilde{y}(t, c)$, определяемая формулой

$$\tilde{y}(t, c) = \Gamma(t)c + \int_0^\infty G(t-\tau) z(\tau, c) d\tau,$$

представляет собой $(n-p)$-параметрическое семейство решений системы дифференциально-функциональных уравнений (13), определенных при $t \in [0, \infty)$, $|c| \le c_*$ и удовлетворяющих условию

$$\lim_{t\to\infty} \tilde{y}(t, c) = 0.$$

Отсюда с учетом (12) вытекает следующая теорема.

Теорема 2. *Если выполняются условия* а) – в), *то при достаточно малом* l *система уравнений* (1) *имеет* $(n-p)$*-параметрическое семейство решений* $x(t, c)$, $c = (0, \dots, 0, c_{p+1}, \dots, c_n)$, *определенных при* $t \in [0, \infty)$, $|c| \le c_*$ *и удовлетворяющих условию*

$$\lim_{t\to\infty} [x(t, c) - w(t)] = 0.$$

Покажем теперь, что при некоторых дополнительных условиях система уравнений (1) имеет решения $x(t)$, определенные при $t \in [0, t_*]$ (t_* — достаточно малое положительное число) и удовлетворяющие условию

$$\lim_{t\to 0} [x(t, c) - w(t)] = 0. \tag{20}$$

Для этого в силу (12) достаточно показать, что система уравнений (13) имеет решения $\tilde{y}(t)$, определенные при $t \in [0, t_*]$, $t_* \le 1$, и удовлетворяющие условию

$$\lim_{t\to 0} \tilde{y}(t) = 0.$$

Для простоты в дальнейшем будем предполагать, что $B = \operatorname{diag}(b_1, \ldots, b_n)$, $0 < b_i < 1$, $i = 1, \ldots, n$, и

$$b^* b_*^{-1} \lambda^{-1} < 1, \tag{21}$$

где $b_* = \min\{b_i, i = 1, \ldots, n\}$, $b^* = \max\{b_i, i = 1, \ldots, n\}$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть выполняются условия* а) – в), (21). *Тогда при достаточно малых* $t > 0$, l *система уравнений* (13) *имеет семейство решений* $\tilde{y}(t) = y\left(t, \omega\left(\frac{\ln t}{\ln \lambda^{-1}}\right)\right)$, *где* $\omega(\tau) = (\omega_1(\tau), \ldots, \omega_n(\tau))$, $\omega_i(\tau)$, $i = 1, \ldots, n$ — *произвольные непрерывные* 1-*периодические функции такие, что*

$$|\omega_i(\tau)| \le \omega_*, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{22}$$

удовлетворяющих условию

$$\lim_{t \to 0} \tilde{y}\left(t, \omega\left(\frac{\ln t}{\ln \lambda^{-1}}\right)\right) = 0. \tag{23}$$

Доказательство. Рассмотрим систему уравнений

$$z(t) = B z(\lambda t) + A \int_0^t z(\tau)\, d\tau + \Phi\left(t, \int_0^t z(\tau)\, d\tau, \lambda \int_0^t z(\lambda\tau)\, d\tau, z(\lambda\tau)\right) \tag{24}$$

и покажем, что она имеет семейство W непрерывных решений $z(t) = z\left(t, \omega\left(\frac{\ln t}{\ln \lambda^{-1}}\right)\right)$, где $\omega(\tau) = (\omega_1(\tau), \ldots, \omega_n(\tau))$, $\omega_i(\tau)$, $i = 1, \ldots, n$, — произвольные непрерывные функции, удовлетворяющие условиям (22). Кроме того, для любого $z(t) \in W$ справедлива оценка

$$|z(t)| \le P t^{\nu - \varepsilon}, \tag{25}$$

где $P = \text{const} > 0$, $\nu = \dfrac{\ln b^*}{\ln \lambda^{-1}}$, $\varepsilon = \left| \dfrac{\ln\left(1 + \frac{l}{b^*}\right)}{\ln \lambda^{-1}} \right|$.

Воспользуемся методом последовательных приближений, причем последовательные приближения $z_m(t)$, $m = 0, 1, \ldots$, определим формулами

$$z_0(t) = B^{-1} z_0(\lambda^{-1} t) - B^{-1} \Phi(\lambda^{-1} t, 0, 0, z_0(t)),$$

$$z_m(t) = B^{-1} z_{m-1}(\lambda^{-1} t) - B^{-1} A \lambda^{-1} \int_0^t z_{m-1}(\lambda^{-1}\tau)\, d\tau -$$

$$- B^{-1} \Phi\left(\lambda^{-1} t, \lambda^{-1} \int_0^t z_{m-1}(\lambda^{-1}\tau)\, d\tau, \int_0^t z_{m-1}(\tau)\, d\tau, z_{m-1}(t)\right), \quad m = 1, \ldots . \tag{26}$$

Отсюда следует, что нулевое приближение $z_0(t)$ является решением системы нелинейных функциональных уравнений

$$z_0(\lambda^{-1} t) = B z_0(t) + \Phi(\lambda^{-1} t, 0, 0, z_0(t)). \tag{27}$$

Покажем, что система уравнений (27) имеет семейство W_0 непрерывных при $t \in [0, 1]$ решений $z_0(t) = z_0\left(t, \omega\left(\frac{\ln t}{\ln \lambda^{-1}}\right)\right)$ (произвольная вектор-функция $\omega(\tau)$ удовлетворяет условиям (22)), удовлетворяющих неравенству

$$|z_0(t)| \le P_0 t^{\nu-\varepsilon}, \tag{28}$$

где $P_0 = \text{const} > 0$.

В самом деле, полагая

$$z_0(\tau) = \left(\tau^{\ln(b_1+l)/\ln\lambda^{-1}}\omega_1\left(\frac{\ln\tau}{\ln\lambda^{-1}}\right), \ldots, \tau^{\ln(b_n+l)/\ln\lambda^{-1}}\omega_n\left(\frac{\ln\tau}{\ln\lambda^{-1}}\right)\right)$$

при $\tau \in [\lambda^{-1}, 1]$, из (27) получаем

$$z_0(\lambda^{-1}\tau) = Bz_0(\tau) + \Phi(\lambda^{-1}\tau, 0, 0, z_0(\tau)), \tag{29}$$

$$z_0(\lambda^{-m}\tau) = Bz_0(\lambda^{-(m-1)}\tau) + \Phi(\lambda^{-m}\tau, 0, 0, z_0(\lambda^{-(m-1)}\tau)), \quad m = 2, 3, 4, \ldots$$

Таким образом построенное семейство решений будет непрерывным при всех $t \in [0, 1]$ за исключением, быть может, точек $t = \lambda^{-1}, \lambda^{-2}, \ldots$. Чтобы избежать этого, следует функции $\omega_i\left(\frac{\ln\tau}{\ln\lambda^{-1}}\right)$, $i = 1, \ldots n$, подобрать так, чтобы выполнялось соотношение

$$z_0(\lambda^{-1}) = Bz_0(1) + \Phi(\lambda^{-1}, 0, 0, z_0(1))$$

или

$$\omega(0) = l^{-1}\Phi(\lambda^{-1}, 0, 0, \omega(0)).$$

Так как $\Phi(t, 0, 0, 0) \equiv 0$, то это равенство выполняется, например, при $\omega(0) = 0$.

Поскольку

$$|z_0(\tau)| \le \tau^{\ln(b^*+l)/\ln\lambda^{-1}}\omega_*,$$

то в силу условия в) из (29) получаем

$$|z_0(\lambda^{-1}\tau)| \le (b^*+l)\,\tau^{\ln(b^*+l)/\ln\lambda^{-1}}\omega_*,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$|z_0(\lambda^{-m}\tau)| \le (b^*+l)^m\,\tau^{\ln(b^*+l)/\ln\lambda^{-1}}\omega_*, \quad m = 2, 3, \ldots .$$

Отсюда следует

$$|z_0(\lambda^{-m}\tau)| \le (\lambda^{-m}\tau)\,\tau^{\ln(b^*+l)/\ln\lambda^{-1}}\omega_*, \quad m = 0, 1, \ldots,$$

и, значит, для любого решения $z_0(t) \in W_0$ выполняется оценка (28), причем $P_0 = \omega_*$ и $\varepsilon = \left|\frac{\ln\left(1+\frac{l}{b^*}\right)}{\ln\lambda^{-1}}\right|$.

Докажем теперь, что для любого $z_0(t) \in W_0$ последовательность вектор-функций $z_m(t)$, $m = 0, 1, \ldots$, определенных формулами (26), равномерно сходится к некоторому непрерывному решению системы (24). Для этого, очевидно, достаточно показать, что при всех $m \ge 1$ выполняется оценка

$$|z_m(t) - z_{m-1}(t)| \le P^0\Delta^{m-1}t^{\nu+1-\varepsilon}, \tag{30}$$

где $P^0 = \text{const} > 0$, Δ — некоторая положительная постоянная $(1 > \Delta > b^* b_*^{-1} \lambda^{-1})$, удовлетворяющая при достаточно малых t_* и l условию

$$b_*^{-1} b^* \lambda^{-1} \lambda^{\varepsilon} + b_*^{-1} b^* \lambda^{-(2+\varepsilon)} (\nu + 2 - \varepsilon)^{-1} |A| t_* +$$
$$+ l b_*^{-1} [1 + (\nu + 2 - \varepsilon)^{-1} (b^* \lambda^{-(2-\varepsilon)} + 1) t_*] \leq \Delta$$

(существование Δ вытекает из того, что $\lambda^{\varepsilon} \to 1$ при $l \to 0$). Действительно, принимая во внимание (26), (28) и в), при $m = 1$ получаем

$$|z_1(t) - z_0(t)| \leq |B^{-1}A| \lambda^{-1} \int_0^t |z_0(\lambda^{-1}\tau)| d\tau + |B^{-1}| l \left[\lambda^{-1} \int_0^t |z_0(\lambda^{-1}\tau)| d\tau + \right.$$
$$\left. + \int_0^t |z_0(\tau)| d\tau \right] \leq |B^{-1}A| \lambda^{-1} \int_0^t P_0 (\lambda^{-1}\tau)^{\nu-\varepsilon} d\tau +$$
$$+ |B^{-1}| l \left[\lambda^{-1} \int_0^t P_0 (\lambda^{-1}\tau)^{\nu-\varepsilon} d\tau + \int_0^t P_0 \tau^{\nu-\varepsilon} d\tau \right] =$$
$$= |B^{-1}A| \lambda^{-1} b^* \lambda^{\varepsilon} \frac{P_0}{\nu + 1 - \varepsilon} t^{\nu+1-\varepsilon} + \frac{|B^{-1}| l P_0}{\nu + 1 - \varepsilon} (b^* \lambda^{-1+\varepsilon} + 1) t^{\nu+1-\varepsilon} \leq$$
$$\leq [b_*^{-1} b^* \lambda^{-1+\varepsilon} |A| + l b_*^{-1} (1 + b^* \lambda^{-1+\varepsilon})] P_0 (\nu + 1 - \varepsilon)^{-1} t^{\nu+1-\varepsilon}$$

и, таким образом, оценка (30) выполняется при $m = 1$, причем $P^0 = P_0(\nu + 1 - \varepsilon)^{-1} [b_*^{-1} b^* \lambda^{-1+\varepsilon} |A| + l b_*^{-1} (1 + b^* \lambda^{-1+\varepsilon})]$. Рассуждая по индукции, предположим, что оценка (30) доказана для некоторого $m \geq 1$, и покажем, что она не изменится при переходе к $m + 1$. В самом деле, используя (26), в) и (30), находим

$$|z_{m+1}(t) - z_m(t)| \leq |B^{-1}| |z_m(\lambda^{-1}t) - z_{m-1}(\lambda^{-1}t)| + |B^{-1}A| \lambda^{-1} \int_0^t |z_m(\lambda^{-1}\tau) -$$
$$- z_{m-1}(\lambda^{-1}\tau)| d\tau + |B^{-1}| l \left[\lambda^{-1} \int_0^t |z_m(\lambda^{-1}\tau) - z_{m-1}(\lambda^{-1}\tau)| d\tau + \right.$$
$$\left. + \int_0^t |z_m(\tau) - z_{m-1}(\tau)| d\tau + |z_m(t) - z_{m-1}(t)| \right] \leq |B^{-1}| P^0 \Delta^{m-1} (\lambda^{-1} t)^{\nu+1-\varepsilon} +$$
$$+ |B^{-1}A| \lambda^{-1} P^0 \Delta^{m-1} (\lambda^{-1})^{\nu+1-\varepsilon} \frac{1}{\nu + 2 - \varepsilon} t^{\nu+2-\varepsilon} +$$
$$+ P^0 \Delta^{m-1} |B^{-1}| l \left[(\lambda^{-1})^{\nu+2-\varepsilon} \frac{1}{\nu + 2 - \varepsilon} t^{\nu+2-\varepsilon} + \frac{1}{\nu + 2 - \varepsilon} t^{\nu+2-\varepsilon} + \right.$$
$$\left. + t^{\nu+1-\varepsilon} \right] = P^0 \Delta^{m-1} \left[b_*^{-1} b^* \lambda^{-(1-\varepsilon)} + b_*^{-1} b^* \lambda^{-(2+\varepsilon)} \frac{|A|}{\nu + 2 - \varepsilon} t + \right.$$
$$\left. + l b_*^{-1} \left(\frac{b^* \lambda^{-(2-\varepsilon)}}{\nu + 2 - \varepsilon} t + \frac{1}{\nu + 2 - \varepsilon} t + 1 \right) \right] t^{\nu+1-\varepsilon} \leq P^0 \Delta^m t^{\nu+1-\varepsilon}.$$

Следовательно, оценка (30) выполняется при всех $m \geq 1$ и $t \in [0, t_*]$.

Из (30) непосредственно вытекает, что для любого $z_0(t) \in W_0$ последовательность вектор-функций $z_m(t)$, $m = 0, 1, \ldots$, равномерно сходится при $t \in [0, t_*]$ к некоторой непрерывной вектор-функции $z(t)$. Переходя в (26) к пределу при $m \to \infty$, можно убедиться, что $z(t)$ является решением системы (24). Так как

$$|z(t)| \leq |z_0(t)| + |z_1(t) - z_0(t)| + \ldots,$$

то, принимая во внимание (28), (30), получаем

$$|z(t)| \leq P_0 t^{\nu-\varepsilon} + P^0 t^{\nu+1-\varepsilon} + P^0 \Delta t^{\nu+1-\varepsilon} + \ldots \leq P\, t^{\nu-\varepsilon},$$

где $P = P_0 + \dfrac{P^0}{1-\Delta}$, т. е. справедлива оценка (25).

Таким образом, мы показали, что система уравнений (24) имеет семейство W непрерывных при $t \in [0, t_*]$ решений $z(t) = z\left(t, \omega\left(\dfrac{\ln t}{\ln \lambda^{-1}}\right)\right)$, где $\omega(\tau) = (\omega_1(\tau), \ldots, \omega_n(\tau))$, $\omega_i\left(\dfrac{\ln t}{\ln \lambda^{-1}}\right)$, $i = 1, \ldots, n$, — произвольные непрерывные 1-периодические функции, удовлетворяющие условиям

$$\left|\omega_i\left(\frac{\ln t}{\ln \lambda^{-1}}\right)\right| \leq \omega_*, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Кроме того, если $z(t) \in W$, то выполняется оценка (25).

Непосредственной подстановкой в (13) можно убедиться, что для произвольного $z(t) \in W$ вектор-функция

$$\tilde{y}(t) = \int_0^t z(\tau)\, d\tau$$

является решением системы уравнений (13) и удовлетворяет условию

$$|\tilde{y}(t)| \leq P\, t^{\nu+1-\varepsilon}.$$

Отсюда следует (23). Теорема 3 доказана.

1. *Grimm L. J.* Existence and continuous dependence for a class of nonlinear neutral-differential equations // Proc. Amer. Math. Soc. – 1971. – **29**, №3. – P. 467 – 473.
2. *Kwapisz M.* On the existence and uniqueness of solutions of certain integral-functional equation // Ann. pol. math. – 1975. – **31**, №1. – P. 23 – 41.
3. *Kato T., NcLeod J. B.* The functional-differential equation $y'(x) = ay(\lambda x) + by(x)$ // Bull. Amer. Math. Soc. – 1971. – **77**. – P. 891 – 937.
4. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Мартынюк Д. И.* Системы эволюционных уравнений с периодическими и условно периодическими коэффициентами. – Киев: Наук. думка, 1985. – 216 с.
5. *Мокейчев В. С.* Дифференциальные уравнения с отклоняющимися аргументами. – Казань: Казан. ун-т, 1985. – 224 с.
6. *Беллман Р., Кук К. Л.* Дифференциально-разностные уравнения. – М.: Мир, 1967. – 548 с.
7. *Колмановский В. Б., Носов В. Р.* Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. – М.: Наука, 1981. – 448 с.
8. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1984. – 412 с.

Получено 17. 06. 93