УДК 517.9

Ю. В. Теплинский, д-р физ.-мат. наук (Каменец-Подол. пед. ин-т)

О ЗАВИСИМОСТИ ФУНКЦИИ ГРИНА Э-ДИХОТОМИЧНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С МАТРИЧНЫМ ПРОЕКТОРОМ В ПРОСТРАНСТВЕ $\mathfrak{M}$ ОТ ПАРАМЕТРОВ

In the space $\mathfrak{M}$ of bounded numeric sequences, we consider э-dichotomonly differential equation with a matrix projector. We prove that Green's function of this equation exists, and give the conditions, under which it is continuous and differentiable with respect to the parameters in the equation.

У просторі $\mathfrak{M}$ обмежених числових послідовностей розглянуто е-дихотомічне диференціальне рівняння з матричним проектором. Доведено існування функції Гріна цього рівняння, а також наведені умови неперервної залежності її від параметрів, що входять до вихідного рівняння, та диференційовності за цими параметрами.

В пространстве $\mathfrak{M}$ ограниченных числовых последовательностей $x = (x_1, x_2, \dots)$ с нормой $\|x\| = \sup\limits_i \{|x_i|\}$ рассмотрим систему уравнений

$$d\varphi / dt = a(\varphi, p), \quad dx / dt = P(\varphi, p)x, \tag{1}$$

где $x \in \mathfrak{M}$, $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m) \in R^m$, $a(\varphi, p) = \{a_1(\varphi, p), \dots, a_m(\varphi, p)\}$, $P(\varphi, p) = [p_{ij}(\varphi, p)]_{i,j=1}^{\infty}$ — бесконечная матрица, $p \in [p_1, p_2] \subset R^1$ — параметр.

Для конечномерной системы вида (1) свойства функции Грина изучены достаточно полно, ибо при периодических по φ_i, $i = \overline{1, m}$, $a(\varphi, p)$ и $P(\varphi, p)$ они лежат в основе теории линейных расширений динамических систем на торе [1, 2]. Некоторые свойства, связанные с зависимостью этой функции от параметров, мы распространим здесь на случай счетной системы дифференциальных уравнений, представленной в виде (1).

Множество вектор-функций и матриц, элементы которых непрерывны по φ, обозначим через $C^0(\varphi)$ и выделим в нем подмножество $C^0_{\mathrm{Lip}}(\varphi)$, элементы которого удовлетворяют условию Липшица по φ. Множество матриц $P(\varphi)$, для которых

$$\sup_i \sum_{j=1}^{\infty} \sup_{\varphi} |p_{ij}(\varphi)| < \infty,$$

обозначим через C_φ. Норму матрицы $P(\varphi)$, согласованную с векторной нормой пространства $\mathfrak{M}$, определим по формуле

$$\|P(\varphi)\| = \sup_i \sum_{j=1}^{\infty} |p_{ij}(\varphi)|.$$

Эта норма является одновременно и операторной нормой, если положить, что матрица P действует на $x \in \mathfrak{M}$ по правилу умножения матрицы на вектор и $\|P\| < \infty$, т. е. $Px \in \mathfrak{M}$.

Если $a(\varphi, p) \in C^0_{\mathrm{Lip}}(\varphi)$ при любом $p \in [p_1, p_2] = R_p$, то первое из уравнений (1) имеет единственное решение $\varphi = \varphi_t^p(\varphi)$, такое, что $\varphi_0^p(\varphi) = \varphi$, где φ — произвольный элемент из R^m. Подставив это решение во второе из уравнений (1), получим

$$dx / dt = P(\varphi_t^p(\varphi), p)x. \tag{2}$$

Если $P(\varphi, p) \in C^0(\varphi) \cap C_\varphi$ при любом $p \in R_p$, то уравнение (2) имеет единственное решение $x = x(t, \varphi, p, t_0, x_0)$, удовлетворяющее условию $x(t_0, \varphi, p, t_0, x_0) = x_0$, где $x_0 \in \mathfrak{M}$, $t_0 \in R^1$, определенное при всех $t \in R^1$ [3]. Тогда существует матрицант $\Omega_\tau^t(\varphi, p)$ уравнения (2), зависящий от φ, p как от параметров. Положим $\Omega_\tau^\tau(\varphi, p) = E$, где E — единичная матрица.

Пусть $C(\varphi, p)$ — некоторая бесконечная матрица, принадлежащая при $p \in R_p$ множеству $C^0(\varphi) \cap C_\varphi$. Функцию

$$G_0(\tau, \varphi, p) = \begin{cases} \Omega_\tau^0(\varphi, p)\, C(\varphi_\tau^p(\varphi), p) & \text{при } \tau \le 0, \\ \Omega_\tau^0(\varphi, p)\left[C(\varphi_\tau^p(\varphi), p) - E\right] & \text{при } \tau > 0, \end{cases} \tag{3}$$

такую, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \| G_0(\tau, \varphi, p) \| \, d\tau \le K = \text{const} < \infty, \quad p \in R_p,$$

равномерно по φ, назовем функцией Грина системы уравнений (1).

Предположим теперь, что для каждой пары $(\varphi, p) \in R^m \times R_p$ пространство $\mathfrak{M}$ разлагается в прямую сумму подпространств $E_1(\varphi, p)$ и $E_2(\varphi, p)$ так, что решение $x = x_t(\varphi, p, x_0) = \Omega_0^t(\varphi, p) x_0$ уравнения (2), принимающее при $t = 0$ значение $x_0 \in E_1(\varphi, p)$, удовлетворяет оценке

$$\| x_t(\varphi, p, x_0) \| \le K \exp\{-\gamma(t - \tau)\} \| x_\tau(\varphi, p, x_0) \|, \quad t \ge \tau; \quad t, \tau \in R^1,$$

а принимающие значение $x_0 \in E_2(\varphi, p)$, — оценке

$$\| x_t(\varphi, p, x_0) \| \le K \exp\{\gamma(t - \tau)\} \| x_\tau(\varphi, p, x_0) \|, \quad t \le \tau; \quad t, \tau \in R^1,$$

где K и γ — положительные постоянные, не зависящие от $(\varphi, p) \in R^m \times R_p$.

В таком случае уравнение (2) будем называть экспоненциально дихотомичным на всей оси R^1 или э-дихотомичным.

Если существует бесконечная матрица $C_1(\varphi, p) \in C_\varphi$, проектирующая пространство $\mathfrak{M}$ на $E_1(\varphi, p)$ при всех $(\varphi, p) \in R^m \times R_p$, то э-дихотомичное уравнение (2) назовем э-дихотомичным с матричным проектором.

Отметим, что если матрицант $\Omega_\tau^t(\varphi, p)$ удовлетворяет условию

$$\| \Omega_0^t(\varphi, p) \| \le K \exp\{-\gamma t\}, \quad t \ge 0,$$

где положительные постоянные K, γ не зависят от $(\varphi, p) \in R^m \times R_p$, то уравнение (2) становится э-дихотомичным с матричным проектором.

Теорема 1. *Предположим, что при всех $(\varphi, p) \in R^m \times R_p$ $a(\varphi, p) \in C^0_{\text{Lip}}(\varphi)$, $P(\varphi, p) \in C^0_{\text{Lip}}(\varphi) \cap C_\varphi$, и уравнение* (2) *является э-дихотомичным с матричным проектором. Тогда существует функция Грина $G_0(\tau, \varphi, p)$ системы уравнений* (1), *удовлетворяющая оценке*

$$\| G_0(\tau, \varphi, p) \| \le K \exp\{-\gamma |\tau|\}, \quad \tau \in R^1,$$

где K и γ — положительные постоянные, не зависящие от φ, p.

Доказательство. По аналогии с [1] сконструируем матрицу

$$\tilde{G}_t(\tau, \varphi, p) = \begin{cases} \Omega_0^t(\varphi, p)\, C_1(\varphi, p)\, \Omega_\tau^0(\varphi, p) & \text{при } t \ge \tau; \\ -\Omega_0^t(\varphi, p)\left[E - C_1(\varphi, p)\right] \Omega_\tau^0(\varphi, p) & \text{при } t < \tau, \end{cases}$$

для которой справедлива оценка [4]

$$\| \tilde{G}_t(\tau, \varphi, p) \| \leq K \exp\{-\gamma |t-\tau|\}, \quad t, \tau \in R^1, \tag{4}$$

где K и γ — положительные постоянные.

Определим функцию $G_0(\tau, \varphi, p) = \tilde{G}_t\left(0, \varphi_\tau^p(\varphi), p\right)\Big|_{t=-\tau}$. Она имеет вид (3), где $C(\varphi, p) = C_1(\varphi, p)$ и удовлетворяет оценке (4). Остается показать, что матрица $C_1(\varphi, p)$ непрерывна по φ.

Для этого рассмотрим функцию

$$Z_t(\varphi, \overline{\varphi}) = \begin{cases} \Omega_0^t(\varphi, p) C_1(\varphi, p) - \Omega_0^t(\overline{\varphi}, p) C_1(\overline{\varphi}, p) & \text{при } t \geq 0; \\ -\Omega_0^t(\varphi, p) C_2(\varphi, p) + \Omega_0^t(\overline{\varphi}, p) C_2(\overline{\varphi}, p) & \text{при } t < 0, \end{cases}$$

где $C_2(\varphi) = E - C_1(\varphi, p)$. Очевидно, что $Z_0(\varphi, \overline{\varphi}) = C_1(\varphi, p) - C_1(\overline{\varphi}, p)$, причем $\| Z_t(\varphi, \overline{\varphi}) \| \leq 2K \exp\{-\gamma |t|\}$, $t \in R^1$.

Нетрудно проверить, что $Z_t(\varphi, \overline{\varphi})$ является ограниченным решением уравнения

$$dZ/dt = P(\varphi_t^p(\varphi), p) Z + [P(\varphi_t^p(\varphi), p) - P(\varphi_t^p(\overline{\varphi}), p)] \tilde{G}_t(0, \overline{\varphi}, p).$$

Поскольку уравнение (2) э-дихотомично, то

$$C_1(\varphi, p) - C_1(\overline{\varphi}, p) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}_0(\tau, \varphi, p) [P(\varphi_\tau^p(\varphi), p) - $$

$$- P(\varphi_\tau^p(\overline{\varphi}), p)] \tilde{G}_\tau(0, \overline{\varphi}, p) \, d\tau.$$

Положим $\| a(\varphi, p) - a(\overline{\varphi}, p) \| \leq \alpha \| \varphi - \overline{\varphi} \|$, $\| P(\varphi, p) - P(\overline{\varphi}, p) \| \leq \beta \| \varphi - \overline{\varphi} \|$, где α и β — положительные постоянные, а постоянную $\nu > 0$ выберем из условия

$$2\gamma - \frac{\alpha}{\nu + 1} > 0.$$

Тогда выполняется неравенство

$$\| P(\varphi_\tau^p(\varphi), p) - P(\varphi_\tau^p(\overline{\varphi}), p) \| \leq (2p^0)^{\nu/(\nu+1)} (\beta \| \varphi - \overline{\varphi} \|)^{1/(\nu+1)} \exp\left\{ \frac{\alpha |\tau|}{\nu + 1} \right\},$$

где $\tau \in R^1$, $\| P(\varphi, p) \| \leq p^0$. Отсюда следует оценка

$$\| C_1(\varphi, p) - C_1(\overline{\varphi}, p) \| \leq K^2 (2p^0)^{\nu/(\nu+1)} (\beta \| \varphi - \overline{\varphi} \|)^{1/(\nu+1)} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{ -2\gamma |\tau| + \right.$$

$$\left. + \frac{\alpha |\tau|}{\nu + 1} \right\} d\tau \leq \frac{2K^2}{2\gamma - \dfrac{\alpha}{\nu + 1}} (2p^0)^{\nu/(\nu+1)} \beta^{1/(\nu+1)} \| \varphi - \overline{\varphi} \|^{1/(\nu+1)},$$

завершающая доказательство теоремы.

Обозначим через $\omega(z)$ непрерывную неубывающую на отрезке $[0, p_2 - p_1]$ скалярную функцию, принимающую при $z = 0$ значение $\omega(0) = 0$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1, *причем*

$$\| a(\varphi, p) - a(\overline{\varphi}, \overline{p}) \| \leq \alpha_1 \| \varphi - \overline{\varphi} \| + \alpha_2 \omega(|p - \overline{p}|),$$

$$\| P(\varphi, p) - P(\overline{\varphi}, \overline{p}) \| \leq \beta_1 \| \varphi - \overline{\varphi} \| + \beta_2 \omega(|p - \overline{p}|)$$

при любых φ, $\overline{\varphi} \in R^m$; $p, \overline{p} \in R_p$, где α_1, α_2, β_1, β_2 — *положительные постоянные. Тогда функция Грина* $G_0(\tau, \varphi, p)$ *системы* (1) *непрерывна по совокупности переменых* φ, p.

Доказательство. Обозначим $G_t(\tau, \varphi, p) - G_t(\tau, \overline{\varphi}, \overline{p}) = L(t)$. Дифференцируя ее по t при $t \neq \tau$, убеждаемся, что $L(t)$ является матричным решением уравнения

$$dL/dt = P(\varphi_t^p(\varphi), p)L + F(t, \varphi), \tag{5}$$

в котором $F(t, \varphi) = \{ P(\varphi_t^p(\varphi), p) - P(\varphi_t^{\overline{p}}(\overline{\varphi}), \overline{p}) \} G_t(\tau, \overline{\varphi}, \overline{p})$.

Учитывая, что $\| F(t, \varphi) \| \le 2K p^0$, а также то, что выражение $\int_{-\infty}^{\infty} G_t(s, \varphi, p) F(s, \varphi)\, ds$ является ограниченным решением уравнения (5), получаем тождество

$$L(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_t(s, \varphi, p)[P(\varphi_s^p(\varphi), p) - P(\varphi_s^{\overline{p}}(\overline{\varphi}), \overline{p})] G_s(\tau, \overline{\varphi}, \overline{p})\, ds,$$

из которого следует оценка

$$\| L(0) \| \le \int\limits_{-\infty}^{\infty} K^2 \exp\{-\gamma|s| - \gamma|s-\tau|\} (\beta_1 \| \varphi_s^p(\varphi) - \varphi_s^{\overline{p}}(\overline{\varphi}) \| + \\ + \beta_2 \omega(|p - \overline{p}|))\, ds. \tag{6}$$

Поскольку

$$\| \varphi_t^p(\varphi) - \varphi_t^{\overline{p}}(\overline{\varphi}) \| \le (\| \varphi - \overline{\varphi} \| + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \omega(|p - \overline{p}|)) \exp\{\alpha_1 |t|\}, \quad t \in R^1,$$

то из (6) следует неравенство

$$\| G_0(\tau, \varphi, p) - G_0(\tau, \overline{\varphi}, \overline{p}) \| \le \frac{2K^2 \beta_1}{\gamma} (\| \varphi - \overline{\varphi} \| + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \omega(|p - \overline{p}|)) + \\ + \frac{2K^2 \beta_2}{\gamma} \omega(|p - \overline{p}|), \quad \gamma > \alpha_1, \tag{7}$$

доказывающее теорему при $\gamma > \alpha_1$. Покажем, что последнее условие можно опустить. Выберем положительную постоянную ν из решений неравенства $\gamma > \alpha_1 : (\nu + 1)$. Легко видеть, что выполняется соотношение

$$\| P(\varphi_t^p(\varphi), p) - P(\varphi_t^{\overline{p}}(\overline{\varphi}), \overline{p}) \| \le (2p^0)^{\nu/(\nu+1)} (\beta_1 \| \varphi - \overline{\varphi} \| + \\ + \frac{\beta_1\alpha_2 + \beta_2\alpha_1}{\alpha_1} \omega(|p - \overline{p}|) \Big)^{1/(\nu+1)} \exp\{\frac{\alpha_1}{\nu+1} |t|\}, \quad t \in R^1. \tag{8}$$

Учитывая (8), оценку (7) можно записать в виде

$$\| G_0(\tau, \varphi, p) - G_0(\tau, \overline{\varphi}, \overline{p}) \| \le (2p^0)^{\nu/(\nu+1)} (\beta_1 \| \varphi - \overline{\varphi} \| + \\ + \frac{\beta_1\alpha_2 + \beta_2\alpha_1}{\alpha_1} \omega(|p - \overline{p}|) \Big)^{1/(\nu+1)} K^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\{-\gamma|s-\tau| + (\frac{\alpha_1}{\nu+1} - \gamma)|s|)\}\, ds.$$

Поскольку

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\{-\gamma|s-\tau| + (\frac{\alpha_1}{\nu+1} - \gamma)|s|)\}\, ds \le \frac{2}{\gamma - \frac{\alpha_1}{\nu+1}},$$

то теорема доказана.

Приведем теперь условия, достаточные для дифференцируемости функции Грина по параметру. Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть выполняются условия теоремы* 1, *причем* $a(\varphi, p)$, $P(\varphi, p)$ *непрерывно дифференцируемы по* p, φ_i, $i=\overline{1,m}$, *и*

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left\{\sup_{\varphi,p}\left|\frac{\partial p_{sj}(\varphi,p)}{\partial\varphi_i}\right|+\sup_{\varphi,p}\left|\frac{\partial p_{sj}(\varphi,p)}{\partial p}\right|\right\}\le p_s;\quad \sum_{s=1}^{\infty}p_s<\infty,\quad i=\overline{1,m}.$$

Тогда функция Грина $G_0(\tau,\varphi,p)$ *уравнения* (1) *дифференцируема по параметрам* p, φ_i, $i=\overline{1,m}$, *если только* $\gamma>\alpha$, *а* α *выбирается из условия*

$$\left|\left\langle\frac{\partial a(\varphi,p)}{\partial\varphi}\eta,\eta\right\rangle\right|\le\alpha|\eta|^2, \tag{9}$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — *евклидово произведение*, $|\eta|=|(\eta_1,\ldots,\eta_m)|=\left(\sum_{i=1}^{m}\eta_i^2\right)^{1/2}$.

Доказательство проведем только для параметра p, так как для параметра φ_i, $i=\overline{1,m}$, оно аналогично. Разделим тождество

$$G_0(\tau,\varphi,p)-G_0(\tau,\varphi,\bar p)=\int_{-\infty}^{\infty}G_0(s,\varphi,p)(P(\varphi_s^p(\varphi),p)-$$
$$-P(\varphi_s^{\bar p}(\varphi),\bar p))G_s(\tau,\varphi,\bar p)\,ds$$

на $p-\bar p$ и перейдем к пределу при $\bar p\to p$. Покажем, что покоординатно

$$\lim_{\bar p\to p}\left(G_0(s,\varphi,p)\frac{P(\varphi_s^p(\varphi),p)-P(\varphi_s^{\bar p}(\varphi),\bar p)}{p-\bar p}G_s(\tau,\varphi,\bar p)\right)=$$
$$=G_0(s,\varphi,p)\frac{\partial P(\varphi_s^p(\varphi),p)}{\partial p}G_s(\tau,\varphi,p). \tag{10}$$

Обозначим $G_0(s,\varphi,p)=[g_{0ik}(s,\varphi,p)]_{i,k=1}^{\infty}$, $G_s(\tau,\varphi,p)=[g_{ik}(s,\tau,\varphi,p)]_{i,k=1}^{\infty}$. Элемент матрицы, стоящей в (10) под знаком предела, находящийся в r-м столбце и l-й строке, имеет вид

$$W=\sum_{k=1}^{\infty}g_{0lk}(s,\varphi,p)\sum_{i=1}^{\infty}\frac{p_{ki}(\varphi_s^p(\varphi),p)-p_{ki}(\varphi_s^{\bar p}(\varphi),\bar p)}{p-\bar p}g_{ir}(s,\tau,\varphi,\bar p). \tag{11}$$

Справедливо неравенство

$$S=\sum_{i=1}^{\infty}g_{0lk}(s,\varphi,p)\frac{p_{ki}(\varphi_s^p(\varphi),p)-p_{ki}(\varphi_s^{\bar p}(\varphi),\bar p)}{p-\bar p}g_{ir}(s,\tau,\varphi,\bar p)\le$$
$$\le\sum_{i=1}^{\infty}K^2\exp\{-\gamma|s|-\gamma|s-\tau|\}\left|\frac{\partial p_{ki}(\varphi_s^p(\varphi),p)}{\partial p}\right|_{p=p_{ki}},$$

где $p_{ki}\in(p,\bar p)$. Учитывая оценку

$$\left\|\frac{\partial\varphi_{js}^p(\varphi)}{\partial p}\right\|\le K_1\exp\{\alpha|s|\},\quad K_1=\text{const}>0,$$

полученную в [2] при условии (9), и представление

$$\left|\frac{\partial p_{ki}(\varphi_s^p(\varphi),p)}{\partial p}\right|=\left|\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial p_{ki}(\varphi_s^p(\varphi),p)}{\partial\varphi_{js}^p(\varphi)}\frac{\partial\varphi_{js}^p(\varphi)}{\partial p}+\frac{\partial p_{ki}(\varphi_s^p(\varphi),p)}{\partial p}\right|,$$

получаем

$$|S|\le K^2\exp\{-\gamma|s|-\gamma|s-\tau|\}\sum_{i=1}^{\infty}\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\left|\frac{\partial p_{ki}(\varphi,p)}{\partial\varphi_j}\right|\left|\frac{\partial\varphi_{js}^p(\varphi)}{\partial p}\right|+\right.$$

$$+\left|\frac{\partial p_{ki}(\varphi,p)}{\partial p}\right|\Bigg\}_{p=p_{ki}} \le mK^2K_1\exp\{-(\gamma-\alpha)|s-\tau|-\gamma|s|\}\sum_{i=1}^{\infty}\sup_{\varphi,p}\left|\frac{\partial p_{ki}(\varphi,p)}{\partial\varphi_j}\right|+$$

$$+\ K^2\exp\{-\gamma|s|-\gamma|s-\tau|\}\sum_{i=1}^{\infty}\sup_{\varphi,p}\left|\frac{\partial p_{ki}(\varphi,p)}{\partial p}\right| \le p_kK^2(K_1m+1),$$

причем ряд в правой части выражения для S сходится равномерно относительно параметра p. Тогда

$$|W| \le \sum_{k=1}^{\infty}|S| \le K^2(K_1m+1)\sum_{k=1}^{\infty}p_k < \infty,$$

а значит, в (11) можно переходить к пределу при $\overline{p}\to p$ почленно, что доказывает справедливость равенства (10).

В таком случае

$$\lim_{\overline{p}\to p}\frac{G_0(\tau,\varphi,p)-G_0(\tau,\varphi,\overline{p})}{p-\overline{p}} = \int_{-\infty}^{\infty}G_0(s,\varphi,p)\frac{\partial P(\varphi_s^p(\varphi),p)}{\partial p}G_s(\tau,\varphi,p)\,ds, \quad (12)$$

если интеграл справа равномерно сходится. Но

$$\left\|G_0(s,\varphi,p)\frac{\partial P(\varphi_s^p(\varphi),p)}{\partial p}G_s(\tau,\varphi,p)\right\| \le \sup_j\{p_j\}(mK_1\exp\{\alpha|s|\}+$$

$$+1)K^2\exp\{-\gamma|s|-\gamma|s-\tau|\} \le \hat{K}\exp\{-\gamma|s-\tau|-(\gamma-\alpha)|s|\},\quad j=1,2,\ldots,\quad (13)$$

где $\hat{K}=\sup_j\{p_j\}K^2(mK_1+1)$. Ясно, что $\sup_j\{p_j\}<\infty$.

Оценка (13) гарантирует равномерную сходимость интеграла в правой части соотношения (12). Таким образом, покоординатно

$$\frac{\partial}{\partial p}G_0(\tau,\varphi,p) = \lim_{\overline{p}\to p}\frac{G_0(\tau,\varphi,p)-G_0(\tau,\varphi,\overline{p})}{p-\overline{p}},$$

причем

$$\left\|\frac{\partial}{\partial p}G_0(\tau,\varphi,p)\right\| \le \hat{\hat{K}}\exp\{-(\gamma-\alpha)|\tau|\},\quad \tau\in R^1,$$

где $\hat{\hat{K}} = \hat{K}\dfrac{2\gamma+\alpha}{\alpha(2\gamma-\alpha)} = \text{const} > 0.$

Отметим, что приведенные в данной статье результаты можно использовать для изучения свойств инвариантного тора системы уравнений

$$d\varphi/dt = a(\varphi,p),\quad dx/dt = P(\varphi,p)x + c(\varphi,p)$$

без применения метода укорочения, т.е. без редукции задачи к конечномерному случаю, а теоремы 1 и 2 нетрудно сформулировать для системы вида (1), в которой $\varphi\in\mathfrak{M}$.

1. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. – М.: Наука, 1987. – 304 с.
2. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л.* Исследования дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова. – Киев: Наук. думка, 1990. – 270 с.
3. *Персидский К. П.* Бесконечные системы дифференциальных уравнений. Дифференциальные уравнения в нелинейных пространствах. – Алма-Ата: Наука, 1976. – 247 с.
4. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1970. – 536 с.

Получено 31.03.92