УДК 519.21

Ю. Б. Коваль, асп. (Київ. ун-т)

ГРАНИЧНИЙ ПРОЦЕС ДЛЯ ФУНКЦІОНАЛІВ ІНТЕГРАЛЬНОГО ТИПУ ВІД ВІНЕРІВСЬКОГО ПРОЦЕСУ НА ЦИЛІНДРІ

We prove that the integral functionals with an integrand, which is a bounded function of a Wiener process on a cylinder, converge weakly to the process $w_1(\tau(t))$, $\tau(t) = \beta_1 t + (\beta_2 - \beta_1) \operatorname{mes}\{s : w_2(s) \geq 0, \ s < t\}$, where $w_1(t)$, $w_2(t)$ are independent one-dimensional Wiener processes β_1, β_2 are nonrandom values, and $\beta_2 \geq \beta_1 \geq 0$.

Доводиться слабка збіжність інтегральних функціоналів з обмеженою підінтегральною функцією від вінерівського процесу на циліндрі до процесу $w_1(\tau(t))$, $\tau(t) = \beta_1 t + (\beta_2 - \beta_1) \times \operatorname{mes}\{s : w_2(s) \geq 0, \ s < t\}$, де $w_1(t)$, $w_2(t)$ — незалежні одновимірні вінерівські процеси; β_1, β_2 — невипадкові величини, $\beta_2 \geq \beta_1 \geq 0$.

В даній статті розглядаються адитивні функціонали від двовимірного вінерівського процесу. В роботі [1] знайдено граничні процеси для інтегральних функціоналів з обмеженою і інтегровною на $\mathbb{R}^2$ підінтегральною функцією за допомогою методу косого добутку. Ми розглядаємо періодичні по одній змінній функції, тому застосуємо метод розкладу в ряд Фур'є.

Нехай $f(x_1, x_2)$ — обмежена періодична по x_2 з періодом 2π функція. Позначимо

$$a_n(x_1) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x_1, x_2) \cos(n x_2)\, dx_2,$$

$$b_n(x_1) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x_1, x_2) \sin(n x_2)\, dx_2,$$

$$K_n = \sup_{\mathbb{R}} |a_n(x)|, \quad L_n = \sup_{\mathbb{R}} |b_n(x)|, \quad n \geq 1.$$

$$\lambda(f) = \sum\nolimits_{n \geq 1} (K_n + L_n) \leq +\infty.$$

Теорема 1. *Нехай $f(x_1, x_2)$ — обмежена періодична по x_2 з періодом 2π функція така, що $\lambda(f) < \infty$ і $\int_{-\pi}^{\pi} f(x_1, x_2)\, dx_2 = 0$. Якщо*

$$\xi_T(t) = \frac{1}{T} \int_0^{tT} f(w_1(s), w_2(s))\, ds,$$

де $w_1(t)$, $w_2(t)$ — незалежні одновимірні вінерівські процеси, то для будь-якого $N > 0$ $\sup_{0 \leq t \leq N} |\xi_T(t)|$ збігається за ймовірністю до нуля, коли $T \to \infty$.

Доведення. Для $n \geq 1$ розглянемо функції

$$A_n(x) = -\frac{1}{2n} \left(e^{nx} \int_{-\infty}^{-x} e^{ns} a_n(-s)\, ds + e^{-nx} \int_{-\infty}^{x} e^{ns} a_n(s)\, ds \right),$$

$$B_n(x) = -\frac{1}{2n} \left(e^{nx} \int_{-\infty}^{-x} e^{ns} b_n(-s)\, ds + e^{-nx} \int_{-\infty}^{x} e^{ns} b_n(s)\, ds \right).$$

Неважко переконатися, що

$$|A_n(x)| \le \frac{K_n}{n^2}, \quad |B_n(x)| \le \frac{L_n}{n^2}, \quad |A_n'(x)| \le \frac{K_n}{n}, \quad |B_n'(x)| \le \frac{L_n}{n}, \tag{1}$$

$$A_n''(x) - n^2 A_n(x) = a_n(x), \quad B_n''(x) - n^2 B_n(x) = b_n(x),$$

$$|A_n''(x)| \le 2K_n, \quad |B_n''(x)| \le 2L_n.$$

Розглянемо функцію

$$G(x_1, x_2) = \sum_{n \ge 1} \left(A_n(x_1) \cos(nx_2) + B_n(x_1) \sin(nx_2) \right). \tag{2}$$

Вона має похідні до другого порядку включно і

$$|G(x_1, x_2)| \le \lambda(f), \quad |G_1(x_1, x_2)| \le \lambda(f), \quad |G_2(x_1, x_2)| \le \lambda(f),$$

де

$$G_1(x_1, x_2) = \frac{\partial}{\partial x_1} G(x_1, x_2), \quad G_2(x_1, x_2) = \frac{\partial}{\partial x_2} G(x_1, x_2),$$

$$\Delta G(x_1, x_2) = \sum_{n \ge 1} \left(a_n(x_1) \cos(nx_2) + b_n(x_1) \sin(nx_2) \right) = f(x_1, x_2).$$

Тепер, враховуючи невиродженість вінерівських процесів, застосовуємо до $G(w_1(Tt), w_2(Tt))$ узагальнену формулу Іто (див.[2]):

$$|\xi_T(t)| \le \left| \frac{2G(w_1(Tt), w_2(Tt))}{T} \right| + \frac{2}{T} \left| \int_0^{tT} G_1(w_1(s), w_2(s)) dw_1(s) \right| +$$

$$+ \frac{2}{T} \left| \int_0^{tT} G_2(w_1(s), w_2(s)) dw_2(s) \right|.$$

Якщо $T \to \infty$, перший доданок збігається до нуля рівномірно по t. Розглянемо другий доданок:

$$P \left\{ \sup_{0 \le t \le N} \left| \int_0^{tT} G_1(w_1(s), w_2(s)) dw_1(s) \right| < T\varepsilon \right\} \le \frac{\lambda^2(f) N}{T\varepsilon^2} \to 0,$$

коли $T \to \infty$. Те ж маємо і для третього доданку, що й доводить твердження теореми.

Перш ніж перейти до основної теореми, розглянемо функцію

$$F(x) = \sum_{n \ge 1} \left(e^{2nx} \left(\int_{-\infty}^{-x} e^{ns} a_n(-s) ds \right)^2 + e^{-2nx} \left(\int_{-\infty}^{-x} e^{ns} a_n(s) ds \right)^2 + \right.$$

$$\left. + e^{2nx} \left(\int_{-\infty}^{-x} e^{ns} b_n(-s) ds \right)^2 + e^{-2nx} \left(\int_{-\infty}^{-x} e^{ns} b_n(s) ds \right)^2 \right). \tag{3}$$

Зауважимо, що $0 \le F(x) \le 2\lambda^2(f)$. Тому, якщо $\lambda(f) < \infty$, існують границі $\frac{1}{x} \int_0^x F(s)\, ds$, коли $x \to \pm\infty$.

Теорема 2. *Нехай* $f(x_1, x_2)$ — *обмежена періодична по* x_2 *з періодом* 2π *функція така, що* $\lambda(f) < \infty$ *і* $\int_{-\pi}^{\pi} f(x_1, x_2)dx_2 = 0$. *Крім того, для* $F(x)$ *з* (3)

$$\frac{1}{x}\int_0^x F(s)ds \to \begin{cases}\beta_1, & x \to +\infty;\\ \beta_2, & x \to -\infty.\end{cases}$$

Тоді процес

$$\xi_T(t) = \frac{1}{\sqrt{T}}\int_0^{tT} f(w_1(s), w_2(s))\,ds,$$

де $w_1(t)$, $w_2(t)$ — *незалежні одновимірні вінерівські процеси, слабко збігається при* $T \to \infty$ *до* $\zeta\left(\int_0^t \theta(w(s))ds\right)^{1/2}$, *де* ζ — *випадкова величина з розподілом* N (0, 1), $w(t)$ — *незалежний від неї одновимірний вінерівський процес, а* $\theta(x) = \begin{cases}\beta_1, & x > 0;\\ \beta_2, & x < 0.\end{cases}$

Зауваження. Якщо $\beta_1 = \beta_2 = \beta$, то граничний процес $\xi(t)$ співпадає за розподілом з $\sqrt{\beta}\,w(t)$. У випадку $\beta_1 \neq \beta_2$, враховуючи незалежність ζ і $w(t)$ та користуючись законом арксинуса, неважко знайти явний вигляд функції розподілу граничного процесу.

Доведення. Розглянемо функцію $G(x_1, x_2)$ з (2). Застосувавши формулу Іто, одержимо

$$\xi_T(t) = \frac{2G\big(w_1(Tt), w_2(Tt)\big)}{\sqrt{T}} - \frac{2}{\sqrt{T}}\int_0^{tT} G_1\big(w_1(s), w_2(s)\big)dw_1(s) -$$

$$- \frac{2}{\sqrt{T}}\int_0^{tT} G_2\big(w_1(s), w_2(s)\big)dw_2(s). \tag{4}$$

Коли $T \to \infty$, перший член у правій частині рівності (4) збігається до нуля рівномірно по t. Позначимо суму другого і третього членів $\eta_T(t)$. Тоді

$$\langle\eta_T\rangle_t = \frac{4}{T}\int_0^{tT} \Big(G_1^2(w_1(s), w_2(s)) + G_2^2(w_1(s), w_2(s))\Big) -$$

$$- \frac{1}{4}F(w_1(s))\,ds + \frac{1}{T}\int_0^{tT} F(w_1(s))\,ds. \tag{5}$$

Зауваживши, що $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\big(G_1^2(x_1, x_2) + G_2^2(x_1, x_2)\big)dx_2 = \frac{1}{4}F(x_1)$ і $\lambda\left(G_1^2 + G_2^2\right) \le$ $\le 2\lambda^2(f) < \infty$ є наслідком нерівностей (1), з теореми 1 маємо, що перший доданок у правій частині рівності (5) збігається за ймовірністю до нуля рівномірно по t на кожному скінченному інтервалі. З доведення теореми 1 в [3] випливає, що другий доданок збігається за розподілом до $\int_0^t \theta w(s)\,ds$, де $w(t)$ — вінерівський процес. Зауважимо, що при $\beta_1 = \beta_2 = 0$ тепер неважко довести, що $\xi_T(t)$ збігається за розподілом до нуля. Тому далі $\beta_1 + \beta_2 > 0$.

Розглянемо сім'ю чотиривимірних процесів

$$Z_T(t) = \left(\eta_T(t), \langle\eta_T\rangle, \frac{w_1(Tt)}{\sqrt{T}}, \frac{w_2(Tt)}{\sqrt{T}}\right).$$

Щоб показати, що вона щільна, достатньо довести щільність сім'ї процесів $\eta_T(t)$. Враховуючи обмеженість G_1 і G_2, маємо

$$M(\eta_T(t)-\eta_T(s))^4 \le C_1(t-s)^2,$$

що й доводить це.

Доведемо єдиність граничного розподілу. Нехай для деякої підпослідовності $Z_{T_i} \to Z = (Z_1(t), Z_2(t), Z_3(t), Z_4(t))$. Тоді

$$\langle Z_1\rangle_t = Z_2(t), \quad \langle Z_3\rangle_t = t, \quad \langle Z_4\rangle_t = t, \quad \langle Z_3, Z_4\rangle_t = 0.$$

Крім того, враховуючи, що $\int_{-\pi}^{\pi} G_1(x_1, x_2)\, dx_2 = \int_{-\pi}^{\pi} G_2(x_1, x_2)\, dx_2 = 0$ і $\lambda(G_2) \le \lambda(f) < \infty$, $\lambda(G_1) \le \lambda(f) < \infty$ є наслідком нерівностей (1), та застосовуючи теорему 1, маємо

$$\left\langle\eta_T, \frac{w_1(T\,\cdot)}{\sqrt{T}}\right\rangle_t = -\frac{2}{T}\int_0^{tT} G_1(w_1(s), w_2(s))\, ds \to 0,$$

$$\left\langle\eta_T, \frac{w_2(T\,\cdot)}{\sqrt{T}}\right\rangle_t = -\frac{2}{T}\int_0^{tT} G_2(w_1(s), w_2(s))\, ds \to 0, \quad \text{коли} \quad T \to \infty.$$

І тому $\langle Z_1, Z_3\rangle_t = \langle Z_1, Z_4\rangle_t = 0$.

Зауваживши, що з імовірністю 1 $\lim\limits_{t\to\infty}\int_0^t \theta(w(s))\, ds = \infty$, існують такі незалежні вінерівські процеси $w_1^*(t)$ та $w_2^*(t)$, що граничний процес $\xi(t) = Z_1(t)$ співпадає за розподілом з $w_1^*\left(\int_0^t \theta(w_2^*(s))ds\right)$. Таким чином, ми одержали розподіл граничного процесу сім'ї $\xi_T(t)$. Враховуючи диференційовність G та обмеженість G_1 і G_2, маємо

$$M(\xi_T(t)-\xi_T(s))^4 \le C_2(t-s)^2,$$

що й дає слабку компактність сім'ї $\xi_T(t)$. Це остаточно доводить твердження теореми.

1. *Kasahara Y., Kotani Sh.* On limit processes for a class of additive functionals of recurent diffusion processes // Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb. – 1979. – **49**. – S. 133 – 153.
2. *Крылов Н. В.* Управляемые процессы диффузионного типа. – М.: Наука, 1977. – 399 с.
3. *Кулинич Г. Л.* Об асимптотическом поведении распределений функционалов вида $\int_0^t g(\xi(s))ds$ от диффузионных процессов // Теория вероятностей и мат. статистика. – 1973. – Вып. 8. – С. 99 – 105.

Одержано 29.12.92