УДК 517.43

М. Н. Феллер, д-р физ.-мат. наук (УкрНПДО, Киев)

НЕОБХОДИМОЕ И ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ГАРМОНИЧНОСТИ ФУНКЦИЙ БЕСКОНЕЧНОГО ЧИСЛА ПЕРЕМЕННЫХ (ЯКОБИЕВЫЙ СЛУЧАЙ)

The criterion for the harmonicity of functions in a Hilbert space is given in the case of weakened mutual dependence of the second derivatives.

Наведено критерій гармонічності функцій на гільбертовому просторі у випадку, коли взаємна залежність других похідних послаблюється.

Лапласиан для функций на гильбертовом пространстве был введен П. Леви [1]. Вероятностная трактовка бесконечномерного лапласиана позволила получить [2 – 4] условия гармоничности функций на гильбертовом пространстве. Эти достаточные условия, будучи в некотором смысле оптимальными, тем не менее не являются необходимыми. В настоящей статье получено необходимое и достаточное условие гармоничности функций на гильбертовом пространстве в случае функций, у которых матрица Грамма последовательности отклонений вторых производных от их средних значений является обобщенной матрицей Якоби и у которых матрица Грамма этой же, но нормированной, последовательности порождает обратимый оператор в гильбертовом координатном пространстве.

1. Пусть H — счетномерное вещественное гильбертово пространство. Рассмотрим скалярные функции $F(x)$ на H, $x \in H$.

Бесконечномерный лапласиан П. Леви ввел формулой

$$\Delta F(x) = 2 \lim_{\rho \to 0} \frac{\mathfrak{M} F(x + \rho h) - F(x)}{\rho^2},$$

где $\mathfrak{M}\Phi$ — среднее значение функции $\Phi(h)$ по сфере $\|h\|_H^2 = 1$.

Удобно и следующее представление лапласиана Леви (см., например, [5]). Пусть функция $F(x)$ дважды дифференцируема по подпространству Y пространства H (т.е. оператор $F''(x) \in \{Y \to Y'\}$, Y' — сопряженное к Y пространство). Тогда лапласиан Леви, если он существует, определяется формулой

$$\Delta F(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(F''(x) f_k, f_k\right)_H, \tag{1}$$

где $\{f_k\}_1^\infty$ — выбранный ортонормированный базис в H, $f_k \in Y$.

2. Пусть $\mathfrak{L}_2(H, \mu)$ — гильбертово пространство функций $F(x)$ на H, интегрируемых с квадратом по гауссовой мере μ с корреляционным оператором K и нулевым средним, K — ядерный положительный оператор, такой, что $\|x\|_H \le \left\|\mathrm{K}^{-1/2} x\right\|_H$, $x \in D_{\mathrm{K}^{-1/2}}$ ($D_{\mathrm{K}^{-1/2}}$ — область определения оператора $\mathrm{K}^{-1/2}$), $\|F\|^2_{\mathfrak{L}_2(H,\mu)} = \int_H F(x)^2 \mu(dx)$.

Пусть $H_\alpha \subset H_0 \subset H_{-\alpha}$ ($H_0 \equiv H$, $\alpha > 0$) — цепочка пространств из гильбертовой шкалы пространств H_β, $-\infty < \beta < \infty$, с порождающим оператором $\mathrm{K}^{-1/2}$ ($\mathrm{K}^{1/2}$ — оператор Гильберта – Шмидта).

Теорема. *Пусть функция* $F(x)$ *дважды дифференцируема по подпространству* H_α *и* $\xi_k(x) = (F''(x) f_k, f_k)_H \in \mathfrak{L}_2(H, \mu)$, $k = 1, 2, \ldots$, *где* $\{f_k\}_1^\infty$ — *некоторый ортонормированный базис в* H, $f_k \in H_\alpha$. *Если функции* $\xi_k(x)$ *удовлетворяют соотношениям* $\mathrm{M}\xi_k\xi_j = \mathrm{M}\xi_k\xi_i$ *при* $|j - k| > r$, $j, k = 1, 2, 3, \ldots$, *где* $\mathrm{M}\xi_k = \int_H \xi_k(x) \mu(dx)$ *и*

$$\xi_n(x) = O\left(\frac{n}{\ln\ln n}\right),$$

а оператор T' $(=A^*A)$, *порождаемый в* l_2 *матрицей* $\left\|\left(\hat\eta_k, \hat\eta_j\right)_{\mathfrak{L}_2(H,\mu)}\right\|_{j,k=1}^{\infty}$, *где*

$$\hat\eta_k(x) = \frac{\eta_k(x)}{\|\eta_k\|_{\mathfrak{L}_2(H,\mu)}}, \quad \eta_k(x) = \xi_k(x) - \mathrm{M}\xi_k,$$

имеет обратный оператор (ограниченный или неограниченный, причем $\hat\eta_k(x) \in D_{A^{-1}}$) *и если*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{M}\xi_k = 0,$$

то для того чтобы $\Delta F(x) = 0$ *почти для всех* $x \in H$, *необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon > 0$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\exp\left\{-\varepsilon 2^{2i}\left(\sum_{j=2^i+1}^{2^{i+1}}\left[\sum_{k=j}^{j+r}\left(\eta_k, A^{-1}\hat\eta_j\right)_{\mathfrak{L}_2(H,\mu)}\right]^2\right)^{-1}\right\} < \infty. \qquad (2)$$

Доказательство. Матрица Грамма $\left\|\left(\eta_k, \eta_j\right)_{\mathfrak{L}_2(H,\mu)}\right\|_{j,k=1}^{\infty}$ последовательности функций $\{\eta_k(x)\}_1^{\infty}$ является обобщенной матрицей Якоби:

$$\left(\eta_k, \eta_j\right)_{\mathfrak{L}_2(H,\mu)} = \mathrm{M}\xi_k\xi_j - \mathrm{M}\xi_k\mathrm{M}\xi_j = 0$$

при $|j-k| > r$, $j, k = 1, 2, 3, \ldots$, поскольку по условию $\mathrm{M}\xi_k\xi_j = \mathrm{M}\xi_k\mathrm{M}\xi_j$ при $|j-k| > r$.

Так как $\left(\hat\eta_k, \hat\eta_j\right)_{\mathfrak{L}_2(H,\mu)} = 0$ при $|j-k| > r$, то

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left(\hat\eta_k, \hat\eta_j\right)_{\mathfrak{L}_2(H,\mu)} = \sum_{j=k-r}^{k+r}\left(\hat\eta_k, \hat\eta_j\right)_{\mathfrak{L}_2(H,\mu)} \le 2r+1, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

и матрица $\left\|\left(\hat\eta_k, \hat\eta_j\right)_{\mathfrak{L}_2(H,\mu)}\right\|_{j,k=1}^{\infty}$ порождает в l_2 линейный ограниченный оператор. Поэтому оператор T в $\mathfrak{L}_2(H,\mu)$, определенный формулой

$$T\left(\sum_{j=1}^{\infty}c_j\Phi_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\hat\eta_k, \hat\eta_j\right)_{\mathfrak{L}_2(H,\mu)}c_k\right)\Phi_j$$

$\left(\sum_{j=1}^{\infty}c_j^2 < \infty,\ \{\Phi_k\}_1^{\infty}\right.$ — ортонормированный базис пространства $\left.\mathfrak{L}_2(H,\mu)\right)$, является линейным ограниченным положительным оператором.

Заметим, что в частном случае, когда ξ_k, $k = 1, 2, \ldots$, не зависит от x (и, значит, $\xi_k = \mathrm{M}\xi_k$), $\hat\eta_k$ не существует; впрочем, гармоничность в этом случае следует из условия

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{M}\xi_k = 0.$$

Пусть $\{\Phi_k\}_1^{\infty}$ — перенумерованная система полиномов Фурье – Эрмита $\Psi_{m_1\ldots m_N}$ [6], полная ортонормированная система в $\mathfrak{L}_2(H,\mu)$,

$$\Psi_{m_1\ldots m_N}(x) = \prod_{i=1}^{N}H_{m_i}\left(\left(K^{-1/2}x, f_i\right)_H\right), \quad N = 1, 2, \ldots; \quad m_i = 0, 1, 2, \ldots,$$

$H_m(\zeta)$ — частично нормированные полиномы Эрмита,

$$H_m(\zeta) = \sum_{i=0}^{[m/2]}(-1)^i \frac{(m!)^{1/2}}{2^i i!(m-2i)!} \zeta^{m-2i}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots .$$

Пусть $\Phi_{k_j}(x) = \tilde{\Phi}_j(x)$ — бесконечная последовательность функций, содержащихся в $\{\Phi_k\}_1^\infty$ и удовлетворяющих условию

$$\int_H \prod_{j=1}^\infty \tilde{\Phi}_j^2(x)\,\mu(dx) = 1$$

(такая последовательность* является сильно мультипликативной ортогональной системой). Причем нумерация начинается с последовательности $\tilde{\Phi}_j$.

Определим оператор A в $\mathfrak{L}_2(H,\mu)$ при заданном базисе $\{\Phi_k\}_1^\infty$ матрицей $\|a_{jk}\|_{j,k=1}^\infty$, элементы которой удовлетворяют соотношениям $a_{jk} = 0$ при $k - j > r$ и при $j > k$, а все остальные $a_{jk} = (A\Phi_k, \Phi_j)_{\mathfrak{L}_2(H,\mu)} = (\hat{\eta}_k, \Phi_j)_{\mathfrak{L}_2(H,\mu)}$. Тогда $(A^*A\Phi_k, \Phi_j)_{\mathfrak{L}_2(H,\mu)} = 0$ при $|j-k| > r$ и в базисе $\{\Phi_k\}_1^\infty$ оператору A^*A отвечает матрица $\|(\hat{\eta}_j, \hat{\eta}_k)_{\mathfrak{L}_2(H,\mu)}\|_{j,k=1}^\infty$, т.е. $T = A^*A$. Значит, A — линейный ограниченный оператор, имеющий обратный (ограниченный или неограниченный), и

$$\hat{\eta}_k = A\Phi_k = \sum_{j=1}^\infty a_{jk}\Phi_j = \sum_{j=k-r}^k (\hat{\eta}_k, A^{-1}\hat{\eta}_j)_{\mathfrak{L}_2(H,\mu)} \tilde{\Phi}_j .$$

Складывая, получаем

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \eta_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \|\eta_k\|_{\mathfrak{L}_2(H,\mu)} \sum_{j=k-r}^k (\hat{\eta}_k, A^{-1}\hat{\eta}_j)_{\mathfrak{L}_2(H,\mu)} \tilde{\Phi}_j =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \left[\sum_{k=j}^{j+r} (\eta_k, A^{-1}\hat{\eta}_j)_{\mathfrak{L}_2(H,\mu)}\right]\tilde{\Phi}_j - \frac{1}{n}\sum_{j=n-r+1}^n \left[\sum_{k=n+1}^{j+r} (\eta_k, A^{-1}\hat{\eta}_j)_{\mathfrak{L}_2(H,\mu)}\right]\tilde{\Phi}_j . \tag{3}$$

Лапласиан Леви (1) функции $F(x)$ есть предел последовательности средних арифметических $n^{-1}\sum_{k=1}^n \xi_k(x)$, где функции $\xi_k(x) = (F''(x)f_k, f_k)_H$. Каждая функция $\Phi(x)$ на H, измеримая относительно σ-алгебры $\mathfrak{A}$, есть случайная величина на вероятностном пространстве $\{H, \mathfrak{A}, \mu\}$. При этом ее математическое ожидание $\mathrm{M}\Phi = \int_H \Phi(x)\mu(dx)$, дисперсия $\mathrm{D}\Phi = \|\Phi - \mathrm{M}\Phi\|_{\mathfrak{L}_2(H,\mu)}^2$, а сходимости последовательности случайных величин с вероятностью единица соответствует сходимость последовательности измеримых функций почти всюду на H относительно меры μ.

Таким образом, $\{\xi_k(x)\}_1^\infty$ — последовательность стохастически зависимых случайных величин, $\{\eta_k(x)\}_1^\infty$ — эта же последовательность, центрированная своими математическими ожиданиями $(\mathrm{M}\eta_k = 0)$, матрица Грамма

* Примеры таких последовательностей:

а) $\tilde{\Phi}_j(x) = \Psi_{\underbrace{0\ldots0p}_{j}0\ldots0}(x)$, $j = 1, 2, \ldots$, для некоторого целого $p \geq 1$;

б) $\tilde{\Phi}_j(x) = \Psi_{0\ldots0 j_j 0\ldots0}(x)$, $j = 1, 2, \ldots$.

$\left\|\left(\eta_k, \eta_j\right)_{\mathfrak{L}_2(H,\mu)}\right\|_{j,k=1}^{\infty}$ функций $\{\eta_k(x)\}_1^{\infty}$ — корреляционная матрица, а $\left\|\left(\hat{\eta}_k, \hat{\eta}_j\right)_{\mathfrak{L}_2(H,\mu)}\right\|_{j,k=1}^{\infty}$ — матрица коэффициентов корреляции случайных величин $\xi_1(x), \xi_2(x), \ldots$.

Рассмотрим выражение

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} z_j, \quad z_j = \sum_{k=j}^{j+r}\left(\eta_k, A^{-1}\hat{\eta}_j\right)_{\mathfrak{L}_2(H,\mu)}\tilde{\Phi}_j,$$

входящее в равенство (3). Последовательность $\{z_j\}_1^{\infty}$ есть последовательность стохастически независимых случайных величин, $\mathrm{M} z_j = 0$,

$$\mathrm{D} z_j = \left[\sum_{k=j}^{j+r}\left(\eta_k, A^{-1}\hat{\eta}_j\right)_{\mathfrak{L}_2(H,\mu)}\right]^2.$$

Кроме того, $z_n = O\left(\dfrac{n}{\ln\ln n}\right)$ $\left(\text{поскольку по условию } \xi_n = O\left(\dfrac{n}{\ln\ln n}\right)\right)$. Согласно теореме Ю. В. Прохорова [7], для того чтобы $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} z_k \to 0$ почти наверное, необходимо и достаточно выполнение условия

$$\sum_{i=1}^{\infty}\exp\left\{-\varepsilon 2^{2i}\left(\sum_{j=2^i+1}^{2^{i+1}} Dz_j\right)^{-1}\right\} < \infty \quad \forall\, \varepsilon > 0.$$

Обратимся к выражению $R_{r,n}/n$,

$$R_{r,n} = \sum_{j=n-r+1}^{n}\left[\sum_{k=n+1}^{j+r}\left(\eta_k, A^{-1}\hat{\eta}_j\right)_{\mathfrak{L}_2(H,\mu)}\right]\tilde{\Phi}_j,$$

входящему в равенство (3). Поскольку $R_{r,n}$ содержит лишь конечное число членов, то $R_{r,n} = O\left(\dfrac{n}{\ln\ln n}\right)$ и $R_{r,n}/n \to 0$ при $n \to \infty$.

Теперь из (3) следует, что (2) — необходимое и достаточное условие того, что почти всюду на H $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\eta_k(x) \to 0$ или $\left(\text{поскольку по условию } \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{M}\xi_k \to 0\right)$ того, что почти всюду на H $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k(x) \to 0$, т. е. того, что

$$\Delta F(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(F''(x) f_k, f_k\right)_H = 0$$

почти для всех $x \in H$.

1. *Леви П.* Конкретные проблемы функционального анализа. – М.: Наука, 1967. – 512 с.
2. *Феллер М. Н.* Запас гармонических функций бесконечного числа переменных. I // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 11. – С. 1576 – 1579.
3. *Феллер М. Н.* Запас гармонических функций бесконечного числа переменных. II // Там же. – **12**. – С. 1687 – 1693.
4. *Феллер М. Н.* Запас гармонических функций бесконечного числа переменных. III // Там же. – 1992. – **44**, № 3. – С. 417 – 423.
5. *Феллер М. Н.* Бесконечномерные эллиптические уравнения и операторы типа П. Леви // Успехи мат. наук. – 1986. – **41**, № 4. – С. 97 – 140.
6. *Cameron R. H., Martin W. T.* The orthogonal development of non-linear functionals in serios of Fourier – Hermite functionals // Ann. Math. – 1947. – **48**, № 2. – P. 385 – 392.
7. *Прохоров Ю. В.* Несколько замечаний к усиленному закону больших чисел // Теория вероятностей и ее применение. – 1959. – **4**, № 2. – С. 215 – 220.

Получено 08.06.92