УДК 517.5

В. Ф. Бабенко, д-р физ.-мат. наук,
В. Н. Глушко, асп. (Днепропетр. ун-т)

О ЕДИНСТВЕННОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ НАИЛУЧШЕГО И НАИЛУЧШЕГО ОДНОСТОРОННЕГО ПРИБЛИЖЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ L_1

The problem of uniqueness of the best approximations in the space $L_1[a, b]$ is studied. We consider the problem of the best approximation and the best (α, β)-approximation of continuous functions and the problem of the best one-sided approximation of continuously differentiable functions.

Вивчаються питання єдиності елементів найкращого наближення у просторі $L_1[a, b]$. Розглядаються задачі найкращого та найкращого (α, β)-наближення неперервних функцій, а також задача найкращого одностороннього наближення неперервно-диференційовних функцій.

Пусть $I = [a, b]$, $L_1 = L_1(I)$ — пространство суммируемых на I вещественнозначных функций с нормой $\|f\|_1 = \int_I |f(x)|\,dx$, $C = C(I)$ и $C^1 = C^1(I)$ — соответственно подпространства L_1 непрерывных и непрерывно-дифференцируемых функций; $V(I)$ — пространство функций ограниченной на I вариации. Если $\alpha, \beta > 0$ и $f_{\pm}(x) = \max\{\pm f(x), 0\}$, то

$$\operatorname{sgn}_{\alpha,\beta} f = \alpha \operatorname{sgn} f_+ - \beta \operatorname{sgn} f_-, \qquad |f|_{\alpha,\beta} = \alpha f_+ + \beta f_-,$$

$$\|f\|_{1;\,\alpha,\beta} = \int_I |f(x)|_{\alpha,\beta}\,dx.$$

Пусть $f \in L_1$ и $G \subset L_1$. Величину

$$E(f, G)_{1;\alpha,\beta} = \inf\{\|f - u\|_{1;\alpha,\beta} \colon u \in G\} \tag{1}$$

назовем наилучшим (α, β)-приближением функции f множеством G. При $\alpha = \beta = 1$ получаем обычное наилучшее L_1-приближение $E(f, G)_1$. Функцию из множества G, реализующую точную нижнюю грань в правой части (1), называют элементом наилучшего (α, β)-приближения функции f в метрике L_1 (при $\alpha = \beta = 1$ — элементом наилучшего L_1-приближения f). Совокупность элементов наилучшего (α, β)-приближения в G для f обозначим через $P_G^{(\alpha,\beta)}(f)$ (при $\alpha = \beta = 1$ вместо $P_G^{(1,1)}(f)$ будем писать $P_G(f)$).

Пусть $G^{\pm}(f) = \{u \in G \colon \pm u(x) \le \pm f(x)$ для почти всех $x \in I\}$. Тогда величину

$$E^{\pm}(f, G)_1 = \inf\{\|f - u\|_1 \colon u \in G^{\pm}(f)\} \tag{2}$$

называют наилучшим L_1-приближением снизу $(+)$ или сверху $(-)$ функции f множеством G, а функцию, реализующую точную нижнюю грань в правой части (2), — элементом наилучшего одностороннего L_1-приближения функции f. Пусть $P_G^{\pm}(f)$ — множество элементов наилучшего одностороннего L_1-приближения для f в G.

Наилучшие (α, β)-приближения изучались одним из авторов (см., например, [1–3]). В частности, было доказано ([1], теорема 2), что для любой функции $f \in L_1$ и любого конечномерного подпространства G пространства L_1

ISSN 0041-6053. Укр. мат. журн., 1994, т. 46, № 5

$$\lim_{\beta \to \infty} E(f, G)_{1;1,\beta} = E^{+}(f, G)_1$$

и

$$\lim_{\alpha \to \infty} E(f, G)_{1;\alpha,1} = E^{-}(f, G)_1 .$$

Через $\omega(f, t)$ будем обозначать модуль непрерывности функции $f \in C$, а через Z_f — множество нулей f. Если $f \in C^1$, то пусть $\tilde{Z}_f = \{x \in I : f(x) = f'(x) = 0$ при $x \in (a, b)$ и $f(x) = 0$ при $x \in \{a, b\}\}$. Для $y \in I$ и $M \subset I$ положим $\rho(x, M) = \inf_{y \in M} |x - y|$. Пусть $\overset{d}{\underset{c}{V}}(f)$ — вариация функции f на $[c, d] \subseteq I$; $H_G = \{h \in C : \exists\, g_h \in G \ |h(x)| = |g_h(x)| \ \forall x \in I\}$.

В настоящей статье рассматриваются вопросы единственности элемента наилучшего L_1-приближения и (α, β)-приближения в L_1 для функций $f \in C$, а также элемента наилучшего одностороннего L_1-приближения для функций $f \in C^1$.

Проблема единственности элемента наилучшего L_1-приближения изучалась многими авторами (см., например, работы Джексона [4], Крейна [5], Галкина [6], Штраусса [7, 8], Кэррола и Браесса [9]).

Штрауссом [10] доказана следующая теорема.

Теорема А. *Пусть G — конечномерное подпространство C. Каждая функция $f \in C$ имеет единственный элемент наилучшего L_1-приближения в G тогда и только тогда, когда каждая функция $h \in H_G$ имеет единственный элемент наилучшего L_1-приближения в G.*

Теорема А легко распространяется на случай наилучшего (α, β)-приближения.

Теорема 1. *Пусть G — конечномерное подпространство C. Каждая функция $f \in C$ имеет единственный элемент наилучшего (α, β)-приближения в G тогда и только тогда, когда каждая функция $h \in H_G$ имеет единственный элемент наилучшего (α, β)-приближения в G.*

Пусть $l_1, \ldots, l_n$ — произвольный базис в G;

$$\omega(t) = \max_{i=1,\ldots,n} \omega(l_i, t), \quad \tilde{H}_G = \{h \in C : \exists\, g \in G \ |h(x)| = \omega(\rho(x, Z_g)), \ x \in I\}.$$

Справедлив следующий аналог теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть G — конечномерное подпространство C. Каждая функция $f \in C$ имеет единственный элемент наилучшего (α, β)-приближения в G тогда и только тогда, когда каждая функция $h \in \tilde{H}_G$ имеет единственный элемент наилучшего (α, β)-приближения в G.*

В теореме 2 уменьшается по сравнению с теоремой 1 разнообразие функций, для которых нужно проверять единственность элемента наилучшего (α, β)-приближения в G. Все функции из $\tilde{H}_G$ определяются единообразно.

Для доказательства теоремы 2 и в дальнейшем нам понадобится следующий критерий элемента наилучшего (α, β)-приближения в L_1 (см., например, [11], утверждение 3).

Теорема В. *Пусть G — конечномерное подпространство L_1. Для того* *чтобы функция* $g \in G$ *была элементом наилучшего* (α, β)*-приближения для* f *в метрике* L_1, *необходимо и достаточно, чтобы существовала функция* h, *удовлетворяющая следующим условиям:*

1) $|h|_{\alpha^{-1}, \beta^{-1}} \equiv 1$;

2) $h(x) = \mathrm{sgn}_{\alpha, \beta}(f - g)(x)$, $x \in I \setminus Z_{f-g}$;

3) $\int_I u(x) h(x) dx = 0$ для любого $u \in G$.

Доказательство теоремы 2. Нетрудно убедиться, что в случае, когда $\dim G = 1$ и базисная функция пространства G не имеет нулей на I, элемент наилучшего (α, β)-приближения функции $f \in C$ в G единствен. В остальных случаях доказательство проведем следующим образом. Необходимость очевидна. Покажем достаточность. Предположим, что каждая функция $h \in \tilde{H}_G$ имеет единственный элемент наилучшего (α, β)-приближения в G, но существует функция $f \in C$ такая, что $P_G^{(\alpha,\beta)}(f)$ содержит два различных элемента g_1 и g_2. Тогда в силу выпуклости множества $P_G^{(\alpha,\beta)}(f)$, $\frac{1}{2}(g_1 + g_2) \in P_G^{(\alpha,\beta)}(f)$. Так как $f \in C$, то легко показать, что для любого $x \in I$:

$$\left| f(x) - \frac{1}{2}(g_1 + g_2)(x) \right| = \frac{1}{2} |f(x) - g_1(x)| + \frac{1}{2} |f(x) - g_2(x)|$$

и, следовательно, $Z_{f-(1/2)(g_1+g_2)} \subset Z_{g_1 - g_2}$.

Положим

$$h(x) = \omega\left(\rho\left(x, Z_{g_1 - g_2}\right)\right) \mathrm{sgn}\left(f - \frac{1}{2}(g_1 + g_2) \right)(x), \quad x \in I.$$

Ясно, что $h \in \tilde{H}_G$. Легко видеть, что найдется такая константа $\delta > 0$, что $\delta |h(x)| \ge |(g_1 - g_2)(x)|$, $x \in I$. Тогда для $0 \le \gamma \le 1$:

$$\left(h - \frac{\gamma}{\delta}(g_1 - g_2) \right)(x) \left(f - \frac{1}{2}(g_1 + g_2) \right)(x) \ge 0, \quad x \in I.$$

Поэтому в силу теоремы В $\gamma(g_1 - g_2)\delta^{-1} \in P_G^{(\alpha,\beta)}(h)$, $0 \le \gamma \le 1$, что противоречит первоначальному предположению. Теорема доказана.

Аналогично теореме 8 из [10] устанавливается следующая теорема.

Теорема 3. *Всякая функция* $h \in \tilde{H}_G$ *будет иметь единственный элемент наилучшего* (α, β)*-приближения в* G *тогда и только тогда, когда для любой функции* $h \in \tilde{H}_G$ $(h \not\equiv 0)$ *нулевой элемент из* G *не будет элементом наилучшего* (α, β)*-приближения.*

Объединяя теоремы 2 и 3 и используя обобщение критерия Крипке – Ривлина [12] элемента наилучшего L_1-приближения на случай наилучшего (α, β)-приближения (см. [3], теорема 1), убеждаемся, что справедлива такая теорема.

Теорема 4. *Пусть* G *— конечномерное подпространство* C. *Каждая функция* $f \in C$ *имеет единственный элемент наилучшего* (α, β)*-приближения в* G *тогда и только тогда, когда для любой функции* $h \in \tilde{H}_G$ $(h \not\equiv 0)$ *найдется* $g \in G$ *такая, что*

$$\int_I g(x) \mathrm{sgn}_{\alpha,\beta} h(x) dx > \int_{Z_h} |g(x)|_{\beta,\alpha} dx.$$

Перейдем к изучению вопросов единственности элемента наилучшего одностороннего приближения в L_1.

Теорема 5 (*критерий элемента наилучшего одностороннего* L_1*-приближения*). *Пусть* G *— конечномерное подпространство* C, *содержащее константы. Функция* $g \in G^{\pm}(f)$ *является элементом наилучшего одностороннего* L_1*-приближения* f *тогда и только тогда, когда существует функция* $\Phi^{\pm} \in V(I)$ *такая, что*:

1) *функция* $\pm\Phi^{\pm}(x)$ *невозрастающая на* I;

2) $\int_I (f-u)\,d\Phi^{\pm} \le 0$ *для любого* $u \in G^{\pm}(f)$;

3) $\int_I (f-g)\,d\Phi^{\pm} = 0$;

4) $\pm\int_I u(x)\,dx + \int_I u\,d\Phi^{\pm} = 0$ *для любого* $u \in G$.

Доказательство. *Необходимость.* Доказательство необходимости проведем для наилучшего приближения снизу (случай наилучшего приближения сверху аналогичен).

Рассмотрим последовательность функций $\{g_{1,\beta}\}_{\beta=1}^{\infty} \subset P_G^{(1,\beta)}(f)$. В силу теоремы 2 из [1] она сходится в метрике L_1 к некоторой функции $g \in P_G^{+}(f)$. Из теоремы В следует, что последовательности $\{g_{1,\beta}\}_{\beta=1}^{\infty}$ можно поставить в соответствие последовательность функций $\{h_\beta\}_{\beta=1}^{\infty}$, удовлетворяющих следующим условиям:

$$|h_\beta|_{1,\beta^{-1}} \equiv 1, \quad h_\beta = \operatorname{sgn}_{1,\beta}(f - g_{1,\beta}) \quad \text{на } I \setminus Z_{f-g_{1,\beta}}; \tag{3}$$

$$\int_I u(x)\,h_\beta(x)\,dx = 0 \quad \text{для любого} \quad u \in G. \tag{4}$$

Через H_β, H_β^1, H_β^2 обозначим соответственно первообразные функций h_β, $(h_\beta)_+$, $-(h_\beta)_-$. Очевидно, $H_\beta = H_\beta^1 + H_\beta^2$.

Учитывая условия (3) и (4), нетрудно убедиться в том, что $\lim_{\beta\to\infty} H_\beta^1(x) = x - a$ в каждой точке $x \in I$. Все функции H_β^2 ($\beta = 1, 2, \dots$) и их полные вариации на I равномерно ограничены. Значит, в силу второй теоремы Хелли [13, с. 422], из $\{H_\beta^2\}_{\beta=1}^{\infty}$ можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся в каждой точке I к некоторой функции ограниченной вариации Φ^+. Перенумеровав, если нужно, члены этой подпоследовательности, можно считать, что $\lim_{\beta\to\infty} H_\beta^2(x) = \Phi^+(x)$ для любого $x \in I$. Очевидно, Φ^+ не возрастает. Пусть

$$H^+(x) := \lim_{\beta\to\infty} H_\beta(x) = x - a + \Phi^+(x).$$

Введем в рассмотрение функционалы F_β, определив их следующим образом: $F_\beta(p) = \int_I p\,dH_\beta$, $p \in C$. Легко видеть, что для функционалов F_β выполняются условия первой теоремы Хелли [13, с. 420]. Поэтому

$$F_\beta(p) \underset{\beta\to\infty}{\to} F(p)$$

для каждого $p \in C$, где $F(p) = \int_I p\,dH^+$. Тогда для любого $u \in G$ в силу свойств функций h_β получаем

$$0 = F_\beta(u) \underset{\beta\to\infty}{\to} F(u) = 0, \text{ т. е. } \int_I u\,dH^+ = \int_I u(x)\,dx + \int_I u\,d\Phi^+ = 0.$$

Из определения интеграла Римана – Стилтьеса следует, что для всех функций $u \in G^+(f)$ выполняется условие 2 теоремы.

Покажем, что выполняется условие 3.

Так как $g \in G^+(f)$, то $\int_I (f-g)\,d\Phi^+ \le 0$ по условию 2. Докажем, что $\int_I (f-g)\,d\Phi^+ \ge 0$.

Функционалы F^2_β, определенные следующим образом: $F^2_\beta(p) = \int_I p\,dH^2_\beta$, $p \in C$, также удовлетворяют условиям первой теоремы Хелли и поэтому $F^2_\beta(p) \underset{\beta\to\infty}{\to} F^2(p)$ для каждого $p \in C$, где $F^2(p) = \int_I p\,d\Phi^+$. Нетрудно показать, что $\lim\limits_{\beta\to\infty} F^2_\beta(f - g_{1,\beta}) = F^2(f-g)$. Кроме того,

$$F^2_\beta(f - g_{1,\beta}) = -\int_I (f - g_{1,\beta})(x)(h_\beta)_-(x)\,dx =$$

$$= -\beta \int\limits_{\{x:\,(f-g_{1,\beta})(x)<0\}} (f - g_{1,\beta})(x)\,dx > 0.$$

Следовательно, $F^2(f-g) = \int_I (f-g)\,d\Phi^+ \ge 0$.

Окончательно получаем $\int_I (f-g)\,d\Phi^+ = 0$.

Покажем теперь, что условия 1 – 4 будут выполняться для любого $g_1 \in \in P^+_G(f)$. Для этого достаточно проверить выполнение условия 3 для всех $g_1 \in P^+_G(f)$. Имеем

$$\int_I (f-g_1)(x)\,dx = \int_I (f-g)(x)\,dx \overset{3)}{=}$$

$$\overset{3)}{=} \int_I (f-g)(x)\,dx + \int_I (f-g)\,d\Phi^+ \overset{4)}{=}$$

$$\overset{4)}{=} \int_I (f-g_1)(x)\,dx + \int_I (f-g_1)\,d\Phi^+.$$

Поэтому $\int_I (f-g_1)\,d\Phi^+ = 0$. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть для функций $g \in G^\pm(f)$ и $\Phi^\pm \in V(I)$ выполняются условия 1 – 4 теоремы. Тогда

$$\pm\int_I (f-g)(x)\,dx \overset{3)}{=} \pm\int_I (f-g)(x)\,dx + \int_I (f-g)\,d\Phi^\pm \overset{4)}{=}$$

$$\overset{4)}{=} \pm\int_I (f-u)(x)\,dx + \int_I (f-u)\,d\Phi^\pm \overset{2)}{\le} \pm\int_I (f-u)(x)\,dx$$

для любого $u \in G^\pm(f)$, т. е. $g \in P^\pm_G(f)$. Теорема доказана.

Лемма. *Пусть* $P \in C$, Φ *монотонна на* I,

$$W = \left\{ x \in I: \ \forall \, \varepsilon > 0 \ \ \mathop{V}_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}(\Phi) > 0 \right\}.$$

Тогда для того чтобы $\int_I P \, d\Phi = 0$, *достаточно, а в случае, если функция* P *знакопостоянна на* I, *то и необходимо, чтобы* $P(x) = 0$ *для любого* $x \in W$.

Доказательство. *Достаточность.* Рассмотрим произвольное разбиение π_n промежутка I. Запишем соответствующую интегральную сумму Римана – Стилтьеса:

$$S^*(P, \Phi, \pi_n) = \sum_k{}' P(\xi_k)(\Phi(x_{k+1}) - \Phi(x_k)) + \sum_k{}'' P(\xi_k)(\Phi(x_{k+1}) - \Phi(x_k)),$$

где в $\sum'$ суммирование производится по всем тем промежуткам разбиения, которые содержат точки из множества W, а в качестве точек ξ_k выбираются точки из W; в $\sum''$ суммирование производится по всем промежуткам разбиения, не содержащим точек из W. Ясно, что $\sum' = 0$ и $\sum'' = 0$. Устремляя к нулю параметр разбиения, получаем: $\int_I P \, d\Phi = 0$.

Необходимость. Предположим, что $\int_I P \, d\Phi = 0$, но найдется точка $x_0 \in \in W$ такая, что $P(x_0) = A \neq 0$. Доказательство проведем в случае, когда P неотрицательна, Φ не убывает на I. Остальные случаи получаются аналогично.

Так как $P \in C$, $P(x_0) = A$, то найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $P(y) > A/2$ для любого $y \in I_\varepsilon = [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$. Тогда

$$\int_I P \, d\Phi \geq \int_{I_\varepsilon} P \, d\Phi \geq \frac{A}{2} \mathop{V}_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon}(\Phi) > 0,$$

что противоречит первоначальному предположению. Лемма доказана.

Рассмотрим теперь n-мерное подпространство $G \subset C^1$. Пусть $l_1, \ldots, l_n$ — произвольный базис в G; $\omega_1(t) = \max_{i=1,\ldots,n} \omega(l_i', t)$. Через $[c_g, d_g]$ обозначим наименьший отрезок, содержащий множество $\tilde{Z}_g$ $(g \in G)$, а через (a_g^i, b_g^i) — составляющие интервалы множества $[c_g, d_g] \setminus \tilde{Z}_g$. Пусть

$$M_g = \tilde{Z}_g \cup \left(\bigcup_i \left\{ \frac{a_g^i + b_g^i}{2} \right\} \right).$$

Положим $\tilde{H}_G^{\pm} = \{ h \in C^1 \mid \pm h(x) \geq 0 \ \ (x \in I)$ и $\exists \, g \in G \ \ (\tilde{Z}_h = \tilde{Z}_g)$; $|h'(x)| = \omega_1(\rho(x, M_g)) \ \forall \, x \in I \}$.

Теорема 6. *Пусть* G *— конечномерное подпространство* C^1, *содержащее константы. Каждая функция* $f \in C^1$ *имеет единственный элемент наилучшего одностороннего* L_1*-приближения* $g \in P_G^{\pm}(f)$ *тогда и только тогда, когда каждая функция* $h \in \tilde{H}_G^{\pm}$ *имеет единственный элемент наилучшего одностороннего* L_1*-приближения* $q \in P_G^{\pm}(h)$.

Доказательство. Если $\dim G = 1$ и базисная функция пространства G

не имеет нулей на I, то элемент наилучшего одностороннего L_1-приближения функции $f \in C^1$ в G единствен. В остальных случаях доказательство проведем следующим образом. Необходимость очевидна. Покажем достаточность. Предположим, что каждая функция $h \in \tilde{H}_G^{\pm}$ имеет единственный элемент наилучшего одностороннего L_1-приближения в G, но существует функция $f \in C^1$ такая, что $P_G^{\pm}(f)$ содержит два различных элемента g_1 и g_2. Тогда в силу выпуклости множества $P_G^{\pm}(f)$:

$$g_\alpha = \alpha g_1 + (1-\alpha) g_2 \in P_G^{\pm}(f) \quad (0 \leq \alpha \leq 1).$$

Зафиксируем произвольное α: $0 < \alpha < 1$. Для любого $x \in I$ имеем

$$\pm (f - g_\alpha)(x) = \pm \alpha (f - g_1)(x) \pm (1-\alpha)(f - g_2)(x).$$

Кроме того, поскольку $\pm(f-g_1)(x) \geq 0$, $\pm(f-g_2)(x) \geq 0$ для всех $x \in I$, легко видеть, что $Z_{f-g_\alpha} \subset \tilde{Z}_{g_1-g_2}$. Рассмотрим функцию $h \in \tilde{H}_G^{\pm}$ такую, что $\pm h(x) \geq 0$, $|h'(x)| = \omega_1(\rho(x, M_{g_1-g_2}))$ на I. Нетрудно показать, что найдется такая константа $\delta > 0$, что $\pm(g_1 - g_2)(x) \leq \pm \delta h(x)$ на I. Таким образом, $\gamma(g_1 - g_2)\delta^{-1} \in G^{\pm}(h)$, $0 \leq \gamma \leq 1$. Покажем, что для функций $\gamma(g_1 - g_2)\delta^{-1}$ $(0 \leq \gamma \leq 1)$ и функции $\Phi^{\pm}$, соответствующей $g_\alpha \in P_G^{\pm}(f)$ по теореме 5, выполняются условия 1 – 4 той же теоремы.

Условие 2 выполняется в силу свойств интеграла Римана – Стилтьеса. Проверим выполнение условия 3. Пусть

$$W^{\pm} = \left\{ x \in I:\ \forall\, \varepsilon > 0 \ \ \mathop{V}_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} (\Phi^{\pm}) > 0 \right\}.$$

По лемме, так как

$$\int_I (f - g_\alpha)\, d\Phi^{\pm} = 0, \quad (f - g_\alpha)(x) = 0$$

для всех $x \in W^{\pm}$, значит, $(g_1 - g_2)(x) = 0$ и $h(x) = 0$ для всех $x \in W^{\pm}$, следовательно,

$$\int_I \left(h - \frac{\gamma}{\delta}(g_1 - g_2) \right) d\Phi^{\pm} = 0.$$

Условия 1 и 4, очевидно, также выполняются.

Таким образом, в силу теоремы 5, $\gamma(g_1 - g_2)\delta^{-1} \in P_G^{\pm}(h)$ для любого $0 \leq$ $\leq \gamma \leq 1$, что противоречит первоначальному предположению. Теорема доказана.

Теорема 7. *Каждая функция $h \in \tilde{H}_G^{\pm}$ имеет единственный элемент наилучшего одностороннего L_1-приближения в G тогда и только тогда, когда для любой функции $h \in \tilde{H}_G^{\pm}$, $h \not\equiv 0$, нулевой элемент из G не будет элементом наилучшего одностороннего L_1-приближения.*

Доказательство. *Необходимость* доказывается от противного: с помощью теоремы 5 и леммы нетрудно показать, что если $0 \in P_G^{\pm}(h)$, то $g_h \delta^{-1} \in$ $\in P_G^{\pm}(h)$ при некотором $\delta > 0$, где $g_h \in \tilde{H}_G^{\pm}$: $|h'(x)| = \omega_1(\rho(x, M_{g_h}))$, $x \in I$.

Достаточность. Предположим, что для любого $h \in \tilde{H}_G^{\pm}$ $(h \not\equiv 0)$ $0 \notin$

$\notin P_G^{\pm}(h)$, но для некоторого $h \in \tilde{H}_G^{\pm}$ $P_G^{\pm}(h)$ содержит два различных элемента g_1 и g_2. Тогда $(g_1 + g_2)2^{-1} \in P_G^{\pm}(h)$, а $0, (g_2 - g_1) \in P_G^{\pm}(h - g_1)$. Рассмотрим функцию $h \in \tilde{H}_G^{\pm}$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$\pm h_1(x) \geq 0, \ | h_1'(x) | = \omega_1 \left(\rho\left(x, M_{g_2 - g_1} \right) \right)$$

на I. Ясно, что $Z_{h-(1/2)(g_1+g_2)} \subset Z_{h_1}$. Покажем, что $0 \in P_G^{\pm}(h_1)$, т. е. $\int_I h_1 d\Phi^{\pm} = 0$, где $\Phi^{\pm}$ — функция, соответствующая $(g_1 + g_2)2^{-1} \in P_G^{\pm}(h)$ по теореме 5. Согласно лемме, так как

$$\int\limits_I \left(h - \frac{1}{2}(g_1 + g_2) \right) d\Phi^{\pm} = 0,$$

то $W^{\pm} \subset Z_{h-(1/2)(g_1+g_2)} \subset Z_{h_1}$, значит, $\int_I h_1 d\Phi^{\pm} = 0$. Таким образом, $0 \in$ $\in P_G^{\pm}(h_1)$, что противоречит первоначальному предположению. Теорема доказана.

Пусть

$$\sum\nolimits_{\tilde{H}_G^{\pm}}^{\Phi} = \bigcup_{\substack{h \in \tilde{H}_G^{\pm} \\ h \not\equiv 0}} \{\Phi_h^{\pm}\},$$

где $\Phi_h^{\pm}$ — функции, удовлетворяющие условиям: 1) $\pm \Phi_h^{\pm}$ невозрастающая на I; 2) $\int_I h \, d\Phi_h^{\pm} = 0$.

Из сопоставления теорем 5, 6 и 7 вытекает справедливость следующей теоремы.

Теорема 8. *Пусть G — конечномерное подпространство C^1, содержащее константы. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) *Каждая функция $f \in C^1$ имеет единственный элемент наилучшего одностороннего L_1-приближения в G;*

2) *для любой функции $h \in \tilde{H}_G^{\pm}$, $h \not\equiv 0$, нулевой элемент из G не будет элементом наилучшего одностороннего L_1-приближения;*

3) *для любой $\Phi^{\pm} \in \sum_{\tilde{H}_G^{\pm}}^{\Phi}$ найдется $g \in G$ такая, что*

$$\pm \int\limits_I g(x)dx + \int\limits_I g \, d\Phi^{\pm} \neq 0.$$

В заключение приведем пример, показывающий, как доказанные выше теоремы применимы при изучении вопросов единственности элемента наилучшего одностороннего L_1-приближения.

Пример. Рассмотрим слабо чебышевское пространство (см., например, [10, с. 69]) $G_{a,b}$ $(a \geq 2, \ b > 0)$, натянутое на функции

$$g(x) = 1, \quad g_{a,b}(x) = \begin{cases} -b(x-1)^2, & x \in [0, 1), \\ 0, & x \in [1, a-1), \\ (x-a+1)^2, & x \in [a-1, a]. \end{cases}$$

Пространства $G_{a,1}$ $(a \geq 2)$, очевидно, являются пространствами существования элемента наилучшего одностороннего L_1-приближения (см., например,

[14], следствие 1.3.2). Но не у всех функций $f \in C^1$ элемент наилучшего одностороннего L_1-приближения в $G_{a,1}$ $(a \geq 2)$ будет единствен. Для доказательства этого факта достаточно показать, что для пространств $G_{a,1}$ $(a \geq 2)$ не выполняется утверждение 3 теоремы 8.

Действительно, если рассмотреть функцию $\Phi^{\pm}$ ($\pm\Phi^{\pm}$ — невозрастающую на $[0, a]$) с $\bigvee\limits_0^a(\Phi^{\pm}) = a$ и со скачками в точках $x = 1$ и $x = a - 1$, то нетрудно показать, что

$$\pm \int\limits_0^a g(x)\,dx + \int\limits_0^a g\,d\Phi^{\pm} = 0$$

для всех $g \in G_{a,1}$.

С помощью теоремы 4 нетрудно убедиться также в том, что некоторые функции $f \in C$ будут иметь более чем один элемент наилучшего (α, β)-приближения в $G_{a,1}$ при $a \geq \min\{2(\alpha/\beta + 1), 2(\beta/\alpha + 1)\}$.

1. *Бабенко В. Ф.* Несимметричные приближения в пространствах суммируемых функций // Укр. мат. журн. – 1982. – **34**, № 4. – С. 409 – 416.
2. *Бабенко В. Ф.* Экстремальные задачи теории приближения и несимметричные нормы: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. – Киев, 1989. – 275 с.
3. *Бабенко В. Ф., Заяц И. Ф.* Несимметричные L_1-приближения вектор-функций // Приближение функций и суммирование рядов. – Днепропетровск: Днепропетр. ун-т, 1991. – С. 4 – 7.
4. *Jackson D.* A general class of problems in approximation // Amer. J. Math. – 1924. – **46**. – P. 215 – 234.
5. *Ахиезер Н. И., Крейн М. Г.* О некоторых вопросах теории моментов. – Харьков: ГОНТИ, 1938. – 255 с.
6. *Галкин П. В.* О единственности элемента наилучшего приближения в среднем непрерывной функции сплайнами с фиксированными узлами // Мат. заметки. – 1974. – **15**, № 1. – С. 3 – 14.
7. *Strauss H.* L_1-Approximation mit Splinefunktionen // Int. Ser. Numer. Math. – 1975. – **26**. – P. 151 – 162.
8. *Strauss H.* Unicity of best one-sided L_1-approximations // Numer. Math. – 1982. – **40**, № 2. – P. 229 – 243.
9. *Carrol M. P., Braess D.* On uniqueness of L_1-approximation for certain families of spline functions // J. Approxim. Theory. – 1974. – **12**, № 4. – P. 362 – 364.
10. *Strauss H.* Eindeutigkeit in der L_1-approximation // Math. Z. – 1981. – **176**. – P. 63 – 74.
11. *Наконечная Т. В.* Об определяющих множествах для несимметричных приближений в L_1 // Исследования по современным проблемам суммирования и приближения функций и их приложениям. – Днепропетровск: Днепропетр. ун-т, 1984. – С. 21 – 31.
12. *Kripke B. R., Rivlin T. I.* Approximation in the metric of $L_1(X, \mu)$ // Trans. Amer. Math. Soc. – 1965. – **119**, № 1. – P. 101 – 122.
13. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1989. – 623 с.
14. *Корнейчук Н. П., Лигун А. А., Доронин В. Г.* Аппроксимация с ограничениями. – Киев: Наук. думка, 1982. – 250 с.

Получено 22. 09. 92