УДК 517.928

Е. В. Воскресенский, д-р физ.-мат. наук. (Мордов. ун-т, Саранск)

О ВЕРХНЕЙ ГРАНИЦЕ РАВНОМЕРНО ОГРАНИЧЕННЫХ РЕШЕНИЙ

New conditions for the uniform boundedness of solutions are obtained and the methods for calculating upper bounds are indicated.

Одержані нові умови рівномірної обмеженості розв'язків та вказані методи обчислення верхніх меж.

1. Критерии Иошизавы об ограниченности решений дифференциальных уравнений [1] сформулированы с помощью прямого метода Ляпунова. Однако они носят глобальный характер и поэтому не всегда применимы для исследования поведения решений, начинающихся на множестве $B \subset R^{n+1}$. Для равномерной ограниченности решений в работе [2] получен критерий, который обобщает соответствующий результат Иошизавы и лишен недостатков, связанных с глобальностью постановки вопроса. Тем не менее, практическое применение даже результатов работы [2] затруднительно из-за отсутствия методов вычисления верхних границ ограниченных решений. Однако, например, при расчете электрических цепей именно такая оценка играет главную роль [3, 4]. В работах [4, 5] эта трудность преодолевается применением принципа сравнения [6], когда задача сводится к вычислению верхних границ для решений известных уравнений. Но здесь решение существенно зависит от конфигурации электрической цепи, которая влияет на размерность исследуемой системы. Поэтому объем вычислительных работ растет с ростом порядка системы. В настоящей работе решение задачи не зависит от размерности пространства.

2. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \tag{1}$$

где $f \in C([T, c) \times D, R^n)$, $T < c \leq +\infty$, $D = \{x\colon \|x\| \leq \rho_0\}$.

Теорема 1. *Пусть* $V\colon [T, c) \times D_0 \to (0, +\infty)$, $D_0 = \{x\colon 0 < r_0 \leq \|x\| \leq \rho_1\}$, $\rho_1 < \rho_0$; $V_0\colon [r_0, \rho_1] \to (0, +\infty)$ *строго монотонно возрастающая. Тогда если*:

a) $V(t, x(t)) = V_1(t, x(t))\, V_0(\|x(t)\|)$ — *невозрастающая функция для любого решения* $x(t\colon t_0, x_0)$, $r_0 \leq \|x_0\| \leq \rho_2$, $\rho_2 < \rho_1$, $T \leq t_0 < c$, $t \geq t_0$;

b) $0 < c_0 \leq V_1(t, x) \leq c_1 < +\infty$;

c) $R_0 = V_0(r_0) \leq c_1 / c_0 V_0(\rho_2) \leq V_0(\rho_1) = R_1$;

то все решения уравнения (1) $x(t\colon t_0, x_0)$, $t_0 \geq T$, $t \geq t_0$, $\|x_0\| \leq \rho_2$, *равномерно ограничены и*

$$\|x(t\colon t_0, x_0)\| \leq V_0^{-1}(K_0), \tag{2}$$

где $K_0 = \dfrac{c_1}{c_0} V_0(\rho_2)$, V_0^{-1} — *функция, обратная функции* V_0.

Доказательство. Так как

$$c_0 V_0(\|x(t)\|) \leq V(t, x(t)) \leq V_0(t_0, x_0) \leq c_1 V_0(\|x_0\|) \leq c_1 V_0(\rho_2)$$

для любого решения $x(t) = x(t\colon t_0, x_0)$, $r_0 \leq \|x_0\| \leq \rho_2$, $t \geq t_0$, то

$$V_0(\|x(t)\|) \leq \frac{c_1}{c_0} V_0(\rho_2). \tag{3}$$

Для функции $V_0\colon [r_0, \rho_1] \to (0, +\infty)$ существует обратная $V_0^{-1}\colon [R_0, R_1] \to \to [r_0, \rho_1]$. Тогда из неравенства (3) получаем неравенство (2). Из этого же неравенства вытекает равномерная ограниченность решений $x(t) = x(t\colon t_0, x_0)$, $t_0 \geq T$, $t \geq t_0$, $\|x_0\| \leq \rho_2$.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия теоремы* 1 *и существуют функции* $W \in C([T, c) \times D, (0, +\infty))$, $W_0 \in C([0, +\infty), (0, +\infty))$ *такие, что:*

a) W_0 *строго монотонно возрастающая на множестве* $[r_0, \rho_1]$;

b) $K_0 \geq W(\omega, x(\omega))$ *при любых* $x(t\colon T, x_0)$, $\|x_0\| \leq \rho_2$, $T < \omega < c$;

c)
$$\lim_{t \to \omega - 0} \frac{W(t, r)}{W_0(\|r\|)} = K, \; 0 < k < +\infty,$$

равномерно по $r \in R^n$, $W_0(r_0) \leq K_0 / K \leq W_0(\rho_1)$.

Тогда если $W_0^{-1}(K_0 / K) \leq \rho_2$, *то* $\|x(\omega)\| \leq \rho_2$ *для всех* $x(t) = x(t\colon T, x_0)$, $\|x_0\| \leq \rho_2$.

Доказательство. На основании теоремы 1 все решения $x(t\colon T, x_0)$, $\|x_0\| \leq \rho_2$ определены и равномерно ограничены при $T \leq t \leq \omega$. Тогда

$$K = \lim_{t \to \omega - 0} \frac{W(t, x(t))}{W_0(\|x(t)\|)} \leq \frac{K_0}{\lim\limits_{t \to \omega - 0} W_0(\|x(t)\|)} = \frac{K_0}{W_0(\|x(\omega)\|)}.$$

Поэтому $W_0(\|x(t)\|) \leq K_0 / K$. Отсюда

$$\|x(\omega)\| \leq W_0^{-1}\left(\frac{K_0}{K}\right) \leq \rho_2$$

для всех решений $x(t\colon T, x_0)$, $\|x_0\| \leq \rho_2$.

***Следствие* 1.** *Пусть* $c = +\infty$ и $f \in c^{(0,1)}([T, +\infty) \times D, R^n)$. *Тогда если* $f(t + \omega, x) = f(t, x)$ *при всех* x, $\|x\| \leq \rho_2$, *то уравнение* (1) *в* $D_1 = \{x : \|x\| \leq \leq \rho_2\}$ *имеет* ω*-периодическое решение.*

Теорема 3. *Пусть*

$$I(x) = \int_T^C \|f(s, x)\| ds, \; x \in D_0, \; I(x) \leq I_0(\|x\|), \; I \in C(D_0, R_+^1), \; I_0 \in C([r_0, \rho_1]),$$

I_0 — *строго монотонно возрастающая и*

$$\int_0^{r_0} \frac{d\alpha}{I_0(\alpha)} \leq e \int_0^{\rho_2} \frac{d\alpha}{I_0(\alpha)} \leq \int_0^{\rho_1} \frac{d\alpha}{I_0(\alpha)}, \quad \sup_{x \in D_1} I(x) = P_0 \; .$$

Тогда, если функция $\dfrac{\|f(s, x)\|}{I(x)}$ *удовлетворяет условию Липшица*

$$\left| \frac{\|f(s, x_1)\|}{I(x_1)} - \frac{\|f(s, x_2)\|}{I(x_2)} \right| \leq \varphi(s) \|x_1 - x_2\| \;\; \textit{при всех} \;\; x_1, x_2 \in D_1,$$

$$\int_0^C \varphi(s) ds = P, \quad \int_0^{r_0} \frac{d\alpha}{I_0(\alpha)} \geq \frac{1}{1 - PP_0}, \quad PP_0 < 1,$$

то функции

$$V(t, x) = \exp\left(-\int_T^t \frac{\|f(s, x)\|}{I(x)} ds\right) \int_0^{\|x\|} \frac{d\alpha}{I_0(\alpha)}, \qquad V_0(\|x\|) = \int_0^{\|x\|} \frac{d\alpha}{I_0(\alpha)}$$

удовлетворяют условиям теоремы 1.

Доказательство. Выполнимость условий b) и c) теоремы 1 здесь очевидна. Докажем справедливость условия a), которое вытекает из неравенства

$$V'(t, x) \overset{\text{def}}{=} \overline{\lim_{\gamma \to +0}} \frac{1}{\delta}[V(t+\delta, x+\delta f(t, x)) - V(t, x)] \le 0.$$

Запишем правую верхнюю производную Дини $\overline{V'(t, x)}$:

$$\overline{V'(t, x)} = \overline{\lim_{\gamma \to +0}} \frac{1}{\delta}\left\{\int_0^{\|x\|} \frac{d\alpha}{I_0(\alpha)}\left[\exp\left(-\int_T^{t+\delta} \frac{\|f(s, x+\delta f(t, x))\|}{I(x+\delta f(t, x))} ds\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \exp\left(-\int_T^t \frac{\|f(s, x)\|}{I(x)} ds\right)\right] + \exp\left(-\int_T^{t+\delta} \frac{\|f(s, x+\delta f(t, x))\|}{I(x+\delta f(t, x))} ds\right) \int_{\|x\|}^{\|x+\delta f(t, x)\|} \frac{d\alpha}{I_0(\alpha)}\right\}$$

Тогда

$$\overline{\lim_{\delta \to +0}} \frac{1}{\delta} \exp\left(-\int_T^{t+\delta} \frac{\|f(s, x+\delta f(t, x))\|}{I(x+\delta f(t, x))} ds\right) \int_{\|x\|}^{\|x+\delta f(t, x)\|} \frac{d\alpha}{I_0(\alpha)} \le$$

$$\le \exp\left(-\int_T^t \frac{\|f(s, x)\|}{I(x)} ds\right) \frac{\|f(t, x)\|}{I(x)}, \tag{4}$$

$$\overline{\lim_{\delta \to +0}} \frac{1}{\delta}\left(\exp\left(-\int_T^{t+\delta} \frac{\|f(s, x)\|}{I(x)} ds\right) - \exp\left(-\int_T^t \frac{\|f(s, x)\|}{I(x)} ds\right)\right) =$$

$$= -\exp\left(-\int_T^t \frac{\|f(s, x)\|}{I(x)} ds\right) \frac{\|f(t, x)\|}{I(x)}, \tag{5}$$

$$\overline{\lim_{\delta \to +0}} \frac{1}{\delta}\left(\exp\left(-\int_T^{t+\delta} \frac{\|f(s, x+\delta f(t, x))\|}{I(x+\delta f(t, x))} ds\right) - \exp\left(-\int_T^{t+\delta} \frac{\|f(s, x)\|}{I(x)} ds\right)\right) \le$$

$$\le \exp\left(-\int_T^t \frac{\|f(s, x)\|}{I(x)} ds\right) \frac{\|f(t, x)\|}{I(x)} PP_0. \tag{6}$$

Учитывая неравенства (4) – (6), получаем

$$\overline{V'(t, x)} \le \exp\left(-\int_T^t \frac{\|f(s, x)\|}{I(x)} ds\right) \frac{\|f(t, x)\|}{I(x)}\left[1 - \int_0^{\|x\|} \frac{d\alpha}{I_0(\alpha)}(1 - PP_0)\right] \le 0, \tag{7}$$

$$T \le t < c, \quad r_0 \le \|x\| \le \rho_1.$$

Из неравенства (7) вытекает условие a).

В некоторых случаях на практике [4] уравнение (1) рассматривается при более общих условиях [5]. Рассмотрим случай, когда функция f типа Каратеодори и имеет скалярную мажоранту.

Будем говорить, что функция $f: [T, c) \times D \to R^n$ типа Каратеодори, если она непрерывна по второй переменной при любом фиксированном значении первой переменной и измерима по первой переменной при каждом $x \in D$. В работе [2] дан критерий равномерной ограниченности решений для уравнения (1), когда правая часть — типа Каратеодори. В дальнейшем такие уравнения будем называть уравнениями типа Каратеодори. Именно такие уравнения (1) сейчас и рассмотрим.

Теорема 4. *Пусть* $\lambda: [T, c) \times R_+^1 \to R_+^1$ *типа Каратеодори,* $\lambda(t, \alpha_1) \leq \lambda(t, \alpha_2)$ *при* $\alpha_1 \leq \alpha_2$ *и* $\forall\, t \in [T, c)$. *Тогда, если:*

1) $I(\alpha) = \int_T^c \lambda(t, \alpha)\, dt$ *существует и непрерывна* $\forall\, \alpha \in R_+^1$; $1 / I(\alpha)$ *непрерывна при* $0 \leq \alpha_0 \leq \alpha < +\infty$;

2)
$$V_0(\rho) = \int\limits_{\alpha_0}^{\rho} \frac{d\alpha}{I(\alpha)} < 1$$

при $\rho \geq \rho_0 > \alpha_0 \geq 0$ *и* V_0 *строго монотонно возрастающая на множестве* $[\rho_0, +\infty)$;

3)
$$\overline{\lim_{h \to +0}}\ \frac{1}{h} \int\limits_t^{t+h} \lambda(s, \alpha(s))\, ds \leq \lambda(t, \alpha(t))$$

при любом $t \in [T, c)$ *и любой абсолютно непрерывной функции* $\alpha(s)$ *на компакте*;

4) *функция*

$$q(t, \alpha) = \int\limits_T^t \frac{\lambda(s, \alpha)}{I(\alpha)}\, ds$$

определена и непрерывна на множестве $[T, c) \times R_+^1$, $q(t, \alpha_1) \leq q(t, \alpha_2)$ *при* $\alpha_1 \leq \alpha_2$ *и* $\forall\, t \in [T, c)$, $q(t, \alpha(t))$ *абсолютно непрерывна в окрестности* t, *если* $\alpha(t)$ *такова*;

5) *при некотором* $\bar{\rho} > \rho$

$$\int\limits_{\alpha_0}^{\bar{\rho}} \frac{d\alpha}{I(\alpha)} > e \int\limits_{\alpha_0}^{\rho} \frac{d\alpha}{I(\alpha)};$$

то решения уравнения

$$\frac{dz}{dt} = \lambda(t, z),$$

начинающиеся на множестве $P_1 = \{(t, z): T \leq t \leq c,\ z \in R_+^1,\ z \leq \rho\}$, *равномерно ограничены и*

$$z(t: t_0, z_0) \leq V_0^{-1}(K_0), \quad t_0 \geq T, \ z_0 \leq \rho, \tag{8}$$

где

$$K_0 = e V_0(\rho), \quad V_0(\rho) = \int\limits_{\alpha_0}^{\rho} \frac{d\alpha}{I(\alpha)}.$$

Доказательство. Равномерная ограниченность решений доказана в статье [2]. Оценка (8) получается следующим образом. Так как

$$V(t, z) = \exp\left(-\int_{t_0}^{t} \frac{\lambda(s, z)}{I(z)} ds\right) \int_{\alpha_0}^{z} \frac{d\alpha}{I(\alpha)},$$

где $(t, z) \in \Omega_{\rho_0} = \{(t, z) : \alpha_0 < \rho_0 \le z,\ T \le t_0 \le t < c\}$,

$$\frac{1}{e} V_0(z(t)) \le V(t, z(t)) \le V(t_0, z_0) \le \int_{\alpha_0}^{\rho} \frac{d\alpha}{I(\alpha)},$$

$z(t) = z(t : t_0, z_0)$, $t_0 \ge T$, $z_0 \le \rho$. Теорема доказана.

Теорема 5. *Пусть уравнение* (1) *типа Каратеодори и*

$$\|f(t, x)\| \le \lambda(t, \|x\|), \quad p = \{(t, x) : T \le t < c,\ \|x\| \le \rho\},$$

где λ — *функция, удовлетворяющая условиям теоремы* 4. *Тогда решения уравнения* (1), *начинающиеся на множестве* P, *равномерно ограничены и* $\|x(t : t_0, x_0)\| \le V_0^{-1}(K_0)$, $t_0 \ge T$,

$$\|x_0\| \le \rho, \quad K_0 = eV_0(\rho), \quad V_0(\rho) = \int_{\alpha_0}^{\rho} \frac{d\alpha}{I(\alpha)}.$$

Доказательство теоремы вытекает из теоремы 2.2.5 [6], теоремы 4 и теоремы сравнения [7].

1. *Yoshizava T.* Liapunov's function and boundedness of solutions // Funktial. Ekvac. – 1959. – **2**. – P. 71 – 103.
2. *Воскресенский Е. В.* О равномерной ограниченности решений // Дифференц. уравнения. – 1988. – **24**, № 2. – С. 346 – 348.
3. *Кудрявцев Л. Д.* О некоторых математических вопросах теории электрических цепей // Успехи мат. наук. – 1948. – **3**, № 4 (26). – С. 80 – 118.
4. *Черноиванова Е. А.* Математическое моделирование в электротехнике и методы интегрирования дифференцальных уравнений электрических цепей: Дис. … канд. физ.-мат. наук. – Саранск, 1990. – 112 с.
5. *Воскресенский Е. В., Черноиванова Е. А.* Асимптотические свойства дифференциальных уравнений электрических цепей // Методы сравнения и методы Ляпунова. – Саранск, 1990. – С. 106 – 110.
6. *Воскресенский Е. В.* Методы сравнения в нелинейном анализе. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1990. – 224 с.
7. *Руш Н., Абетс П., Лалуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. – М.: Мир, 1980. – 300 с.

Получено 24. 06. 91