УДК 517.911

О. П. Свистун, асп. (Ин-т математики АН Украины, Киев)

О СУЩЕСТВОВАНИИ КУСОЧНО-НЕПРЕРЫВНЫХ СЕПАРАТРИСНЫХ КРИВЫХ ОДНОГО КЛАССА ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ

Sufficient conditions of existence of piecewise continuous separatrix curves are obtained for a certain class of systems of differential equations with pulse influence for small $\varepsilon \geq 0$.

Наведені достатні умови існування кусково-неперервних сепаратрисних кривих одного класу систем деференціальних рівнянь з імпульсним збуренням при малих $\varepsilon \geq 0$.

Будем рассматривать систему линейных дифференциальных уравнений, подверженных импульсному воздействию

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\tau, \varphi), \tag{1}$$

$$\frac{d\tau}{dt} = 1, \tag{2}$$

$$\frac{dx}{dt} = p_1 x + \varepsilon p_{12}(\tau, \varphi) y, \tag{3}$$

$$\frac{dy}{dt} = \varepsilon p_{21}(\tau, \varphi) x + p_2 y, \quad \tau \neq 2\pi\nu, \tag{4}$$

$$\Delta x|_{\tau = 2\pi\nu} = I_1(\varphi) x + \varepsilon I_{12}(\varphi) y, \tag{5}$$

$$\Delta y|_{\tau = 2\pi\nu} = \varepsilon I_{21}(\varphi) x + I_2(\varphi) y, \quad \nu = \pm 1, \pm 2, \dots . \tag{6}$$

Здесь ε — малый положительный параметр,

$$0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0; \quad \varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m) \in \mathrm{T}_m; \qquad x, y \in D,$$

D — ограниченная область пространства E_1, $t \in R$.

Предположим, что правая часть системы (1) – (6) удовлетворяет следующим условиям.

1. Вектор-функция $a(\tau, \varphi)$ — непрерывная периодическая по переменным $\tau, \varphi_1, \dots, \varphi_m$ функция с периодом 2π и удовлетворяет условиям Липшица по каждой компоненте φ_i, $i = \overline{1, m}$.

2. Функции $p_{12}(\tau, \varphi)$ и $p_{21}(\tau, \varphi)$ непрерывные и 2π-периодические по всем своим переменным.

Обозначим

$$M_1 = \max_{\tau \in \mathrm{T}_1,\, \varphi \in \mathrm{T}_m} |p_{12}(\tau, \varphi)|,$$

$$M_2 = \max_{\tau \in \mathrm{T}_1,\, \varphi \in \mathrm{T}_m} |p_{21}(\tau, \varphi)|.$$

3. Функции $I_i(\varphi)$, $I_{ij}(\varphi)$, $i, j = 1, 2$, непрерывные 2π-переодические по каждой компоненте $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ и удовлетворяют следующим ограничениям:

$$\max_{\varphi \in \mathrm{T}_m} (|I_{12}(\varphi)|, |I_{21}(\varphi)|) \leq N, \quad \forall\, \varphi \in \mathrm{T}_m \quad \alpha < |1 + I_1(\varphi)| < \beta,$$

α, β — положительные постоянные. Также предполагается, что для каждого

$\varphi \in T_m$ $I_1(\varphi) = I_2(\varphi)$.

4. p_1, p_2 — скаляры, причем для произвольного $\varphi \in T_m$

$$p_1 + (1/2\pi)\ln(1 + I_1(\varphi)) > 0 \text{ и } \lambda = p_2 - p_1 < 0.$$

Введем функцию

$$I_0(\varphi; u) = \frac{I_{21}(\varphi) - I_{12}(\varphi)u^2}{1 + I_1(\varphi) + \varepsilon I_{12}(\varphi)u}.$$

В работах [1 – 3] (см. также [4]) исследовалось существование инвариантных множеств некоторых классов систем дифференциальных уравнений. Вопросы существования сепаратрисных множеств дифференциальных уравнений этой системы при малых $\varepsilon > 0$ исследовались в работах [5, 6].

Рассмотрим задачу существования кусочно-непрерывного сепаратрисного множества системы (1) – (6). Данная работа является продолжением исследований [7], где для рассматриваемой системы найдены условия существования и дан метод отыскания сепаратрисных кривых, определяемых непрерывными функциями.

Для системы (1) – (6) справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть правая часть системы* (1) – (6) *удовлетворяет условиям* 1 – 4. *Тогда можно указать достаточно малое* $\varepsilon_0 > 0$ *такое, что для всех* ε, $0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0$ *система уравнений* (1) – (6) *имеет семейство сепаратрисных кривых* $y = u(\tau, \varphi, \varepsilon)x$, *где* $u(\tau, \varphi, \varepsilon)$ — 2π*-периодическая функция по* $\tau, \varphi_1, \ldots$ $\ldots, \varphi_m$, *кусочно-непрерывная по* $\tau \in R$ *и*

$$\Delta u(\tau + t; \varphi_t(\tau, \varphi); \varepsilon)|_{t+\tau = 2\pi\nu} = \varepsilon I_0(\varphi_\nu; u(2\pi\nu; \varphi_\nu; \varepsilon)),$$

$$\varphi_\nu = \varphi_{2\pi\nu - \tau}(\tau, \varphi),$$

$u(\tau, \varphi, \varepsilon) \to 0$, $\varepsilon \to 0$, *равномерно по* $\tau \in T_1$, $\varphi \in T_m$,

$$\| u(\tau, \varphi, \varepsilon) \| = \max_{\tau \in T_1,\, \varphi \in T_m} | u(\tau, \varphi, \varepsilon) | \le L.$$

Доказательство. По аналогии с [7] обозначим через

$$\varphi = \varphi_t(\tau, \varphi), \quad \tau = \tau_t(\tau) = \tau + t$$

решения системы (1), (2), причем при $t = 0$ $\varphi_0 = \varphi$, $\tau_0 = \tau$. При фиксированном φ исходная система принимает вид

$$\frac{dx}{dt} = p_1 x + \varepsilon p_{12}(\tau + t;\ \varphi_t(\tau, \varphi))y, \tag{7}$$

$$\frac{dy}{dt} = \varepsilon p_{21}(\tau + t;\ \varphi_t(\tau, \varphi))x + p_2 y, \quad t \ne 2\pi\nu - \tau, \tag{8}$$

$$\Delta x|_{t = 2\pi\nu - \tau} = I_1(\varphi_\nu)x + \varepsilon I_{12}(\varphi_\nu)y, \tag{9}$$

$$\Delta y|_{t = 2\pi\nu - \tau} = \varepsilon I_{21}(\varphi_\nu)x + I_2(\varphi_\nu)y, \quad \nu = \pm 1, \pm 2, \ldots, \tag{10}$$

где $\varphi_\nu = \varphi_{2\pi\nu - \tau}(\tau, \varphi)$.

Обозначим через

$$x = x_t(\tau, \varphi, \varepsilon; x_0), \qquad y = y_t(\tau, \varphi, \varepsilon; y_0)$$

решения системы (7) – (10) с начальными значениями $x_0 = x_0(\tau, \varphi, \varepsilon; x_0)$, $y_0 = y_0(\tau, \varphi, \varepsilon; y_0)$. Сепаратрисное многообразие ищем в виде

$$y = u(\tau, \varphi, \varepsilon)x, \tag{11}$$

где $u(\tau, \varphi, \varepsilon)$ — кусочно-непрерывная по $\tau \in R$ функция, 2π-периодическая по переменным $\tau, \varphi_1, \ldots, \varphi_m$, и $\|u(\tau, \varphi, \varepsilon)\| \le L$.

Дифференцируя $y = u(\tau + t; \varphi_t(\tau, \varphi); \varepsilon)x$ по t, получаем уравнение Риккати относительно функции $u(\tau + t; \varphi_t; \varepsilon)$:

$$\dot{u} = \lambda u + \varepsilon\{-p_{12}(\tau + t;\ \varphi_t(\tau, \varphi))u^2 + p_{21}(\tau + t;\ \varphi_t(\tau, \varphi))\}. \tag{12}$$

Найдем условие скачка функции $u(\tau + t; \varphi_t(\tau, \varphi); \varepsilon)$. Для этого рассмотрим

$$\Delta y|_{t = t_\nu} = u|_{t = t_\nu +} x|_{t = t_\nu +} - u|_{t = t_\nu -} x|_{t = t_\nu -} =$$

$$= \Delta u|_{t = t_\nu} x|_{t = t_\nu +} + \Delta x|_{t = t_\nu} u|_{t = t_\nu -}, \tag{13}$$

где T_ν — моменты импульсного воздействия.

Легко видеть, что в случае $\varepsilon = 0$

$$\Delta u|_{t = 2\pi\nu - \tau} = \frac{I_2(\varphi_\nu) - I_1(\varphi_\nu)}{1 + I_1(\varphi_\nu)} u, \quad \nu = \pm 1; \pm 2; \ldots .$$

Пэтому в силу предположения 3 теоремы 1 сепаратрисное многообразие имеет вид: $y \equiv 0$.

В нетривиальном случае $(\varepsilon > 0)$, подставляя в (13) значения Δx и Δy из (9) и (10), получаем

$$\varepsilon I_{21}(\varphi_\nu) + I_1(\varphi_\nu)u =$$

$$= \Delta u|_{t = 2\pi\nu - \tau}\ \{1 + I_1(\varphi_\nu) + \varepsilon I_{12}(\varphi_\nu)u\} + I_1(\varphi_\nu)u + \varepsilon I_{12}(\varphi_\nu)u^2.$$

И, окончательно,

$$\Delta u(t + \tau; \varphi_t(\tau, \varphi); \varepsilon)|_{t = 2\pi\nu - \tau} = \varepsilon I_0(\varphi_\nu; u(2\pi\nu; \varphi_\nu; \varepsilon)). \tag{14}$$

Таким образом, исходная задача свелась к отысканию решения уравнения (12) при условии (14), 2π-периодического по $\tau, \varphi_1, \ldots, \varphi_m$, такого, что

$$\|u(\tau, \varphi, \varepsilon)\| = \max_{\tau \in \mathrm{T}_1,\ \varphi \in \mathrm{T}_m} |u(\tau, \varphi, \varepsilon)| \le L.$$

Для отыскания сепаратрисных кривых (11), следуя [1], применяем простой итерационный процесс, состоящий в том, что инвариантное множество $u = u(\tau, \varphi, \varepsilon)$ ищем как предел последовательности множеств $u = u_n(\tau, \varphi, \varepsilon)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, каждое из которых является инвариантным множеством системы уравнений

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\tau, \varphi), \quad \frac{d\tau}{dt} = 1,$$

$$\dot{u} = \lambda u + \varepsilon\{-p_{12}(\tau, \varphi)u_{n-1}^2 + p_{21}(\tau, \varphi)\}, \quad \tau \ne 2\pi\nu,$$

$$\Delta u|_{\tau = 2\pi\nu} = \varepsilon I_0(\varphi;\ u_{n-1}(2\pi\nu;\ \varphi;\ \varepsilon)).$$

Положим $u_0 \equiv 0$ и рассмотрим систему

$$\dot{u}_1 = \lambda u_1(\tau + t;\ \varphi_t(\tau, \varphi);\ \varepsilon) + \varepsilon p_{21}(\tau + t;\ \varphi_t(\tau, \varphi)), \quad t \neq 2\pi\nu - \tau,$$

$$\Delta u_1(\tau + t;\ \varphi_t(\tau, \varphi);\ \varepsilon)|_{t = 2\pi\nu - \tau} = \varepsilon I_0(\varphi_\nu;\ 0).$$

Ограниченное решение этой системы имеет вид

$$u_1(\tau + t;\ \varphi_t(\tau, \varphi);\ \varepsilon) = \varepsilon \int\limits_{-\infty}^{t} e^{\lambda(t - s)} p_{21}(\tau + s;\ \varphi_s(\tau, \varphi))\, ds +$$

$$+ \varepsilon \sum_{-\infty < 2\pi\nu - \tau < t} e^{\lambda(t - 2\pi\nu + \tau)} I_0(\varphi_\nu;\ 0), \tag{15}$$

при $t = 0$ —

$$u_1(\tau, \varphi, \varepsilon) = \varepsilon \int\limits_{-\infty}^{0} e^{-\lambda s} p_{21}(\tau + s;\ \varphi_s(\tau, \varphi))\, ds +$$

$$+ \varepsilon \sum_{-\infty < 2\pi\nu - \tau < 0} e^{\lambda(-2\pi\nu + \tau)} I_0(\varphi_\nu;\ 0). \tag{16}$$

Заметим, что

$$u_1(\tau + 2\pi;\ \varphi + 2\pi;\ \varepsilon) = u_1(\tau, \varphi, \varepsilon)$$

и, если вместо τ, φ в (16) подставить $\tau + t$, $\varphi_t(\tau, \varphi)$, то получим (15). Из (16) с учетом условий 2, 3 теоремы имеем

$$\| u_1(\tau, \varphi, \varepsilon) \| \le \varepsilon \left(\frac{M_2}{|\lambda|} + \frac{1}{1 - e^{2\pi\lambda}} \frac{N}{\alpha} \right).$$

При достаточно малых ε будет выполняться неравенство

$$\varepsilon \left(\frac{M_2}{|\lambda|} + \frac{1}{1 - e^{2\pi\lambda}} \frac{N}{\alpha} \right) \le L$$

и, следовательно, $\| u_1(\tau, \varphi, \varepsilon) \| \le L$.

Пусть для $k = \overline{1, n - 1}$ при $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$ найдены кусочно-непрерывные 2π-периодические по $\tau, \varphi_1, \ldots, \varphi_m$ инвариантные множества $u_k(\tau, \varphi, \varepsilon)$ такие, что $\| u_k(\tau, \varphi, \varepsilon) \| \le L$. Тогда при $k = n$ получаем

$$u_n(\tau, \varphi, \varepsilon) = \varepsilon \int\limits_{-\infty}^{0} e^{-\lambda s} \{ p_{12}(\tau + s;\ \varphi_s(\tau, \varphi))\, u_{n-1}^2(\tau +$$

$$+ s;\ \varphi_s(\tau, \varphi);\ \varepsilon) + p_{21}(\tau + s;\ \varphi_s(\tau, \varphi)) \}\, ds +$$

$$+ \varepsilon \sum_{-\infty < 2\pi\nu - \tau < 0} e^{\lambda(-2\pi\nu + \tau)} I_0(\varphi_\nu;\ u_{n-1}(0;\ \varphi_\nu;\ \varepsilon)). \tag{17}$$

Заметим, что

$$u_n(\tau + 2\pi;\ \varphi + 2\pi;\ \varepsilon) = u_n(\tau, \varphi, \varepsilon).$$

Всякий раз, когда ε выбрано из условия выполнения неравенства

$$\varepsilon NL < \frac{\alpha}{2},$$
$$\varepsilon\left(\frac{M_1L^2}{|\lambda|} + \frac{M_2}{|\lambda|} + \frac{2N(1+L^2)}{\alpha}\frac{1}{1-e^{2\pi\lambda}}\right) \le L, \tag{18}$$

следует оценка

$$|u_n(\tau,\varphi,\varepsilon)| \le \varepsilon\int_{-\infty}^{0} e^{-\lambda s}\{M_1|u_{n-1}(\tau+s,\varphi_s,\varepsilon)|^2 + M_2\}\,ds +$$
$$+\ \varepsilon\sum_{-\infty<2\pi\nu-\tau<0}\left(\frac{2N}{\alpha}(1+|u_{n-1}(0,\varphi_\nu,\varepsilon)|^2)\,e^{\lambda(-2\pi\nu+\tau)}\right) \le$$
$$\le \varepsilon\left(\frac{M_1L^2}{|\lambda|} + \frac{M_2}{|\lambda|} + \frac{2N(1+L^2)}{\alpha}\ \frac{1}{1-e^{2\pi\lambda}}\right),$$

т. е. $\|u_n(\tau,\varphi,\varepsilon)\| \le L$ и все итерации не выходят из заданной области.

Теперь оценим разность двух последовательных приближений

$$|u_{n+1}(\tau,\varphi,\varepsilon) - u_n(\tau,\varphi,\varepsilon)| \le$$
$$\le \varepsilon\int_{-\infty}^{0} 2M_1L\,e^{-\lambda s}\,|u_n(\tau+s;\varphi_s(\tau,\varphi);\varepsilon) -$$
$$-\ u_{n-1}(\tau+s;\varphi_s(\tau,\varphi);\varepsilon)|\,ds + \varepsilon\sum_{-\infty<2\pi\nu-\tau<0}\frac{2N}{\alpha}\left(\frac{1}{L} +\right.$$
$$\left. +\ L + \frac{4\beta}{\alpha}L\right)e^{\lambda(-2\pi\nu+\tau)}\,|u_n(0;\varphi_\nu;\varepsilon) - u_{n-1}(0;\varphi_\nu;\varepsilon)| \le$$
$$\le \varepsilon\left(\frac{2M_1L}{|\lambda|} + \frac{2N}{\alpha}\left(\frac{1}{L} + L + \frac{4\beta}{\alpha}L\right)\frac{1}{1-e^{2\pi\lambda}}\right)\|u_n(\tau,\varphi,\varepsilon) - u_{n-1}(\tau,\varphi,\varepsilon)\|.$$

Последняя оценка при условии

$$\varepsilon\left(\frac{2M_1L}{|\lambda|} + \frac{2N}{\alpha}\left(\frac{1}{L} + L + \frac{4\beta}{\alpha}L\right)\frac{1}{1-e^{2\pi\lambda}}\right) < \frac{1}{2} \tag{19}$$

обеспечивает равномерную относительно $\tau \in R$, $\varphi \in \mathrm{T}_m$ сходимость последовательности функций $u_n(\tau,\varphi,\varepsilon)$.

Ясно, что по M_1, M_2, N, L, α, λ можно выбрать такое $\varepsilon_0 > 0$, чтобы выполнялись неравенства (18), (19) для произвольного $\varepsilon \in (0;\varepsilon_0]$.

Пусть

$$u(\tau,\varphi,\varepsilon) = \lim_{n\to\infty} u_n(\tau,\varphi,\varepsilon).$$

В силу равномерной сходимости последовательности $u_n(\tau,\varphi,\varepsilon)$ предельная функция $u(\tau,\varphi,\varepsilon)$ 2π-периодическая по $\tau, \varphi_1, \ldots, \varphi_m$, кусочно-непрерывная по τ и $\|u(\tau,\varphi,\varepsilon)\| \le L$. Переходя к пределу в равенстве (17), убеждаемся, что искомая функция удовлетворяет равенству

$$u(\tau, \varphi, \varepsilon) = \varepsilon \int\limits_{-\infty}^{0} e^{-\lambda s} \{-p_{12}(\tau + s; \varphi_s(\tau, \varphi))\, u^2(\tau + s; \varphi_s(\tau, \varphi); \varepsilon) +$$

$$+ p_{21}(\tau + s; \varphi_s(\tau, \varphi))\}\, ds + \varepsilon \sum_{-\infty < 2\pi\nu - \tau < 0} e^{\lambda(-2\pi\nu + \tau)} I_0(\varphi_\nu; u(0; \varphi_\nu; \varepsilon)).$$

Нетрудно показать, что полученная функция $u = u(\tau + t; \varphi_t(\tau, \varphi); \varepsilon)$ удовлетворяет уравнению (12) и условию (14). Следовательно, существует сепаратрисная кривая (11), на которой исходная система приводится к виду

$$\frac{dx}{dt} = (p_1 + \varepsilon p_{12}(\tau + t; \varphi_t(\tau, \varphi))\, u(\tau + t; \varphi_t(\tau, \varphi); \varepsilon))x, \quad t \neq 2\pi\nu - \tau,$$

$$\Delta x|_{t = 2\pi\nu - \tau} = (I_1(\varphi_\nu) + \varepsilon I_{12}(\varphi_\nu)\, u(0; \varphi_\nu; \varepsilon))x, \quad \nu = \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

где $x = x_t(\tau, \varphi, \varepsilon; x_0)$ — решение этой системы.

Тогда

$$\varphi = \varphi_t(\tau, \varphi), \quad \tau = \tau_t(\tau) = \tau + t, \quad x = x_t(\tau, \varphi, \varepsilon; x_0),$$

$$y = y_t(\tau, \varphi, \varepsilon; y_0) = u(\tau + t; \varphi_t(\tau, \varphi); \varepsilon)\, x_t(\tau, \varphi, \varepsilon; x_0)$$

являются решением исходной системы (1) – (6), и движения x_t, y_t, начинающиеся при $t = 0$ на сепаратрисной кривой (11), затухают при $t \to -\infty$.

Аналогичный результат справедлив, когда сепаратрисную кривую ищем в виде $x = v(\tau, \varphi, \varepsilon)y$. В этом случае движения x_t, y_t, начинающиеся при $t = 0$ на данной сепаратрисной кривой, затухают при $t \to +\infty$.

1. *Перестюк Н. А.* Инвариантные множества одного класса разрывных динамических систем // Укр. мат. журн. – 1984. – **36**, №1. – С. 63 – 68.
2. *Самойленко А. М.* О сохранении инвариантного тора при возмущении // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1970. – **34**, №6. – С. 1219 – 1240.
3. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Вища шк., 1987. – 286 с.
4. *Ткаченко В. И.* Функция Грина и условия существования инвариантных множеств импульсных систем // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, №10. – С. 1379 – 1383.
5. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л.* Исследование дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова. – Киев: Наук. думка, 1990. – 272 с.
6. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний // Инвариантные торы. – М.: Наука, 1987. – 242 с.
7. *Свистун О. Н.* О сепаратрисных кривых семейства линейных систем с импульсным воздействием // Укр. мат. журн. – 1993. – **45**, №12. – С. 1682 – 1687.

Получено 27. 04. 93