УДК 517 518.45

С. А. Теляковский, д-р физ.-мат. наук (Мат. ин-т АН России, Москва)

ОЦЕНКИ МОДУЛЯ НЕПРЕРЫВНОСТИ В МЕТРИКЕ L ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ ЧЕРЕЗ КОЭФФИЦИЕНТЫ ФУРЬЕ

This paper is a survey of results concerning the estimation of the continuity modulus of a function in terms of its Fourier coefficients in the metric L. Upper bounds, lower bounds, and asymptotic estimates of the continuity modulus are presented.

Стаття являє собою огляд результатів, які мають відношення до оцінок значень модуля неперервності в метриці L функції через її коефіцієнти Фур'є. Наводяться оцінки модуля неперервності знизу, зверху і асимптотичні оцінки.

Пусть

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

— ряд Фурье функции $h \in L(-\pi, \pi)$ и $\omega_s(h, \delta)_L = \omega_s(h, \delta)$ — ее модуль непрерывности порядка s в метрике L, т. е.

$$\omega_s(h,\delta) := \sup_{|\sigma| \le \delta} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left|\Delta_\sigma^s h(x)\right| dx,$$

где

$$\Delta_\sigma^s h(x) := \sum_{i=0}^{s} (-1)^i \binom{s}{i} h(x + i\sigma).$$

Цель настоящего обзора — отразить результаты, относящиеся к оценкам значений модуля непрерывности $\omega_s(h, \delta)$ через коэффициенты a_k, b_k. Мы не будем рассматривать исследования, посвященные аналогичной задаче для модулей непрерывности в других метриках, хотя в некоторых из цитируемых работ основное внимание было сосредоточено не на метрике L.

Условимся абсолютные положительные постоянные обозначать через c, а положительные величины, которые могут зависеть только от s, — через c_s. При этом в разных случаях значения c и c_s могут быть различными. Пользуясь O-символами, будем писать O, если оценка является равномерной по всем параметрам, и O_s, если числовой множитель в остаточном члене может зависеть от s.

1. Оценки снизу. По-видимому, исторически первым результатом, относящимся к теме обзора, является оценка

$$|a_n|, |b_n| \le c_s \omega_s(h, 1/n). \tag{1}$$

Для $s = 1$ ее фактически установил А. Лебег [1] при доказательстве аналогичного неравенства для непрерывных функций и модуля непрерывности в метрике C. Это доказательство оценки (1) при $s = 1$ приведено в монографиях А. Зигмунда и Н. К. Бари. Для $s > 1$ ее получил О. Сас ([2], лемма 1) с помощью таких же рассуждений.

Заметим, что в силу монотонности модуля непрерывности оценке (1) можно придать более общий вид

$$\max_{m \ge n} (|a_m|, |b_m|) \le c_s \omega_s(h, 1/n). \tag{2}$$

Для формулировки дальнейших результатов введем обозначения

$$s_1 = \begin{cases} s, & \text{если } s \text{ нечетно,} \\ s+1, & \text{если } s \text{ четно,} \end{cases} \qquad s_2 = \begin{cases} s+1, & \text{если } s \text{ нечетно,} \\ s, & \text{если } s \text{ четно.} \end{cases}$$

Справедливо неравенство

$$\omega_s\left(h, \frac{1}{n}\right) \ge c_s\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{s_1}\frac{a_k}{k} + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{s_2}\frac{b_k}{k}\right) \tag{3}$$

Первые оценки такого типа получили С. Алянчич и М. Томич ([3], теоремы 5 – 8). Они рассматривали четные и нечетные функции (подобное ограничение несущественно) и установили оценки вида (3) для $s \le 2$ при условии неотрицательности коэффициентов a_k для четных функций и монотонного убывания коэффициентов b_k для нечетных функций.

В. Э. Гейт ([4], лемма 4) доказал оценки вида (3) также для четных и нечетных функций для произвольных s при условии неотрицательности коэффициентов a_k, соответственно b_k. Строго говоря, им рассматривались только те случаи, когда число s_1 или s_2 равно s, однако отсюда легко вывести соответствующие оценки для s_1 и s_2, равных $s+1$.

Оценка (3) без каких-либо дополнительных условий установлена в работе С. А. Теляковского [5], где имеется следующий более общий результат. Пусть для последовательности $d = \{d_k\}$

$$U_n(d, s) := \max_{m \ge n,\, m \ge l \ge 1}\left|\sum_{k=l}^{m}\left(\frac{k}{m}\right)^{s}\frac{d_k}{k}\right|.$$

Тогда для произвольной функции $h \in L(-\pi, \pi)$

$$\omega_s(h, 1/n) \ge c_s\left(U_n(a, s_1) + U_n(b, s_2)\right) \tag{4}$$

Заметим, что в оценках (3) и (4) числа s_1 и s_2 нельзя заменить на s. В самом деле, пусть

$$h_s(x) := \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s}\sin\left(kx - \frac{s-1}{2}\pi\right).$$

Элементарный подсчет показывает, что $\omega_1(h_1, \delta) \le \delta$. В силу известных свойств модулей непрерывности $\omega_s(h_s, \delta) \le \delta^{s-1}\omega_1(h_s^{s-1}, \delta)$, а так как $h_s^{s-1}(x) = h_1(x)$, оценка $\omega_s(h_s, \delta) \le \delta^s$ справедлива для всех s. Вместе с тем, из (4) с заменой s_1 и s_2 на s следовало бы $\omega_s(h_s, 1/n) \ge c_s(\log(n+1))/n^s$.

Результаты другого типа можно получать из оценок наилучших приближений. Пусть $E_n(h)_L$ — наилучшее приближение функции $h \in L(-\pi, \pi)$ тригонометрическими полиномами порядка n в метрике L.

В. Э. Гейт ([6], лемма 2) показал, что для каждой функции $h \in L$

$$E_n(h)_L \ge c\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{b_k}{k}\right|.$$

Отсюда в силу теоремы типа теоремы Джексона для приближений в метрике L $E_n(h)_L \le c_s\omega_s(h, 1/n)$ получаем

$$\omega_s\left(h, \frac{1}{n}\right) \geq c_s \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{b_k}{k} \right|. \tag{6}$$

Оценка (5) улучшает результат А. А. Конюшкова ([7], теорема 3), который для функций с неотрицательными синус–коэффициентами Фурье доказал, что

$$E_n(h)_L \geq cn \sum_{k=2n}^{\infty} \frac{b_k}{k^2}.$$

Для нечетных функций с монотонно убывающими коэффициентами Фурье оценка (6) при $s \leq 2$ была установлена С. Алянчичем и М. Томичем ([3], теоремы 6 и 7) до появления работы Гейта [4].

Пользуясь монотонностью последовательности наилучших приближений, оценке (5), а значит, и оценке (6) можно придать более общий вид. Пусть

$$V_n(b) := \max_{M \geq m > n} \left| \sum_{k=m}^{M} \frac{b_k}{k} \right|,$$

тогда $V_n(b) \leq cE_n(h)_L$ и

$$V_n(b) \leq c_s \omega_s(h, 1/n). \tag{7}$$

Отметим, что для функций с неотрицательными коэффициентами результат, вытекающий из (4) и (7), эквивалентен оценке

$$\omega_s\left(h, \frac{1}{n}\right) \geq c_s \left(U_n(a, s_1) + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^{s_2} \frac{b_k}{k} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{b_k}{k} \right). \tag{8}$$

2. Оценки сверху. При оценке значений $\omega_s(h, \delta)$ сверху на коэффициенты Фурье функции h накладываются те или иные (довольно жесткие) условия. Для коэффициентов по косинусам и для коэффициентов по синусам они формулируются отдельно, что позволяет рассматривать только четные и нечетные функции. Так мы и будем поступать в дальнейшем.

Пусть

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx \tag{9}$$

— ряд Фурье функции f и

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx \tag{10}$$

— ряд Фурье функции g. В приводимых ниже результатах на коэффициенты a_k и b_k будут накладываться условия, которые обеспечивают сходимость рядов (9) для $x \in (0, \pi)$ и (10) для всех x, и интегрируемость функций f и g на $[0, \pi]$. При этом мы всегда будем предполагать, что коэффициенты a_k и b_k стремятся к нулю, не оговаривая этого.

Оценки сверху модуля непрерывности функции в метрике L через коэффициенты Фурье впервые получены в работах С. Алянчича и М. Томича [8, 9], где показано, что при определенных условиях на коэффициенты рядов (9) и (10) справедливы оценки, обратные (1).

Затем С. Алянчич получил следующие результаты. Если последовательность $\{a_k\}$ выпукла, то ([10], теорема 1)

$$\omega_s\left(f, \frac{1}{n}\right) \le c_s \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^s \frac{a_k}{k}. \tag{11}$$

Вместе с оценкой (3) это показывает, что при указанных условиях для нечетных s справедливо порядковое соотношение

$$\omega_s\left(f, \frac{1}{n}\right) \sim \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^s \frac{a_k}{k}. \tag{12}$$

А если выпукла последовательность $\{b_k\}$ и сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k / k$, то ([10], теорема 2)

$$\omega_s\left(g, \frac{1}{n}\right) \le c_s \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^s \frac{b_k}{k} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{b_k}{k} \right), \tag{13}$$

откуда с учетом оценок (3) и (6) вытекает, что в этом случае для четных s

$$\omega_s\left(g, \frac{1}{n}\right) \sim \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^s \frac{b_k}{k} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{b_k}{k}, \tag{14}$$

Соотношения (12) при $s = 1$ и (14) при $s = 2$ приведены в ([3], следствия 5 и 7).

Ометим, что результаты, полученные в ([8, 9], теоремы 1, 2), представляют собой условия, достаточные для того, чтобы суммы в правых частях неравенств (11) и (13) можно было оценить через a_n и b_n. Оценки (11) и (13) были вновь доказаны Гейтом ([11], теорема 2).

Кроме того, в ([10], теорема 3) доказано, что если коэффициенты b_k монотонно убывают и сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \log(k+1)\Delta b_k$, то

$$\omega_s\left(g, \frac{1}{n}\right) \le c_s \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^s \log(k+1)\Delta b_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} \log(k+1)\Delta b_k \right) \tag{15}$$

и аналогичное утверждение для рядов по косинусам. При этом неотрицательность разностей Δb_k и Δa_k в доказательстве не использовалась. В [10] фактически были установлены оценки

$$\omega_s\left(f, \frac{1}{n}\right) \le c_s \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^s \log(k+1)\,|\Delta a_k| + \sum_{k=n+1}^{\infty} \log(k+1)\,|\Delta a_k| \right), \tag{16}$$

$$\omega_s\left(g, \frac{1}{n}\right) \le c_s \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^s \log(k+1)\,|\Delta b_k| + \sum_{k=n+1}^{\infty} \log(k+1)\,|\Delta b_k| \right) \tag{17}$$

при условии сходимости рядов в их правых частях. В явном виде эти оценки при $s = 1$ были приведены (без доказательства) в работе М. Идзуми и С. Идзуми ([12], теорема 3). Заметим, что оценку (15) можно записать в эквивалентной форме

$$\omega_s\left(g, \frac{1}{n}\right) \le c_s \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^s \log(k+1)\frac{b_k}{k} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \log(k+1)\frac{b_k}{k} \right). \tag{18}$$

Одновременно с [10] вышла в свет работа Ч. Риса [13], где для рядов с монотонными коэффициентами доказаны оценка

$$\omega_1\left(g, \frac{1}{n}\right) \le c_s \left(\frac{\log(n+1)}{n} \sum_{k=1}^{n} b_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{b_k}{k} \right) \tag{19}$$

и такая же оценка для четных функций.

В работе М. И. Дьяченко ([14], теоремы 5, 6) приведены (без доказательства) следующие утверждения. Пусть для коэффициентов a_k выполняется условие $|a_k| \le k^{-\alpha}$, где $0 < \alpha < 1$. Тогда если последовательность $\{a_k\}$ выпукла, то f удовлетворяет условию Липшица порядка α в метрике L, а если a_k монотонны, то

$$\omega_1(f, \delta) \le c_\alpha \delta^\alpha \log(1/\delta), \quad 0 < \delta < 1/2, \tag{20}$$

причем эта оценка неулучшаема. Такие же результаты справедливы и для нечетных функций. Оценки сверху модуля непрерывности в этих утверждениях вытекают из (11), (14), (18) и аналогичной оценки для функции f.

Т. М. Вуколова [15, 16] рассматривала оценки сверху интегрального модуля непрерывности функций, у которых неотрицательны все разности заданного порядка l последовательности $\{a_k\}$ или $\{b_k\}$. Характер полученных ею оценок таков, что случай $l > 2$ сводится к $l = 2$, а результаты для $l \le 2$ либо повторяют некоторые приведенные выше оценки, либо эквивалентны им. Например, при $l = 2$ вместо (11) можно писать

$$\omega_s\left(f, \frac{1}{n}\right) \le c_s \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^s \Delta a_k + a_{n+1} \right).$$

Оценку (11) можно распространить на более общий случай, заменив условие выпуклости последовательности $\{a_k\}$ на ее квазивыпуклость, т. е. на $\sum_{k=1}^{\infty} k \left|\Delta^2 a_{k-1}\right| < \infty$. В этом случае

$$\omega_s\left(f, \frac{1}{n}\right) \le c_s \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^s k \left|\Delta^2 a_{k-1}\right| + \sum_{k=n+1}^{\infty} k \left|\Delta^2 a_{k-1}\right| \right). \tag{21}$$

Если последовательность $\{a_k\}$ выпукла, то неравенство (21) эквивалентно (11).

При $s = 1$ оценку (20) доказали М. Идзуми и С. Идзуми ([12], теорема 4), а при $s > 1$ она вытекает из приводимого ниже соотношения (22). Отметим, что в ([12], теорема 4) утверждается, что оценка, аналогичная (21) при $s = 1$, справедлива и для рядов по синусам, но это неверно даже в случае выпуклых b_k.

С. А. Теляковский ([17], теорема 1) доказал оценку

$$\omega_s\left(f, \frac{1}{n}\right) \le c_s \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^s |\Delta a_k| + \sum_{k=n+1}^{\infty} |\Delta a_k| + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^s \left| \sum_{i=1}^{[k/2]} \frac{\Delta a_{k-i} - \Delta a_{k+i}}{i} \right| + \sum_{k=n+1}^{\infty} \left| \sum_{i=1}^{[k/2]} \frac{\Delta a_{k-i} - \Delta a_{k+i}}{i} \right| \right) \tag{22}$$

при условии сходимости рядов в правой части (22). Если воспользоваться тем, что

$$\left| \sum_{i=1}^{[k/2]} \frac{\Delta a_{k-i} - \Delta a_{k+i}}{i} \right| = \left| \sum_{i=1}^{[k/2]} \frac{1}{i} \sum_{j=k-i}^{k+i-1} \Delta^2 a_j \right| \le \sum_{i=1}^{[k/2]} \frac{1}{i} \sum_{j=k-i}^{k+i-1} \left|\Delta^2 a_j\right|, \tag{23}$$

то из (22) получаем (21). Пользуясь оценкой

$$\left| \sum_{i=1}^{[k/2]} \frac{\Delta a_{k-i} - \Delta a_{k+i}}{i} \right| \le \sum_{i=1}^{[k/2]} \frac{|\Delta a_{k-i}| + |\Delta a_{k+i}|}{i},$$

видим, что из (22) следует (16).

Соответствующие обобщения оценок для нечетных функций вытекают из результатов, приведенных в следующем пункте.

3. Асимптотические оценки. Оценки (13) можно уточнить следующим образом: если последовательность $\{b_k\}$ выпукла, то

$$\omega_s\left(g, \frac{1}{n}\right) = \frac{2^s}{\pi} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{b_k}{k} + O_s\left(\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^s \frac{b_k}{k} \right). \tag{24}$$

Например, если $b_k = \log^{-2}(k+1)$, то в силу (24) $\omega_s(g, 1/n) = 2^s/\pi \log^{-1}(n+1) + O_s(\log^{-2}(n+1))$, а из (13) получаем $\omega_s(g, 1/n) = O_s(\log^{-1}(n+1))$.

Оценка (24) вытекает из следующего результата: для нечетных функций с квазивыпуклыми коэффициентами Фурье

$$\omega_s\left(g, \frac{1}{n}\right) = \frac{2^s}{\pi} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|b_k|}{k} + O_s\left(\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^s k\left|\Delta^2 b_k\right| + \sum_{k=n+1}^{\infty} k\left|\Delta^2 b_k\right| \right). \tag{25}$$

При $s=1$ оценку (25) доказал С. А. Теляковский в работе [18], а для остальных s она вытекает из соотношения ([17], теорема 2)

$$\omega_s\left(g, \frac{1}{n}\right) = \frac{2^s}{\pi} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|b_k|}{k} + O_s\left(\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^s |\Delta b_k| + \sum_{k=n+1}^{\infty} |\Delta b_k| + \right.$$

$$\left. \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^s \left| \sum_{i=1}^{[k/2]} \frac{\Delta b_{k-i} - \Delta b_{k+i}}{i} \right| + \sum_{k=n+1}^{\infty} \left| \sum_{i=1}^{[k/2]} \frac{\Delta b_{k-i} - \Delta b_{k+i}}{i} \right| \right), \tag{26}$$

которое имеет место при условии сходимости рядов в его правой части. Оценку (25) можно получить из (26), если воспользоваться неравенством (23).

Б. Рам и С. Кумари [19] показали, что если сходится ряд $\sum_k k^2 \left|\Delta^2 (b_k/k)\right|$, то

$$\omega_s\left(g, \frac{1}{n}\right) = O_s\left(\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^s k^2 \left|\Delta^2\left(\frac{b_k}{k}\right)\right| + \sum_{k=n+1}^{\infty} k^2 \left|\Delta^2\left(\frac{b_k}{k}\right)\right| \right). \tag{27}$$

Нетрудно проверить, что этот результат эквивалентен оценке

$$\omega_s\left(g, \frac{1}{n}\right) = O_s\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|b_k|}{k} + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^s k\left|\Delta^2 b_k\right| + \sum_{k=n+1}^{\infty} k\left|\Delta^2 b_k\right| \right), \tag{28}$$

вытекающей из (25).

Оценку (18) С. А. Теляковский ([20], теорема 5) уточнил следующим образом: если коэффициенты b_k монотонно убывают, то

$$\omega_s\left(g, \frac{1}{n}\right) = \frac{2^s}{\pi} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{b_k}{k} + O\left(2^s b_{n+1} \log(n+1)\right) + O\left(\sum_{k=1}^{n} \Delta b_k \left(\frac{k}{n}\right)^s \log(k+1) \right) \tag{29}$$

Последний остаточный член в (29) можно заменить на

$$O\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k}{k}\min(k,\ s)\left(\frac{k}{n}\right)^s\log(k+1)\right),$$

при этом получаем эквивалентное утверждение.

Заметим, что оценку (29) нельзя получить из (26), даже если не следить за характером зависимости остаточного члена от s.

1. *Lebesgue H.* Sur la representation trigonometrique approchee des fonctions satisfaisant a une condition de Lipschits // Bull. Soc. Math. France. – 1910. – **38**. – P. 184–210.
2. *Szasz O.* Fourier series and mean moduli of continuity // Trans. Amer. Math. Soc. – 1937. – **42**. – P. 366–395.
3. *Aljančić S., Tomić M.* Sur la borne inférieure du module de continuité de la fonction exprimée par les coefficients de Fourier // Bull. Acad. Serbe Sc. Arts. – 1967. – **XL**, № 6. – P. 39–51.
4. *Гейт В. Э.* О структурных и конструктивных свойствах функции и ее сопряженной в L // Изв. вузов. Математика. – 1972. – № 7. – С. 19–30.
5. *Теляковский С. А.* Оценки снизу интегрального модуля непрерывности функции через ее коэффициенты Фурье // Мат. заметки. – 1992. – **52**, № 5. – С. 107–112.
6. *Гейт В. Э.* О структурных и конструктивных свойствах синус- и косинус-рядов с монотонной последовательностью коэффициентов Фурье // Изв. вузов. Математика. – 1969. – № 7. – С. 39–47.
7. *Конюшков А. А.* Наилучшие приближения тригонометрическими полиномами и коэффициенты Фурье // Мат. сб. – 1958. – **44**. – С. 53–84.
8. *Aljančić S., Tomić M.*. Sur le module de continuité intégral des séries de Fourier à coéfficients convexes // C. R. Acad. Sc. Paris. – 1964. – **259**. – P. 1609–1611.
9. *Aljančić S., Tomić M.* Über den Stetigkeitsmodul von Fourier–Reihen mit monotonen Koeffizienten // Math. Zeitschrift. – 1965. – **88**. – P. 274–284.
10 *Aljančić S.* Sur le module de continuité des séries de Fourier particulières et sur le module de continuité des series de Fourier transformées par des multiplicateurs de types divers // Bull. Acad. Serbe Sc. Arts. – 1967. – **XL**, № 6. – P. 13–38.
11. *Гейт В. Э* О наилучшем приближении в среднем косинус–ряда с выпуклыми коэффициентами // Изв. вузов. Математика. – 1978. – № 8. – С. 50–55.
12. *Izumi M., Izumi S.* Modulus of continuity of functions defined by trigonometric series // J. Math Anal. and Appl. – 1968. – **24**. – P. 564–581.
13. *Rees C. S.* A bound for the integral modulus of continuity // Ibid. – 1967. – **19**. – P. 469 – 474.
14. *Дьяченко М. И.* О некоторых локальных свойствах функций // Успехи мат. наук. – 1981. **36**, вып. 1 – С. 205–206.
15. *Вуколова Т. М.* Некоторые свойства тригонометрических рядов с монотонными коэффи циентами // Вестн. Моск. ун–та. Математика, механика. – 1984. – № 6. – С.18–23.
16. *Вуколова Т. М.* О рядах по синусам и косинусам с кратно монотонными коэффициентами / Там же. – 1990. – № 5. – С. 38–42.
17. *Теляковский С. А.* Интегрируемость тригонометрических рядов. Оценка интегральноr модуля непрерывности // Мат. сб. – 1973. – **92**. – С.537–553.
18. *Теляковский С. А.* Оценка интегрального модуля непрерывности функции с квазивыпуклыми коэффициентами Фурье // Сиб. мат. журн. – 1970. – **11**. – С. 1140–1145.
19. *Ram B., Kumari S.* On the integral modulus of continuity of Fourier series // Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci. – 1989. – **99**, № 3. – P. 249–253.
20. *Теляковский С. А.* Некоторые свойства рядов по синусам с монотонными коэффициентами // Anal. Math. – 1992. – **18**, № 4 – P. 307–323.

Получено 24. 09. 92