УДК 517.5

Ю. М. Яворський, студ. (Львів. ун-т)

ПРО ОЦІНКУ ВЛАСНИХ ЗНАЧЕНЬ ДЕЯКИХ САМОСПРЯЖЕНИХ ОПЕРАТОРІВ

Estimates of the number of eigenvalues are obtained for perturbations of certain selfadjoint and unitary operators in a Hilbert space. As a special case, we consider a perturbation of the operator of multiplication by an independent variable in $L_2(\mathbb{R})$ and $L_2(0,1)$.

Одержані оцінки числа власних значень збурень деяких самоспряжених і унітарних операторів в гільбертовому просторі. Зокрема, розглядається збурення оператора множення на незалежну змінну в $L_2(\mathbb{R})$ і $L_2(0,1)$.

Нехай S — деякий самоспряжений оператор з чисто абсолютно неперервним спектром, що діє в гільбертовому просторі H.

Метою даної роботи є одержання оцінки числа власних значень оператора

$$T = S + V, \tag{1}$$

де V — обмежений самоспряжений оператор. Наскільки відомо автору, подібна задача не розглядалася, хоча добре відомі (наприклад, див. [1]) оцінки числа дискретних власних значень самоспряжених операторів.

1. Загальні теореми. 1. Нехай оператор T має вигляд (1) і $e_1, \ldots, e_n$ — ортонормована система, складена з власних векторів оператора T (не обов'язково всіх). Позначимо через K ортопроектор на лінійну оболонку векторів $e_1, \ldots, e_n$, тобто

$$K = \sum_{m=1}^{n} (\,\cdot\,, e_m)_H\, e_m.$$

Припустимо, що виконана наступна умова:

А) існує послідовність операторів $(D_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}(H)$ ($\mathcal{B}(H)$ — алгебра всіх неперервних операторів в H) така, що:

а) для довільного $j \in \mathbb{N}$ оператор

$$[D_j, S] = D_j S - S D_j$$

продовжується по неперервності до оператора $I_j \in \mathcal{B}(H)$ і

$$\forall f, g \in H \qquad \lim_{j\to\infty} \left(I_j f, g \right)_H = (f, g)_H;$$

б) для довільних $f, g \in H$

$$([V, D_j] f, g)_H = (L_j f, g)_H + (R_j f, g)_H, \tag{2}$$

де послідовність $(R_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}(H)$ в слабкій операторній топології збігається до нуля при $j \to \infty$, а послідовність $(L_j)_{j\in\mathbb{N}}$ обмежена в ідеалі B_p (B_p — класи компактних операторів з p-сумованою послідовністю s-чисел), $p \in [1, \infty[$.

Теорема 1. *Нехай $T = S + V$ і виконана умова А), причому*

$$\varliminf_{j\to\infty} \| L_j \|_{B_p} = C,$$

де L_j — оператори, що фігурують у (2).

Тоді число власних значень $n(T)$ *оператора* T *скінченне і* $n(T) \le C^P$.

Доведення. Очевидно, справедлива рівність

$$TK - KT = 0$$

яку, враховуючи (1), можемо переписати у вигляді

$$SK - KS = KV - VK.$$

Звідси випливає, що

$$\forall\, j \in \mathbb{N} \quad \operatorname{tr} D_j(SK - KS) = \operatorname{tr} D_j(KV - VK). \tag{3}$$

Враховуючи властивості операції взяття сліду, маємо

$$\operatorname{tr} D_j SK = \operatorname{tr} KD_jS, \qquad \operatorname{tr} D_jKS = \operatorname{tr} KSD_j,$$

$$\operatorname{tr} D_jKV = \operatorname{tr} KVD_j, \qquad \operatorname{tr} D_jVK = \operatorname{tr} KD_jV.$$

Тому рівність (3) набуває вигляду

$$\operatorname{tr} K(D_jS - SD_j) = \operatorname{tr} K(VD_j - D_jV). \tag{4}$$

Враховуючи умову A), одержуємо рівність

$$\lim_{j\to\infty} \operatorname{tr} KI_j = \operatorname{tr} K. \tag{5}$$

З (4) і (5) випливає нерівність

$$\operatorname{tr} K \le \varliminf_{j\to\infty} |\operatorname{tr} K[V, D_j]|. \tag{6}$$

Розглянемо праву частину останньої нерівності. Враховуючи рівність (2), маємо

$$\varliminf_{j\to\infty} |\operatorname{tr} K[V, D_j]| = \varliminf_{j\to\infty} |\operatorname{tr} KL_j|. \tag{7}$$

Оскільки K — ортопроектор, то

$$|\operatorname{tr} KL_j| \le \sum_{k=1}^{n} s_k(L_j), \tag{8}$$

де $s_k(L_j)$ — s-числа оператора L_j. Застосовуючи тепер до правої частини нерівності (8) нерівність Гельдера, одержуємо

$$|\operatorname{tr} KL_j| \le \left(\sum_{k=1}^{n} s_k(L_j)^p \right)^{1/p} n^{1/q} \le \|L_j\|_{B_p} n^{1/q}. \tag{9}$$

Враховуючи (6), (7), (9), маємо

$$n = \operatorname{tr} K \le \varliminf_{j\to\infty} \|L_j\|_{B_p} n^{1/q}.$$

Звідси

$$n^{1/p} \le \varliminf_{j\to\infty} \|L_j\|_{B_p}.$$

Таким чином, теорема доведена.

2. Аналог теореми 1 можна довести і для унітарних операторів.

Теорема 1′. *Нехай* S, T *– унітарні оператори і* $V = T - S$. *Припустимо, що оператори* S *і* V *задовольняють умову* A), *причому*

$$\varliminf_{j \to \infty} \| L_j \|_{B_p} = C,$$

де L_j — *оператори, що фігурують у* (2). *Тоді число власних значень* $n(T)$ *оператора* T *скінченне і*

$$n(T) \le C^p.$$

Доведення теореми 1′ дослівно повторює доведення попередньої теореми.

2. Застосування загальних теорем. 1. Нехай S — оператор множення на незалежну змінну в просторі $L_2(\mathbb{R})$, тобто

$$Sf(x) = xf(x) \quad \forall f \in D(S) = \left\{ f \in L_2(\mathbb{R}) : \int_{-\infty}^{\infty} |x f(x)|^2 dx < \infty \right\}.$$

Позначимо через V самоспряжений неперервний інтегральний оператор в $L_2(\mathbb{R})$ з ядром

$$v(x, t) = K(x, t) + g(x, t), \tag{10}$$

де $g \in L_1(\mathbb{R})$ і $g(-x) = \overline{g(x)}$, а ядро $K(x, t)$ задовольняє умову: 1) при досить малих $h > 0$ функція

$$l_h(x,t) = \frac{K(x+h,t) - K(x,t-h)}{h}$$

є ядром оператора L_h з ідеалу B_p і

$$\varliminf_{h \to 0} \| L_h \|_{B_p} = M < \infty.$$

Теорема 2. *Нехай* S *і* V — *оператори, введені на початку п. 2. Тоді оператор* $T = S + V$ *має скінченну кількість* $n(T)$ *власних значень і* $n(T) \le M^p$.

Доведення. Щоб довести теорему, достатньо побудувати послідовність $(D_j)_{j \in \mathbb{N}}$, яка задовольняє умови теореми 1.

Позначимо через U_h $(h \in \mathbb{R})$ оператор зсуву: $U_h f(x) = f(x+h)$ $\forall f \in L_2(\mathbb{R})$ і покладемо $D_h = (1/h)(U_h - I)$, $h > 0$. Неважко перевірити, що

$$[D_h, S] f = U_h f \quad \forall f \in D(S). \tag{11}$$

Розглянемо тепер комутатор операторів V і D_h. За допомогою нескладних обчислень одержуємо

$$[V, D_h] f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(x, t-h) - v(x+h, t)}{h} f(t)\, dt =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{K(x, t-h) - K(x+h, t)}{h} f(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} l_h(x, t) f(t)\, dt. \tag{12}$$

Враховуючи (11), (12) і умову 1, бачимо, що як послідовність операторів $(D_j)_{j \in \mathbb{N}}$ можна взяти послідовність (D_{h_j}), де $h_j = 1/j$.

Теорема доведена.

Наслідок 1. *Нехай* S — *оператор множення на незалежну змінну в просторі* $L_2(\mathbb{R})$, V — *самоспряжений неперервний інтегральний оператор з яд-*

ром $v(x,t)$ *вигляду* (10), *де* $g \in L_1(\mathbb{R})$, $g(-x) = \overline{g(x)}$, *а ядро* $K(x,t)$ *належить простору Соболєва* $W_2^1(\mathbb{R}^2)$. *Тоді число власних значень* $n(T)$ *оператора* $T = S + V$ *скінченне і*

$$n(T) \leq 4 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |K_x'(x,t)|^2 \, dt \, dx. \tag{13}$$

Доведення. Оскільки ядро $K(x,t)$ квадратично інтегровне, то інтегральний оператор $L_h \, (h > 0)$ з ядром $l_h(x,t) = \big(K(x+h,t) - K(x,t-h)\big)/h$ є оператором Гільберта – Шмідта. Крім того,

$$\varlimsup_{h \to 0} \| L_h \|_{B_p}^2 = \varlimsup_{h \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{K(x+h,t) - K(x,t-h)}{h} \right|^2 dt \, dx =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |K_x'(x,t) + K_t'(x,t)|^2 \, dt \, dx \leq 4 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |K_x'(x,t)|^2 \, dt \, dx. \tag{13$'$}$$

Останню нерівність ми одержали, використовуючи симетричність ядра $K(x,t)$. З (13′), враховуючи теорему 2, одержуємо оцінку (13). Наслідок доведений.

2. Нехай S — оператор множення на незалежну зміну в $L_2(0;1)$, V — самоспряжений неперервний інтегральний оператор з ядром $v(x,t)$, яке задовольняє наступну умову: в) при досить малих $h > 0$ функція

$$l_h(x,t) = \frac{v(x,t-h)\theta(t-h) - v(x+h,t)\theta(1-x-h)}{h} \tag{14}$$

є ядром оператора з ідеалу B_p і

$$\varlimsup_{h \to 0} \| L_h \|_{B_p} = M < \infty,$$

де через $\theta(x)$ позначено характеристичну функцію додатної півосі, а функцію $v(x,t)$ вважаємо продовженою нулем поза квадратом $[0,1] \times [0,1]$.

Теорема 3. *Нехай* S *і* V *— оператори, введені на початку цього пункту. Тоді оператор* $T = S + V$ *має скінченну кількість* $n(T)$ *власних значень і* $n(T) \leq M^p$.

Доведення. Щоб довести дану теорему, достатньо побудувати послідовність $(D_j)_{j \in \mathbb{N}}$, яка задовольняє умови теореми 1. Для довільної $f \in L_2(0;1)$ позначимо

$$U_h f(x) = \begin{cases} f(x+h), & x \in [0, 1-h], \\ 0, & x \in \,]1-h, 1], \end{cases} \qquad h > 0,$$

і покладемо $D_h = (1/h)(U_h - I)$. Очевидно,

$$[D_h, S] f = U_h f \quad \forall f \in D(S). \tag{15}$$

Розглянемо комутатор операторів V і D_h. Неважко перевірити, що

$$[V, D_h] f(x) = \int_0^1 \frac{v(x,t-h)\theta(t-h) - v(x+h,t)\theta(1-x-h)}{h} f(t) dt =$$

$$= \int_0^1 l_h(x,t) f(t)\, dt. \tag{16}$$

Враховуючи (15), (16) і умову в), бачимо, що як послідовність операторів $(D_j)_{j \in \mathbb{N}}$ можна взяти послідовність (D_{h_j}), де $h_j = 1/j$. Теорема доведена.

Наслідок 2. *Нехай S — оператор множення на незалежну змінну в просторі $L_2(0;1)$, V — самоспряжений неперервний інтегральний оператор з ядром $v(x,t)$, яке задовольняє наступні умови: а) функція $v(x,t)$ належить простору Соболєва $W_2^1([0,1]\times[0,1])$; б) $v(x,0) = v(x,1) = 0$. Тоді число власних значень $n(T)$ оператора $T = S + V$ скінченне і*

$$n(T) \le 4 \int_0^1\int_0^1 |v'_x(x,t)|^2\, dt\, dx.$$

Доведення. Згідно з теоремою 3 достатньо показати, що оператор L_h з ядром

$$l_h(x,t) = \frac{v(x,t-h)\theta(t-h) - v(x+h,t)\theta(1-x-h)}{h}$$

є оператором Гільберта – Шмідта і

$$\varlimsup_{h\to 0} \|L_h\|_{B2}^2 \le 4 \int_0^1\int_0^1 |v'_x(x,t)|^2\, dt\, dx. \tag{17}$$

Належність операторів L_h до ідеалу B_2, очевидно, випливає з умови а). Доведемо нерівність (17). Маємо

$$\|L_h\|_{B2}^2 = \int_0^1\int_0^1 |l_h(x,t)|^2\, dt\, dx = \int_0^{1-h}\int_h^1 \left|\frac{v(x,t-h) - v(x+h,t)}{h}\right|^2 dt\, dx +$$

$$\int_0^{1-h}\int_0^h \left|\frac{v(x+h,t)}{h}\right|^2 dt\, dx + \int_{1-h}^1\int_h^1 \left|\frac{v(x,t-h)}{h}\right|^2 dt\, dx. \tag{18}$$

Оцінимо два останні інтеграли. Беручи до уваги умову б), можемо записати рівність

$$v(x+h,t) = \int_0^t v'_\tau(x+h,\tau)\, d\tau.$$

Звідси, використовуючи нерівність Коші – Буняковського, маємо

$$\int_0^h |v(x+h,t)|^2\, dt \le \int_0^h t \int_0^t |v'_\tau(x+h,\tau)|^2\, d\tau\, dt.$$

Змінюючи тепер порядок інтегрування в повторному інтегралі, одержуємо

$$\int_0^h |v(x+h,t)|^2\, dt \le \frac{1}{2}\int_0^h \left(h^2 - \tau^2\right) |v'_\tau(x+h,\tau)|^2\, d\tau \le \frac{h^2}{2}\int_0^h |v'_\tau(x+h,\tau)|^2\, d\tau,$$

і значить,

$$\int_0^{1-h}\int_0^h \left|\frac{v(x+h,t)}{h}\right|^2 dt\, dx \le \frac{1}{2}\int_0^{1-h}\int_0^h |v'_\tau(x+h,\tau)|^2\, d\tau\, dx.$$

З цієї нерівності випливає

$$\int_0^{1-h}\int_0^h \left|\frac{v(x+h,t)}{h}\right|^2 dt\,dx = o(1) \text{ при } h \to 0. \tag{19}$$

Аналогічно одержуємо

$$\int_{1-h}^1\int_h^1 \left|\frac{v(x,t-h)}{h}\right|^2 dt\,dx = o(1) \text{ при } h \to 0. \tag{20}$$

З урахуванням (18), (19) і (20) маємо

$$\lim_{h\to 0}\|L_h\|_{B2}^2 = \lim_{h\to 0}\int_0^{1-h}\int_h^1 \left|\frac{v(x,t-h)-v(x+h,t)}{h}\right|^2 dt\,dx =$$

$$= \int_0^1\int_0^1 \left|v_t'(x,t)+v_x'(x,t)\right|^2 dt\,dx \le 4\int_0^1\int_0^1 \left|v_x'(x,t)\right|^2 dt\,dx.$$

Наслідок доведений.

3. Розглянемо унітарний оператор S, заданий таким чином:

$$Sf(x) = e^{ix}f(x),\quad \forall f \in D(S) = \left\{ f\in L_2(0;2\pi):\ \int_0^{2\pi}\left|e^{ix}f(x)\right|^2 dx < \infty\right\}.$$

Позначимо через V самоспряжений неперервний інтегральний оператор в $L_2(0;2\pi)$ з ядром $v(x,t)$, що задовольняє наступні умови: а) $v(x,t)$ — 2π-періодична по x і t функція; б) при досить малих $h>0$ функція

$$l_h(x,t) = \frac{v(x,t-h)e^{ih}-v(x,t)}{ih}e^{-it} - \frac{v(x+h,t)-v(x,t)}{ih}e^{-ix}$$

є ядром оператора L_h ідеалу B_p і

$$\varliminf_{h\to 0}\|L_h\|_{B_p} = M < \infty.$$

Теорема 4. *Нехай S і V — оператори, введені на початку цього пункту. Тоді оператор $T = S+V$ має скінченну кількість $n(T)$ власних значень і $n(T) \le M^p$.*

Доведення. Достатньо побудувати послідовність $(D_j)_{j\in\mathbb{N}}$, яка задовольняє умови теореми 1′.

Позначимо через U_h ($h\in\mathbb{R}$) оператор зсуву:

$$U_h f(x) = f\left(2\pi\left\{\frac{x+h}{2\pi}\right\}\right)\quad \forall f\in L_2(0;2\pi)$$

($\{\xi\}$ — дробова величина числа), і покладемо

$$D_h = \frac{e^{-ix}}{ih}(U_h - I),\quad h>0.$$

Неважко перевірити, що

$$[D_h, S]f = \frac{e^{ih}-1}{ih}U_h f \quad \forall f \in D(S). \tag{21}$$

Розглянемо тепер комутатор операторів V і D_h. За допомогою нескладних обчислень, використовуючи умову а), одержуємо

$$[V, D_h]f(x) = \int_0^{2\pi} \left(\frac{v(x, t-h)e^{ih} - v(x,t)}{ih} e^{-it} - \right.$$

$$\left. - \frac{v(x+h, t) - v(x,t)}{ih} e^{-ix} \right) f(t)dt = \int_0^{2\pi} l_h(x,t) f(t) dt \tag{22}$$

Враховуючи (21), (22) і умову б), бачимо, що як послідовність операторів $(D_j)_{j \in \mathbb{N}}$ можна взяти послідовність (D_{h_j}), де $h_j = 1/j$. Теорема доведена.

Наслідок 3. *Нехай S — оператор, введений на початку даного пункту, V — самоспряжений неперервний інтегральний оператор з ядром $v(x,t)$, що належить простору Соболєва $W_2^1([0, 2\pi] \times [0, 2\pi])$ і задовольняє умову а). Тоді число власних значень $n(T)$ оператора $T = S + V$ скінченне і*

$$n(T) \le 8 \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(|v_x'(x,t)|^2 + |v_t'(x,t)|^2 \right) dt\, dx. \tag{23}$$

Доведення. Оскільки ядро $v(x,t)$ квадратично інтегровне, інтегральний оператор $L_h (h > 0)$ з ядром

$$l_h(x,t) = \frac{v(x, t-h)e^{ih} - v(x,t)}{ih} e^{-it} - \frac{v(x+h, t) - v(x,t)}{ih} e^{-ix}$$

є оператором Гільберта – Шмідта. Крім того,

$$\varlimsup_{h \to 0} \| L_h \|_{B_2}^2 = \varlimsup_{h \to 0} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \left| \frac{v(x, t-h) - v(x,t)}{ih} e^{-i(t-h)} + \frac{e^{ih}-1}{ih} v(x,t) e^{-it} - \right.$$

$$\left. - \frac{v(x+h, t) - v(x,t)}{ih} e^{-ix} \right|^2 dt\, dx \le$$

$$\le 4 \left\{ \left(\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |v_x'(x,t)|^2 dt\, dx \right)^{1/2} + \left(\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |v(x,t)|^2 dt\, dx \right)^{1/2} \right\}^2 \le$$

$$\le 8 \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(|v_x'(x,t)|^2 + |v(x,t)|^2 \right) dt\, dx.$$

Звідси, враховуючи теорему 4, одержуємо оцінку (23). Наслідок доведений.

1. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики: В 4-х т. – М.: Мир, 1982. – Т. 4. – 428 с.

Одержано 28. 04. 92