УДК 517.91/93

А. М. Самойленко, чл.-корр. АН Украины,
Д. И. Мартынюк, д-р физ.-мат. наук,
Н. А. Перестюк, д-р физ.-мат. наук (Киев. ун-т)

ПРИВОДИМОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ, ЗАДАННЫХ НА ТОРЕ *

Sufficient conditions are established for the reducibility of a nonlinear system of difference equations

$$x(t+1) = x(t) + \omega + P(x(t), t) + \lambda,$$

where $P(x,t)$ is a function 2π-periodic in $x_i (i = 1, \dots, n)$ and almost periodic in t with a frequency basis α, to the system

$$y(t+1) = y(t) + \omega.$$

Вказані достатні умови звідності нелінійної системи різницевих рівнянь

$$x(t+1) = x(t) + \omega + P(x(t), t) + \lambda,$$

де $P(x,t)$ періодична по x_i $(i = 1, \dots, n)$ з періодом 2π і майже періодична по t з базисом частот α, до системи

$$y(t+1) = y(t) + \omega.$$

Рассмотрим систему разностных уравнений

$$x(t+1) = x(t) + \omega + P(x(t),t) + \lambda, \tag{1}$$

где x, ω, λ — n-мерные вещественные векторы, $P(x, t)$ — n-мерная вещественная вектор-функция, 2π-периодическая по x_i и почти периодическая по t с базисом частот α. Считая, что $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ — угловые координаты на торе T_m, будем интерпретировать систему (1) как систему, заданную на торе.

Поставим задачу: найти замену переменных

$$x = y + U_0(y, t),$$

преобразующую систему (1) в систему

$$y(t+1) = y(t) + \omega. \tag{2}$$

Отметим, что в случае дифференциальных уравнений аналогичная задача исследовалась в работах [1 – 5], а для автономных систем разностных уравнений в [6, 7].

Прежде чем решить эту задачу, приведем, следуя [5], некоторые определения, необходимые в дальнейшем.

Обозначим через $\bar{r} = (r_1, r_2, \dots, r_m, \dots)$ — счетный набор целых чисел, $(x, \varphi) = (x_1, x_2, \dots, x_n, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m, \varphi_{m+1}, \dots)$ — счетный набор комплексных чисел,

$$\bar{r}^m = (r_1, \dots, r_m); \quad |\bar{r}^m| = \max_{1 \le i \le m} |r_i|, \quad \|\bar{r}^m\| = \sum_{i=1}^{m} |r_i|;$$

$$(x, \varphi^m) = (x_1, \dots, x_n, \varphi_1, \dots, \varphi_m);$$

$$|\varphi| = \max_{i \ge 1} |\varphi_i|; \quad \langle \bar{r}^m, \varphi^m \rangle = \sum_{i=1}^{m} r_i \varphi_i;$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке Государственного комитета Украины по науке и технологиям.

$$\Pi(\rho) = \{(x, \varphi)\colon |\operatorname{Im} x| < \rho, |\operatorname{Im} \varphi| < \rho\}.$$

$$\Pi(\rho, m) = \{(x, \varphi^m)\colon |\operatorname{Im} x| < \rho, |\operatorname{Im} \varphi^m| < \rho\};$$

$$\Pi_0 = \{(x, \varphi)\colon |\operatorname{Im} x| = 0, |\operatorname{Im} \varphi| = 0\}.$$

Область $\{(x, \varphi, \lambda)\colon (x, \varphi) \in \Pi(\rho), \|\lambda\| < L\}$ обозначим через $\Pi(\rho)L$. Введем следующие нормы: для вектор-функции $F(x, \varphi) = (F^1(x, \varphi), \ldots, F^n(x, \varphi))$, определенной в области $\Pi(\rho)$:

$$\| F(x, \varphi) \|_\rho = \sum_{i=1}^{n} \sup_{\Pi(\rho)} |F^i(x, \varphi)|,$$

для n-мерной комплексной функции $F(x, \varphi, \lambda)$, определенной в области $\Pi(\rho)L$:

$$\| F(x, \varphi, \lambda) \|_{\rho, L} = \sum_{i=1}^{n} \sup_{\Pi(\rho)L} |F^i(x, \varphi, \lambda)|,$$

и для $(n \times n)$-мерной матрицы $R(x, \varphi, \lambda) = (R_{ij}(x, \varphi, \lambda))_{i,j=1}^{n}$, определенной в области $\Pi(\rho)L$:

$$\| R(x, \varphi, \lambda) \|_{\rho, L} = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} \sup_{\Pi(\rho)L} |R_{ij}(x, \varphi, \lambda)|.$$

***Определение* 1.** *n-мерная вектор-функция $F(x, \varphi)$, $(x, \varphi) \in \Pi_0$, принадлежит классу $A(\theta)$, $\theta > 0$, если можно указать положительные монотонно неубывающие последовательности целых чисел $n(k)$ и вещественных чисел $g(k)$, а также последовательность комплексных n-мерных вектор-функций $F_k(x, \varphi) = F_k(x, \varphi^{n(k)})$, удовлетворяющих следующим условиям:*

1) $\lim\limits_{k \to \infty} n(k) = \infty$; $\overline{\lim\limits_{k \to \infty}} \dfrac{\ln n(k)}{g(k)} = b < \infty$; $g(k+1) - g(k) \ge \ln \dfrac{k+1}{k}$, $k \ge 1$;

2) $F_1(x, \varphi) = 0$; *для каждого $k \ge 2$ функция $F_k(x, \varphi)$ является 2π-периодической по каждой переменной, вещественной при вещественных (x, φ) и аналитической в области $\Pi(\rho_k, n(k))$, где*

$$\rho_k = c_0 \sum_{i=k}^{\infty} \exp\{-a g(i)\}, \quad k \ge 1; \quad \overline{\lim_{k \to \infty}} \frac{\ln k}{g(k)} < a, \quad c_0 > 0;$$

3) $\lim\limits_{k \to \infty} F_k(x, \varphi) = F(x, \varphi)$, $(x, \varphi) \in \Pi_0$;

4) *существует постоянная $C_F > 0$ такая, что для каждого $k > 1$ выполняется неравенство*

$$\| F_k(x, \varphi) - F_{k-1}(x, \varphi) \|_{\rho_k} = C_F \exp\{-\theta n(k) g(k)\}.$$

***Определение* 2.** *n-мерная вектор-функция $P(x, t)$, $x \in R^n$, $t \in R$, принадлежит классу $A(\theta, \alpha)$, где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \ldots)$ — бесконечная последовательность вещественных рационально несоизмеримых чисел, если найдется функция $F(x, \varphi)$ из $A(\theta)$ такая, что*

$$P(x, t) = F(x, \alpha t), \quad x \in R^n, \quad t \in R.$$

***Определение* 3.** *n-мерная вектор-функция $Q(x, \varphi^m, \lambda)$, $x \in C^n$, $\varphi^m \in C^m$, $\lambda \in C^n$, принадлежит классу*

$$H(k, \rho, L, c), \quad k = 1, 2, \ldots, \quad \rho > 0, \quad L > 0, \quad c > 0,$$

если она определена и аналитична в области $\Pi(\rho, m) L$, 2π-периодична по x_i, φ_j, вещественная при вещественных x, φ^m, λ и удовлетворяет оценке

$$\| Q \|_{\rho, L} \leq c \exp \{-\theta\, n(k)\, g(k)\}.$$

В дальнейшем будем предполагать, что последовательности $n(k)$, $g(k)$, ρ_k, помимо условий, указанных в определении 1, удовлетворяют условиям

$$\lim_{k \to \infty} \frac{n(k+1)}{n(k)} = \lim_{k \to \infty} \frac{g(k+1)}{g(k)} = 1.$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 1 (*индуктивная лемма*). *Система разностных уравнений*

$$x(t+1) = x(t) + \omega + Q(x(t), \varphi^{n(k)}, \lambda) + \lambda, \quad \Delta\varphi_t^{n(k)} = \alpha^{n(k)}, \tag{3}$$

где вектор-функция $Q(x, \varphi^{n(k)}, \lambda)$ принадлежит классу $H(k, \sigma_k, L_k, c_1)$,

$$\sigma_k = \frac{\rho_k}{\sigma_0}, \quad \sigma_0 = 2p_1(1 + \sigma_1);$$

$$p_1 = \prod_{i=1}^{\infty} (1 + c_1 c_3 \exp \{-\theta_1 n(i)\, g(i)\});$$

$$\sigma_1 = \sum_{i=1}^{\infty} c_1 c_3 \exp \{-\theta_1 n(i)\, g(i)\},$$

$$L_k = c_1 c_2 \exp \{-\theta_2 n(k)\, g(k)\},$$

θ, θ_1, θ_2 — *положительные постоянные*, $\theta > 2(a+b)$, $\theta - \theta_1 < \theta_2 < \theta/2 < \theta_1 < \theta - a - b$, c_1, c_2, c_3 — *положительные постоянные, заменой переменных*

$$x = y + U(y, \varphi^{n(k)}, \lambda), \quad \lambda = \lambda(\mu), \tag{4}$$

приводима к системе

$$y(t+1) = y(t) + \omega + R(y, \varphi^{n(k)}, \mu) + \mu, \quad \Delta\varphi_t^{n(k)} = \alpha^{n(k)}, \tag{5}$$

если выполняется условие

$$\left| \operatorname{cosec} \frac{\langle \omega, \bar{s} \rangle + \langle \alpha^m, \bar{r}^m \rangle}{2} \right| \leq c(m) (\| \bar{s} \| + \| \bar{r}^m \|)^{n+m}, \tag{6}$$

где $\bar{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$, $\bar{r}^m = (r_1, r_2, \ldots, r_m)$ — *любые ненулевые целочисленные векторы.*

Доказательство. После замены (4) система разностных уравнений (3) преобразуется в систему

$$y(t+1) + U(y(t+1), \varphi_{t+1}^{n(k)}, \lambda(\mu)) = y(t) + U(y(t), \varphi_t^{n(k)}, \lambda(\mu)) +$$

$$+ \ \omega \ + Q\big(y(t)+U(y(t), \varphi_t^{n(k)}, \lambda(\mu)), \ \varphi_t^{n(k)}, \lambda(\mu)\big) \ + \ \lambda(\mu), \tag{7}$$

которую представим в виде

$$y(t+1) - y(t) - \omega = U\big(y(t), \varphi_t^{n(k)}, \lambda(\mu)\big) + U\big(y(t)+\omega, \varphi_{t+1}^{n(k)}, \lambda(\mu)\big) -$$

$$- U\big(y(t+1)-y(t)-\omega+y(t)+\omega, \varphi_{t+1}^{n(k)}, \lambda(\mu)\big) - U\big(y(t)+\omega, \varphi_{t+1}^{n(k)}, \lambda(\mu)\big) +$$

$$+ S_{N(k)}\, Q\big(y(t), \varphi_t^{n(k)}, \lambda(\mu)\big) - S_{N(k)}\, Q\big(y(t), \varphi_t^{n(k)}, \lambda(\mu)\big) +$$

$$+ \ \overline{Q}(\lambda(\mu)) - \overline{Q}(\lambda(\mu)) + Q\big(y(t)+U(y(t), \varphi_t^{n(k)}, \lambda(\mu)), \varphi_t^{n(k)}, \lambda(\mu)\big), \tag{8}$$

где

$$S_{N(k)}\, Q \ = \sum_{\|\bar{s}\| + \|\bar{r}^{n(k)}\| \le N(k)} Q_{\bar{s}, \bar{r}^{n(k)}}(\lambda) \exp\{i\langle y, \bar{s}\rangle + i\langle \varphi^{n(k)}, \bar{r}^{n(k)}\rangle\},$$

$$Q_{\bar{s}, \bar{r}^{n(k)}}(\lambda) \ = \ \frac{1}{(2\pi)^{n+n(k)}} \int\limits_0^{2\pi} \ldots \int\limits_0^{2\pi} Q \exp\{-i\langle y, \bar{s}\rangle +$$

$$+ \ \langle \varphi^{n(k)}, \bar{r}^{n(k)}\rangle\}\, dy_1 \ldots dy_n\, d\varphi_1 \ldots d\varphi_{n(k)},$$

$$\overline{Q}(\lambda) \ = \ \frac{1}{(2\pi)^{n+n(k)}} \int\limits_0^{2\pi} \ldots \int\limits_0^{2\pi} Q\, dy_1 \ldots dy_n\, d\varphi_1 \ldots d\varphi_{n(k)},$$

$$N(k) \ = \ \theta_4 \frac{2\sigma_0}{c_0}\, n(k)\, g(k) \exp\{a\, g(k)\}.$$

Выберем функции $U(y, \varphi^{n(k)}, \lambda)$, $\lambda(\mu)$ как решения уравнений

$$\mu \ = \ \lambda(\mu) + \overline{Q}(\lambda(\mu)), \tag{9}$$

$$U\big(y+\omega, \varphi^{n(k)} + \alpha^{n(k)}, \lambda(\mu)\big) \ =$$

$$= \ U\big(y, \varphi^{n(k)}, \lambda(\mu)\big) + S_{N(k)}\, Q\big(y, \varphi^{n(k)}, \lambda(\mu)\big) - \overline{Q}(\lambda(\mu)). \tag{10}$$

В силу такого выбора соотношение (8) можно записать в виде

$$y(t+1) - y(t) - \omega = U\big(y(t)+\omega, \varphi_{t+1}^{n(k)}, \lambda(\mu)\big) -$$

$$- U\big(y(t+1)-y(t)-\omega+y(t)+\omega, \varphi_{t+1}^{n(k)}, \lambda(\mu)\big) +$$

$$+ \ Q\big(y(t)+U(y(t), \varphi_t^{n(k)}, \lambda(\mu)), \varphi_t^{n(k)}, \lambda(\mu)\big) -$$

$$- S_{N(k)}\, Q\big(y(t), \varphi_t^{n(k)}, \lambda(\mu)\big) + \mu. \tag{11}$$

Решая (11) относительно $y(t+1) - y(t) - \omega$, получаем систему

$$y(t+1) \ = \ y(t) + \omega + R\big(y(t), \varphi_t^{n(k)}, \mu\big) + \mu, \quad \Delta\varphi_t^{n(k)} \ = \ \alpha^{n(k)}, \tag{12}$$

где

$$R\big(y, \varphi^{n(k)}, \mu\big) \ = \ \left[\left(E + \frac{\partial U}{\partial y}\right)^{-1} - E\right]\mu \ +$$

$$+ \left(E + \frac{\partial U}{\partial y}\right)^{-1} \left[Q\big(y(t)+U(y(t), \varphi_t^{n(k)}, \lambda(\mu)), \varphi_t^{n(k)}, \lambda(\mu)\big) \ - \right.$$

$$\left. - \ S_{N(k)}\, Q\big(y(t), \varphi_t^{n(k)}, \lambda(\mu)\big)\right].$$

Согласно [6, 7], уравнение (10) имеет решение

$$U(\psi^{m(k)}, \lambda(\mu)) = \sum_{0 < \|\bar r^{m(k)}\| \le N(k)} \frac{Q_{\bar r^{m(k)}}(\lambda(\mu))}{e^{i\langle \beta^{m(k)}, \bar r^{m(k)}\rangle} - 1} \exp\{i\langle \psi^{m(k)}, \bar r^{m(k)}\rangle\},$$

где $m(k) = n + n(k)$, $\psi^{m(k)} = (y, \varphi^{n(k)})$, $\beta^{n(k)} = (\omega, \alpha^{n(k)})$. Аналогично [5] справедливы оценки

$$\|\lambda(0)\| \le c_1 \exp\{-\theta\, n(k)\, g(k)\},$$

$$\|\lambda(\mu)\|_{L_{k+1}} \le L_k - c_1 c_4 \exp\{-\theta_3 n(k)\, g(k)\},$$

$$\left\| \frac{\partial \lambda(\mu)}{\partial \mu} \right\|_{L_{k+1}} \le 1 + \frac{c_5}{c_4} n^2 \exp\{-(\theta - \theta_3)\, n(k)\, g(k)\},$$

$$\|R\|_{\sigma_{k+1}, L_{k+1}} \le \frac{c_1}{2} \exp\{-\theta\, n(k+1)\, g(k+1)\},$$

$$\|U\|_{\sigma_{k+1}, L_{k+1}} \le c_1 c_3 \exp\{-\theta_1 n(k+1)\, g(k+1)\},$$

$$\sup_{\Pi(\sigma_{k+1}, n(k)) L_{k+1}} |\operatorname{Im} U| \le \frac{\delta_k}{2\sigma_0} = \frac{c_0}{2\sigma_0} \exp\{-a\, g(k)\},$$

$$\left\| \frac{\partial U}{\partial y} \right\|_{\sigma_{k+1}, L_{k+1}} \le c_1 c_3 \exp\{-\theta_1 n(k+1)\, g(k+1)\} \le \frac{1}{2}, \tag{13}$$

$$\left\| \frac{\partial U}{\partial \varphi^{n(k)}} \right\|_{\sigma_{k+1}, L_{k+1}} \le c_1 c_3 \exp\{-\theta_1 n(k+1)\, g(k+1)\},$$

$$\left\| \frac{\partial U}{\partial \mu} \right\|_{\sigma_{k+1}, L_{k+1}} \le \frac{c_3 c_5}{c_4} n^2 \exp\{-(\theta_1 - \theta_3)\, n(k+1)\, g(k+1)\},$$

где $\theta_1 < \theta_3 < \theta_2$, $1 \le c_4 \le c_2$.

Легко заметить, что функция $R(y, \varphi^{n(k)}, \mu)$ является аналитической, 2π-периодической по y_i, φ_j и вещественной при вещественных $(y, \varphi^{n(k)}, \mu)$ в области $\Pi(\sigma_{k+1}, n(k))\, L_{k+1}$.

Применим теперь лемму 1 для доказательства теоремы о приводимости системы (1) на торе.

Теорема. *Предположим, что система* (1) *удовлетворяет следующим условиям*:

1) $P(x, t) \in A(\theta, \alpha)$, $\theta > 2(a + b)$;

2) *для любого целого* $m > 0$ *и любых ненулевых целочисленных векторов* $\bar s = (s_1, \ldots, s_n)$ $\bar r^m = (r_1, \ldots, r^m)$ *выполняется неравенство*

$$\left| \operatorname{cosec} \frac{\langle \omega, \bar s\rangle + \langle \alpha^m, \bar r^m\rangle}{2} \right| \le c(m) (\|\bar s\| + \|\bar r^m\|)^{n+m},$$

$$c(m) = \gamma\, d_1^m m^{d_2}, \quad \gamma > 1, \quad d_1 > 1, \quad d_2 > 0.$$

Тогда существует постоянная M_0 *такая, что при* $C_F \le M_0$ *существует вектор* λ *и замена* $x = y + U_0(t, y)$, $U_0(t, y) \in A(\alpha, \theta_1)$, *преобразующая систему* (1) *к виду* $y(t+1) = y(t) + \omega$.

Доказательство. Рассмотрим последовательность систем

$$x(t+1) = x(t) + \omega + F_k(x(t), \varphi^{n(k)}) + \lambda, \quad \Delta\varphi_t^{n(k)} = \alpha^{n(k)}, \tag{14}$$

и докажем, что для каждого $k \geq 1$ можно построить замену переменных

$$x = V_k(\bar{x}_k, \varphi^{n(k-1)}, \bar{\lambda}_k), \quad \lambda = \Phi_k(\bar{\lambda}_k), \tag{15}$$

преобразующую систему (1) к системе

$$\bar{x}_k(t+1) = \bar{x}_k(t) + \omega + Q_k(\bar{x}_k(t), \varphi^{n(k)}, \bar{\lambda}_k), \quad \Delta\varphi_t^{n(k)} = \alpha^{n(k)}, \tag{16}$$

причем $V_k - \bar{x}_k \in H_1(k, \sigma_k, L_k)$, $Q_k \in H(k, \sigma_k, L_k, c_1)$.

При $k = 1$ положим

$$x = V_1(\bar{x}_1) = \bar{x}_1, \quad \lambda = \Phi_1(\bar{\lambda}_1) = \lambda(\lambda_1) = \bar{\lambda}_1; \tag{17}$$

преобразование (17) переводит систему

$$x(t+1) = x(t) + \omega + F_1(x(t), \varphi^{n(1)}) + \lambda, \quad \Delta\varphi_t^{n(1)} = \alpha^{n(1)}$$

в систему

$$\bar{x}_1(t+1) = \bar{x}_1(t) + \omega + Q_1(\varphi^{n(1)}, \bar{x}_1, \bar{\lambda}_1) + \bar{\lambda}_1, \quad \Delta\varphi_t^{n(1)} = \alpha^{n(1)},$$

где $Q_1 = 0$.

Предполагая, что замена переменных (15) преобразует систему (1) в систему (16). замечаем, что система (16) удовлетворяет всем условиям леммы 1 и при существующем выборе постоянных c_1, c_2 и c_3 можно построить замену переменных

$$\bar{x}_k = \bar{x}_{k+1} + U_{k+1}(\bar{x}_{k+1}, \varphi^{n(k)}, \bar{\lambda}_k(\lambda_{k+1})),$$

преобразующую систему (16) к системе

$$\begin{gathered} \bar{x}_{k+1}(t+1) = \bar{x}_{k+1}(t) + \omega + R_{k+1}(\bar{x}_{k+1}(t), \varphi^{n(k)}, \bar{\lambda}_{k+1}) + \bar{\lambda}_{k+1}, \\ \Delta\varphi_t^{n(k)} = \alpha^{n(k)}. \end{gathered} \tag{18}$$

Сделав в системе

$$\begin{gathered} x(t+1) = x(t) + \omega + F_k(x(t), \varphi^{n(k)}) + \lambda + (F_{k+1}(x(t), \varphi^{n(k+1)}) - F_k(x(t), \varphi^{n(k)})), \\ \Delta\varphi_t^{n(k+1)} = \alpha^{n(k+1)}, \end{gathered} \tag{19}$$

замену переменных

$$x = V_{k+1}(\bar{x}_{k+1}, \varphi^{n(k)}, \bar{\lambda}_{k+1}), \quad \lambda = \Phi_{k+1}(\bar{\lambda}_{k+1}),$$

где

$$\begin{gathered} V_{k+1}(\bar{x}_{k+1}, \varphi^{n(k)}, \bar{\lambda}_{k+1}) = V_k(\bar{x}_{k+1} + U_{k+1}, \varphi^{n(k-1)}, \bar{\lambda}_k(\bar{\lambda}_{k+1})), \\ \Phi_{k+1}(\bar{\lambda}_{k+1}) = \Phi_k(\bar{\lambda}_k(\bar{\lambda}_{k+1})), \end{gathered} \tag{20}$$

получим систему

$$\begin{aligned} \bar{x}_{k+1}(t+1) &= \bar{x}_{k+1}(t) + \omega + Q_{k+1}(\bar{x}_{k+1}(t), \varphi^{n(k+1)}, \bar{\lambda}_{k+1}) + \bar{\lambda}_{k+1}, \\ \Delta \varphi_t^{n(k+1)} &= \alpha^{n(k+1)}, \end{aligned} \tag{21}$$

причем $Q_{k+1} \in H(k+1, \sigma_{k+1}, L_{k+1}, c_1)$.

Аналогично [2, 5] можно доказать сходимость последовательностей $\Phi_k(0)$ и $V_k(x, \varphi^{n(k-1)}, 0) = \hat{V}_k(x, \varphi)$:

$$\lambda_0 = \lim_{k \to \infty} \Phi_k(0); \quad V(x, \varphi) = \lim_{k \to \infty} \hat{V}_k(x, \varphi), \quad U_0(x, t) = V(x, \alpha t) - x.$$

Рассмотрим систему

$$x(t+1) = x(t) + \omega + F_k(x, \alpha^{n(k)} t) + \lambda + (F(x(t), \alpha t) - F_k(x(t), \alpha^{n(k)} t)). \tag{22}$$

Сделав в системе (22) замену переменных

$$x = V_k(y, \alpha^{n(k-1)} t, 0), \quad \lambda = \Phi_k(0),$$

получим систему

$$\begin{aligned} y(t+1) = y(t) + \omega + Q_k(y, \alpha^{n(k-1)} t, 0) + \\ + \left(E + \frac{\partial V_k}{\partial y}\right)^{-1} (F(V_k, \alpha t) - F_k(V_k, \alpha^{n(k)} t)), \end{aligned}$$

и поскольку

$$\left\| Q_k(y, \alpha^{n(k)} t, 0) + \left(E - \frac{\partial \hat{V}_k}{\partial y}\right)^{-1} (F(\hat{V}_k, \varphi) - F_k(\hat{V}_k, \varphi^{n(k)})) \right\|_0 \to 0$$

при $k \to \infty$, то, следовательно, заменой $x = y + U_0(t, y)$ система (1) преобразуется в систему $y(t+1) = y(t) + \omega$.

1. *Арнольд В. И.* Малые знаменатели. 1. Об отображениях окружности в себя // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1961. – **25**, № 1. – С. 21–86.
2. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Самойленко А. М.* Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике. – Киев: Наук. думка, 1969. – 248 с.
3. *Митропольський Ю. А., Самойленко А. М.* До питання про структуру траєкторій на тороїдальних многовидах // Допов. АН УРСР. – 1964. – **18**. – С. 984–985.
4. *Самойленко А. М.* К вопросу о структуре траекторий на торе // Укр. мат. журн. – 1964. – **16**, № 6. – С. 769–782.
5. *Филиппов М. Г.* К вопросу о приводимости систем дифференциальных уравнений с почти периодическим возмущением, заданных на торе // Методы исследования дифференциальных и функционально-дифференциальных уравнений. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1990. – С. 96–101.
6. *Мартынюк Д. И., Перестюк Н. А.* О приводимости разностных уравнений на торе // Вычисл. и прикл. математика. – 1975. – **26**. – С. 42–48.
7. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Мартынюк Д. И.* Системы эволюционных уравнений с периодическими и условно-периодическими коэффициентами. – Киев: Наук. думка, 1984. – 213 с.

Получено 12.04.93