УДК 519.624

В. В. Стрыгин, д-р физ.-мат. наук,
И. А. Блатов, канд. физ.-мат. наук,
И. Ю. Покорная, асп. (Воронеж. ун-т)

МЕТОД КОЛЛОКАЦИИ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ КУБИЧЕСКИХ СПЛАЙНОВ

Singulary perturbed boundary-value problems are studied in the case of boundary layers. To find approximate solutions of these problems, we use the collocation method based on the cubic splines of the minimal defect on nonuniform nets.

Досліджуються сингулярно збурені крайові задачі при наявності приграншарів. Для наближеного розв'язку таких задач застосовується метод колокації на основі кубічних сплайнів мінімального дефекту на нерівномірних сітках.

1. Постановка задачи и формулировка результата. Известно [1, 2], что для приближенного решения краевых задач удобно использовать проекционно сеточные методы, среди которых важное место занимает метод коллокации. Этот метод целесообразно использовать при исследовании сингулярно возмущенных краевых задач, когда возникают трудности, связанные с наличием погранслоев. Для такой задачи, используя идеи работ [3 – 8], обосновывается метод коллокации на основе кубических сплайнов минимального дефекта.

Рассмотрим на отрезке $[-1, 1]$ задачу ($\varepsilon > 0$ — малый параметр)

$$L_\varepsilon x = \varepsilon \dot{x} - A(t)x = d(t), \quad x = (x^1, \dots, x^n) \in R^n, \tag{1}$$

$$x^1(-1) = \dots x^k(-1) = x^{k+1}(1) = \dots = x^n(1) = 0. \tag{2}$$

Пусть $A(t)$ и $d(t)$ — матрица и вектор-функция из класса $C^3[-1, 1]$. Предположим, что при каждом t спектр $A(t)$ состоит из вещественных различных ненулевых чисел $\lambda_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, причем точно k из них отрицательны (здесь k — число краевых условий в точке $t = -1$); $B(t)$ — такая матрица, что $B^{-1}AB = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Представим матрицу B в виде $B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$, где B_{11} — $(k \times k)$-матрица. Предположим, что $\det B_{11}(-1) \det B_{22}(-1) \det B_{22}(1) \neq 0$.

Как показано в [6], при малых $\varepsilon > 0$ задача (1), (2) разрешима, причем в окрестностях граничных точек $t = -1$, $t = 1$ ее решение $x_\varepsilon(t)$ имеет экспоненциальные погранслои. Поэтому для численного отыскания $x_\varepsilon(t)$ разбиение отрезка $[-1, 1]$ целесообразно выбирать сгущающимся вблизи граничных точек. Здесь наиболее удобна методика Н. С. Бахвалова [7].

Пусть $a = 1 - (3/\lambda_0)\varepsilon |\ln \varepsilon|$. Определим функцию $g(t)$ формулой

$$g(t) = \begin{cases} t, & t \in [0, a], \\ a - \dfrac{3\varepsilon}{\lambda_0} + \dfrac{3}{\lambda_0} \exp\left(\dfrac{\lambda_0(t-1)}{3\varepsilon}\right), & t \in [a, 1]. \end{cases}$$

Для $t \in [-1, 0]$ положим $g(t) = -g(-t)$. Очевидно, $g(t) \in C^1[-1, 1]$ и взаимно однозначно отображает $[-1, 1]$ в $[-b, b]$, где $b = a + 3(1-\varepsilon)/\lambda_0$. Пусть m — некоторое натуральное число. Положим $\tau_i = ai/m$, $i = 0, 1, \dots, m$; $\tau_i = \tau_{i-1} + (b-a)/m$, $i = m+1, \dots, 2m$. На отрезке $[-b, 0]$ точки τ_i введем симметричным образом. Узлы разбиения Δ отрезка $[-1, 1]$ определим равенством $t_i =$

$= g^{-1}(\tau_i)$, $i = -2m, \ldots, 2m$, где g^{-1} — обратная g функция. Будем предполагать, что $\varepsilon|\ln\varepsilon| << 1/m = h$.

Пусть i_0 — некоторое достаточно большое натуральное число, не зависящее от ε и m. Введем точки коллокации

$$\xi_i = (t_{i+1} + t_{i+2})/2, \quad i = -2m-1, \ldots, -m-i_0-5;$$

$$\xi_i = t_{i+1}, \quad i = -m-i_0-4, \ldots, -m-1; \quad \xi_{-m} = (t_{-m} + t_{-m+1})/2;$$

$$\xi_i = t_i, \quad i = -m+1, \ldots, m-1; \quad \xi_m = (t_{m-1} + t_m)/2;$$

$$\xi_i = t_{i-1}, \quad i = m+1, \ldots, m+i_0+4; \quad \xi_i = (t_{i-2} + t_{i-1})/2,$$

$$i = m+i_0+5, \ldots, 2m+1; \quad \xi_{-2m-2} = -1; \quad \xi_{2m+2} = 1.$$

Особо выделим точки ξ_i, $i = \pm(m+2), \pm(m+3), \pm(m+i_0+2)$, и назовем их точками полуколлокации.

Пусть $\overline{\Delta}$ — расширенное разбиение, которое получается из Δ продолжением его на два шага длины $h_0 = t_{2m} - t_{2m-1}$ вправо и влево от точек 1 и -1 соответственно. Через $S(\Delta, 3, 1)$ обозначим пространство кубических сплайнов дефекта 1 на разбиении $\overline{\Delta}$. Через $c, c_1, c_2, \ldots$ будем обозначать положительные константы, не зависящие от ε и разбиения Δ.

Пусть $\|A\|_\infty = \max\limits_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ — норма квадратной матрицы.

Введем пространства

$$E = \{u = (u^1(t), \ldots, u^n(t)) : u^i(t) \in S(\Delta, 3, 1);\ u^1(-1) = \ldots = u^k(-1) =$$
$$= u^{k+1}(1) = \ldots = u^n(1) = 0\}, \quad F = L_\varepsilon E.$$

Размерность пространств E и F равна $(4m+2)n$. Введем индексные множества $I = \{i, j = -2m-2, -2m-1, \ldots, 2m+2; j \ne \pm(m+3), \pm(m+2), \pm(m+i_0+2)\}$; $I_1 = \{m+2, m+3, -m-i_0-2\}$; $I_2 = \{-m-2, -m-3, m+i_0+2\}$.

Метод коллокации решения задачи (1), (2) состоит в отыскании такой функции $u(t) \in E$, что

$$(L_\varepsilon u - d)(\xi_j) = 0, \quad j \in I,$$
$$\{(L_\varepsilon u - d)(\xi_j)\}^l = 0, \quad l = 1, 2, \ldots, k; \quad j \in I_1, \tag{3}$$
$$\{(L_\varepsilon u - d)(\xi_j)\}^l = 0, \quad l = k+1, \ldots, n; \quad j \in I_2,$$

Здесь через $\{\cdot\}^l$ обозначается l-я координата вектора $\{\cdot\}$. Таким образом, для отыскания $n(4m+2)$-параметрической функции u имеем $n(4m+2)$ уравнений (3).

Основная теорема. *Существуют такие положительные числа* $\varepsilon_0 > 0$, $m_0 > 0$, $c > 0$, $\gamma > 0$, *что при всех* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $m \ge m_0$ *таких, что* $m\varepsilon|\ln\varepsilon| << \gamma$, *коллокационная задача* (3) *имеет единственное решение* $u_m(t)$, *причем*

$$\|u_m(t) - x_\varepsilon(t)\|_{C[-1,1]} + \varepsilon\|\dot u_m(t) - \dot x_\varepsilon(t)\|_{C[-1,1]} \le \frac{c}{m^3}. \tag{4}$$

2. Преобразование задачи (1), (2) к расщепленному виду. Для доказательства основной теоремы рассмотрим следующие преобразования. Как известно [8], заменой переменных $x = \hat{B}(t,\varepsilon)y$, $\hat{B} = B(t) + \varepsilon D(t) + \varepsilon^2 G(t)$, где $B(t)$, $D(t)$ и $G(t)$ класса C^3, $B^{-1}AB = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, уравнение (1) можно привести к виду

$$\hat{L}_1 y = L_1 y + \varepsilon^3 R(t,\varepsilon) y = d_1(t), \tag{5}$$

где

$$y = (y_1, y_2)^T, \quad y_1 = (y^1, \ldots, y^k)^T, \quad y_2 = (y^{k+1}, \ldots, y^n)^T,$$

$$d_1(t) = \hat{B}^{-1}(t,\varepsilon) d(t),$$

$$L_1 y = \begin{pmatrix} \varepsilon y_1' - [\Lambda_1(t) + \varepsilon D^1(t) + \varepsilon^2 G^1(t)] y_1 \\ \varepsilon y_2' - [\Lambda_2(t) + \varepsilon D^2(t) + \varepsilon^2 G^2(t)] y_2 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Здесь

$$\Lambda_1(t) = \operatorname{diag}(\lambda_1(t), \ldots, \lambda_k(t)), \quad \Lambda_2(t) = \operatorname{diag}(\lambda_{k+1}(t), \ldots, \lambda_n(t)),$$

$$D^1(t) = \operatorname{diag}(d^1(t), \ldots, d^k(t)), \quad D^2(t) = \operatorname{diag}(d^{k+1}(t), \ldots, d^n(t)),$$

$$G^1(t) = \operatorname{diag}(g^1(t), \ldots, g^k(t)), \quad G^2(t) = \operatorname{diag}(g^{k+1}(t), \ldots, g^n(t)),$$

причем $d^i(t)$, $g^i(t)$, $i = 1, \ldots, n$, класса $C^3[-1,1]$, $\|R(t,\varepsilon)\|_{R^n} \le c$ при всех t и ε. Краевые условия (2) при указанной замене имеют вид

$$y_1(-1) = -\hat{B}_{11}^{-1}(-1)\hat{B}_{12}(-1) y_2(-1), \tag{7}$$

$$y_2(-1) = -\hat{B}_{22}^{-1}(1)\tilde{B}_{21}(1) y_1(1), \tag{8}$$

$\hat{B} = \begin{pmatrix} \hat{B}_{11} & \hat{B}_{12} \\ \hat{B}_{21} & \hat{B}_{22} \end{pmatrix}$, $\hat{B}_{11}$ — $(k \times k)$-матрица, $\hat{B}_{22}$ — $(n-k)\times(n-k)$-матрица.

3. Исследование расщепленной задачи. Исследование краевой задачи (5), (7), (8) естественно начать с рассмотрения более простой задачи для уравнения

$$L_1 y = d_1 \tag{9}$$

с краевыми условиями (7), (8). Положим $\hat{B}^{-1}(t,\varepsilon)E = E_1$, $L_1 E_1 = F_1$. Коллокационная задача теперь состоит в отыскании $y(t) \in E_1$, для которого

$$(L_1 y - d_1)(\xi_j) = 0, \quad j \in I, \tag{10}$$

$$\{[\hat{B}(L_1 y - d_1)](\xi_j)\}^l = 0, \quad j \in I_1; \quad l = 1, \ldots, k, \tag{11}$$

$$\{[\hat{B}(L_1 y - d_1)](\xi_j)\}^l = 0, \quad j \in I_2; \quad l = k+1, \ldots, n, \tag{12}$$

Исследование задачи (10) – (12) опирается на изучение интерполяционных проекторов.

Определение. *Линейный оператор* $P = P(\varepsilon, m) : C[-1,1] \to F_1$ *назовем интерполяционным проектором, если для любой* $f \in C[-1,1]$:

1) $(Pf)(\xi_j) = f(\xi_j)$, $j \in I$;
2) $[(\hat{B}Pf)(\xi_j)]^l = [(\hat{B}f)(\xi_j)]^l$, $j \in I_1$; $l = 1, \ldots, k$;

3) $[(\hat{B}Pf)(\xi_j)]^l = [(\hat{B}f)(\xi_j)]^l, \quad j \in I_2; \quad l = k+1, \dots, n;$

4) $P \cdot P = P$.

Лемма 1. *Для существования интерполяционного проектора необходимо и достаточно, чтобы в пространстве F_1 существовал такой базис $\Phi_1, \dots, \Phi_q$, $q = (4m+2)n$, что система линейных уравнений*

$$\sum_{\nu=1}^{q} \alpha_\nu \Phi_\nu(\xi_j) = f(\xi_j); \quad j \in I, \tag{13}$$

$$\left[\hat{B}\left(\sum_{\nu=1}^{q} \alpha_\nu \Phi_\nu(\xi_j)\right)\right]^l = [(\hat{B}f)(\xi_j)]^l, \quad j \in I_1; \quad l = 1, \dots, k, \tag{14}$$

$$\left[\hat{B}\left(\sum_{\nu=1}^{q} \alpha_\nu \Phi_\nu(\xi_j)\right)\right]^l = [(\hat{B}f)(\xi_j)]^l, \quad j \in I_2; \quad l = k+1, \dots, k, \tag{15}$$

имела единственное решение для любого набора векторов $f(\xi_j) \in R^n$.

Лемма 2. *Пусть базис $\Phi_1, \dots, \Phi_q$ из леммы 1 удовлетворяет условиям:*

1) *для любого* $t \in [-1, 1]$ $\sum_{\nu=1}^{q} \|\Phi_\nu(t)\|_{R^n} \le C_1$;

2) *для любой* $f(t) \in C[-1, 1]$ $\max_{1 \le j \le q} |\alpha_j| \le C_2$.

Тогда для семейства интерполяционных проекторов справедлива равномерная оценка

$$\|P(\varepsilon, m)\|_{C \to C} \le c_3.$$

Леммы 1, 2 доказываются аналогично леммам 2.1 и 2.2 из [3], соответствующим случаю параболических сплайнов.

Таким образом, вопрос о существовании и ограниченности семейства интерполяционных проекторов сведен к построению в F_1 семейства специальных базисов.

4. Базис в пространстве F_1.

Лемма 3. *В пространстве F_1 существуют функции вида*

$$F_{j,s}^{+} = [B_{2,j}(t) + \Phi_j(t, \varepsilon) + \mu_j(t, \varepsilon)]e_s + O\left(\frac{1}{m^4}\right) + O(\varepsilon|\ln h|), \tag{16}$$

где $j = m + i_0, \dots, 2m-1$; $s = k+1, \dots, n$; $B_{2,j}(t)$ — нормализованный B-сплайн [9] степени 2 дефекта 1 с носителем (t_j, t_{j+3}); Φ_j и μ_j — скалярные функции, $\operatorname{supp} \mu_j \subset [t_{m+1}, t_j]$,

$$\operatorname{supp} \Phi_j \subset [t_j, t_{j+3}], \tag{17}$$

$$\|\Phi_j\|_{C[t_j, t_{j+3}]} \le \frac{c}{|j| - m} + O(\varepsilon), \tag{18}$$

$$\|\mu_j\|_{C[t_q]} \le c i_0^{-2}(1 + |q-j|)^{-2}, \quad q = m+1, \dots, 2m-1. \tag{19}$$

(Здесь c не зависит от i_0), e_s — единичный орт s-го направления.)

Лемма 4. *В пространстве F_1 существуют функции* $F_{j,s}^{+}$, $j = -2m-2, \dots,$

$-m-i_0-3$; $s = k+1, \dots, n$, для которых справедливы представления (16) – (18). *При этом* $\operatorname{supp}\mu_j \subset [t_{-2m}, t_j]$ *и* μ_j *удовлетворяют оценкам* (19) *для* $q == -2m, \dots, -m-1$.

Лемма 5. *В пространстве* F_1 *существуют функции* $F^-_{j,s}$, $j = m+i_0, \dots, 2m-1$; $s = 1, \dots, k$, *для которых справедливы представления* (16) – (18). *При этом* $\operatorname{supp}\mu_j \subset [t_{j+3}, t_{2m}]$ *и* μ_j *удовлетворяют оценкам* (19) *для* $q = m+1, \dots, 2m-1$.

Лемма 6. *В пространстве* F_1 *существуют функции* $F^-_{j,s}$, $j = -2m-2, \dots$ $\dots, -m-i_0-4$; $s = 1, \dots, k$, *для которых справедливы представления* (16) – (18). *При этом* $\operatorname{supp}\mu_j \subset [t_{j+3}, t_{-m-1}]$ *и* μ_j *удовлетворяют оценкам* (19) *для* $q = -2m, \dots, -m-1$.

***Доказательство леммы* 3.** Построим сначала вспомогательные функции $F_{j,s} = L_1 M_{j,s}$, где $M_{j,s} \in S(\Delta, 3, 1)$. Положим

$$M_{j,s} = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{\varepsilon}\displaystyle\int_{t_{j+3}}^{t} B_{2,j}(s)\,ds + \beta z_{1,j}(t) + \gamma z_{2,j}(t)\right) e_s, & t \in [t_j, 1], \\ \alpha\eta_s(t,\varepsilon), & t \in [-1, t_j]. \end{cases} \tag{20}$$

Здесь $\eta_s(t,\varepsilon)$ — аппроксимация в $[S(\Delta, 3, 1)]\, e_s$ фундаментальной системы решений уравнения $L_1\zeta = 0$, $\operatorname{supp}\eta_s \subset [t_{m+1}, 1]$; $z_{1,j}(t)$ и $z_{2,j}(t)$ — кубические сплайны из $C^2[t_j, t_{j+3}]$. Функции $z_{1,j}(t)$, $z_{2,j}(t)$ и коэффициенты α, β, γ подобраны так, чтобы $M_{j,s} \in C^2[-1, 1]$. Аналогично [4] можно показать, что

$$L_1 M_{j,s} = (B_{2,j}(t) + \Phi_j + \mu_j) e_s, \tag{21}$$

причем справедливы оценки (18), (19).

Далее, введем в рассмотрение функции $\hat{E}_{j,s} = [\hat{B}^{-1}(t,\varepsilon)\,\hat{B}(t,\varepsilon)] M_{j,s}$. Очевидно, $\hat{E}_{j,s} = \hat{B}^{-1}(t,\varepsilon)[S(\Delta, 3, 1)]^n$. Имеем $t_{2m} - t_{m+1} = 0(|\ln h|)$. Отсюда

$$L_1 \hat{E}_{j,s} = L_1 M_{j,s} + O(|\ln h|). \tag{22}$$

Так как функции $\hat{E}_{j,s}$ при $j = 2m-3, 2m-2, 2m-1$ не удовлетворяют краевым условиям (8), введем некоторые поправки к ним. Положим

$$E_{j,s} = \hat{E}_{j,s} + \sum_{\nu=k+1}^{n} \alpha_\nu \eta_\nu, \tag{23}$$

где $\hat{\eta}_\nu = \hat{\eta}_\nu(t,\varepsilon)$ — аппроксимация в $\hat{B}^{-1}(t,\varepsilon)[S(\Delta, 3, 1)]^n$ элементов фундаментальной системы решений уравнения $L_1\zeta = 0$. Коэффициенты α_ν подбираются так, чтобы функции $E_{j,s}$ удовлетворяли условиям (8) при всех j. По аналогии с [4] нетрудно доказать, что $\| L_1 E_{j,s} - L_1 \hat{E}_{j,s} \|_C \le c/m^4$. Отсюда и из (21) – (23) следует представление (16), где $F^+_{j,s} = L_1 E_{j,s}$. Лемма 3 доказана. Леммы 4 – 6 доказываются аналогично.

По аналогии с [5], учитывая, что $[\hat{B}^{-1}(t,\varepsilon)\hat{B}(t_j,\varepsilon)] = I + O(\varepsilon|\ln h|)$ (где I — тождественная матрица), в качестве недостающих базисных функций в пространстве F_1 возьмем функции вида

$$\begin{gathered} F_{j,s}^{+}(t) = L_1 B_{3,\,j-1}(t) e_s + O(\varepsilon|\ln h|), \\ j = -m - i_0 - 2, \dots, m + i_0; \quad s = k+1, \dots, n; \\ F_{j,s}^{-}(t) = L_1 B_{3,\,j}(t) e_s + O(\varepsilon|\ln h|), \\ j = -m - i_0 - 3, \dots, m + i_0 - 1; \quad s = 1, \dots, k. \end{gathered} \tag{24}$$

Совокупность полученных базисных функций в дальнейшем удобно обозначить и пронумеровать следующим образом: $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_q$, $q = (4m+2)\,n$ (где $\Phi_1, \dots, \Phi_{4m+2}$ соответствуют функциям $F_{-2m-2,\,1}, \dots, F_{2m-1,\,1}$ и т.д.).

5. Структура коллокационной матрицы Φ. Пусть $n = 1$. Уравнение (1) в этом случае принимает вид $\varepsilon\dot{x} - \lambda(t)x = d(t)$. Пусть для определенности $\lambda(t) \ge \lambda_0 > 0$. Тогда вместо краевых условий (2) должно быть задано начальное условие $x(1) = 0$. Заметим, что в случае $n = 1$ можно считать $\hat{B}(t,\varepsilon) \equiv 1$. Базис пространства F_1 будут образовывать функции $F_j(t) = F_j^{+}(t)$. Система (10) – (12) будет обычной системой скалярных уравнений с матрицей $\Phi\{F_j(\xi_i)\}$, $i \in I \cup I_2$, которую назовем коллокационной матрицей. Нужно доказать обратимость этой матрицы и получить равномерные по ε и h оценки

$$\|\Phi^{-1}\|_\infty \le c. \tag{25}$$

Из вида базисных функций (24) и лемм 3 – 6 следует, что матрицу Φ можно представить следующим образом:

$$\Phi = \hat{\Phi} + R. \tag{26}$$

Здесь матрица R в норме $\|\cdot\|_\infty$ имеет порядок $O(1/m^3)$.

Разобъем все точки коллокации на пять групп. К первой группе отнесем точки коллокации ξ_i, $i = -m-1, \dots, m+1$. Ко второй группе — точки ξ_i, $i = m+2, \dots, m+i_0+2$. К третьей группе — точки ξ_i, $i = -m-i_0-1, \dots, -m-2$. К четвертой — точки ξ_i, $i = m+i_0+3, \dots, 2m+2$, и, наконец, к пятой — точки ξ_i, $i = -2m-2, \dots, -m-i_0-3$. В соответствии с таким разбиением узлов матрицу $\hat{\Phi}$ представим в блочном виде

$$\hat{\Phi} = \|F_{ij}\|, \quad i,j = 1,2,\dots,5. \tag{27}$$

Матрицы, стоящие на главной диагонали, квадратные. Все блоки, за исключением F_{ii}, F_{12}, F_{21}, F_{23}, F_{43}, F_{45}, нулевые. Из вида базисных функций (16), (24) следует, что все блоки ограничены в норме $\|\cdot\|_\infty$ равномерно по ε и m. Используя леммы 3 – 6, формулы (24) и рекуррентные формулы для B-сплайнов и их производных [9], можно доказать, что при достаточно большом i_0, не зависящем от ε и m, блоки F_{11}, F_{33}, F_{55}, имеют строгое диагональное преобладание, а для F_{22}^{-1} и F_{44}^{-1} справедливы оценки $\|F_{22}^{-1}\|_\infty \le c i_0^c$, $\|F_{44}^{-1}\|_\infty \le c i_0^c$, где c не зависит от ε и m. Таким образом,

$$\| \hat{\Phi}^{-1} \|_\infty \leq c i_0^c. \tag{28}$$

И так как i_0 — фиксированное число, а m — неограниченно возрастает, то из (26), (28) следует оценка (25).

В случае $n = 2$ аналогично [3] можно показать, что коллокационная матрица Φ для системы (13) – (15) представима в виде $\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} \end{pmatrix} + R$, где матрицы Φ_{11} и Φ_{22} по структуре и свойствам аналогичны матрице (27), а матрица R в норме $\|\cdot\|_\infty$ имеет порядок $O(1/m^3)$. Из условий (14), (15) при этом получаем, что в матрицах Φ_{12} и Φ_{21} появятся ненулевые блоки, в каждом из которых отличны от нуля не более трех элементов. Используя структуру матриц Φ_{ij}, с помощью гауссовского метода исключения можно показать, что при малых $\varepsilon > 0$, для которых $\varepsilon |\ln \varepsilon| << 1/m$, матрица Φ обратима и для обратной матрицы справедлива оценка (25). Точно так же рассуждения проводятся и для произвольного n.

7. Завершение доказательства основной теоремы. Легко видеть, что свойство 1 леммы 2 для базиса Φ_ν выполнено. Значит, в силу лемм 1 и 2 семейство проекторов $P(\varepsilon, m)$ существует и равномерно ограничено. Отсюда по аналогии с [5] вытекает основная теорема.

1. *Марчук Г. И., Агошков В. И.* Введение в проекционно сеточные методы. – М.: Наука, 1981. – 414 с.
2. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы исследования решений краевых задач. – Киев: Наук думка, 1986. – 209 с.
3. *Блатов И. А., Стрыгин В. В.* Сходимость метода сплайн-коллокации на оптимальных сетках для сингулярно возмущенных краевых задач // Дифференц. уравнения. – 1988. – **24**, № 11. – С. 1977 – 1987.
4. *Блатов И. А., Стрыгин В. В.* Сходимость метода коллокаций для сингулярно возмущенных краевых задач. – Воронеж, 1987. – Деп. в ВИНИТИ, № 4710 – В87.
5. *Блатов И. А., Стрыгин В. В.* Сходимость метода сплайн-коллокаций для сингулярно возмущенных краевых задач на локально равномерных сетках // Дифференц. уравнения.– 1990. – **26**, № 7. – С. 1191 – 1197.
6. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. – М.: Наука, 1973. – 272 с.
7. *Бахвалов Н. С.* К оптимизации методов решения задач при наличии пограничного слоя // Журн. вичисл. математики и мат. физики. – 1969. – **9**, № 4. – С. 841 – 859.
8. *Ломов С. А.* Введение в общую теорию сингулярных возмущений.– М.: Наука, 1981.– 398 с.
9. *Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л.* Методы сплайн-функций. – М.: Наука, 1980. – 350 с.

Получено 16.09.91