УДК 517.55

В. Ю. Макаров, канд. физ.-мат. наук (Брян. пед. ин-т)

ХАРАКТЕРИСТИКИ СТЕПЕННОГО РОСТА МНОГОМЕРНОГО РЯДА ЭКСПОНЕНТ

The behavior of the sums of multidimensional series of exponents is studied in the neighborhood of the boundary of a domain of absolute convergence.

Вивчається поведінка сум багатовимірних рядів експонент поблизу межі області абсолютної збіжності.

Введение. Настоящая работа посвящена изучению роста суммы ряда

$$G(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{p=1}^{\infty} D_p e^{\langle z,\lambda_p \rangle}, \tag{1}$$

где $D_p \in \mathbb{C}$, $\{ \lambda_p^{(k)} \}$ — последовательности положительных чисел, $k = 1, \ldots, n$, $\langle z, \lambda_p \rangle$ — скалярное произведение. Показатели ряда (1) $\lambda_p = (\lambda_p^{(1)}, \ldots, \lambda_p^{(n)})$ удовлетворяют условию

$$\lim_{p \to +\infty} \left\{ \sum_{k=1}^{n} \lambda_p^{(k)} \right\}^{-1} \ln p = 0.$$

Для рядов вида (1) в работе вводятся понятия порядка и типа степенного роста вблизи границы сходимости. Установлена связь асимптотического поведения коэффициентов ряда с асимптотическим поведением его суммы $G(z_1, \ldots, z_n)$.

Понятие порядка и типа для степенных рядов, связь характеристик роста с коэффициентами Тейлора одномерного ряда впервые встречаются в работах Адамара [1]. Для рядов Дирихле Ритт определил порядок и тип роста, установил формулы для их вычисления через коэффициенты и показатели ряда [2]. Для одномерных рядов экспонент, абсолютно сходящихся в полуплоскости, аналогичные характеристики и зависимости встречаются в работах [3–5].

В [6] установлено, что область сходимости ряда (1) при выполнении условия (2) трубчатая $T = B + i\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$ с выпуклым, октантообразным основанием $B \subset \subset \mathbb{R}^n$ и уравнением границы сходимости

$$\partial B = \left\{ a \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \overline{\lim_{p \to +\infty}} \{ \ln |D_p| + \langle a, \lambda_p \rangle \} \, |\lambda_p|^{-1} = 0 \right\}.$$

В работе [7] введены характеристики роста, порядок, тип, R-порядок и R-тип роста при подходе к границе сходимости многомерного ряда экспонент с использованием параллельного переноса. Установлены связи коэффициентов ряда с характеристиками роста и положительными показателями. Рассматриваются шкалы медленного степенного роста суммы ряда (1) при подходе к любым точкам границы сходимости внутри октантов. Найдены формулы для нахождения порядка и типа роста в октанте через коэффициенты и показатели ряда. Полученные результаты являются новыми для $n \geq 1$ комплексных переменных. Установлена функциональная зависимость степенных характеристик роста от точек границы сходимости.

1. Порядок степенного роста в октанте. Обозначим

$$M(G, x_1, \ldots, x_n) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \{ |G(x+iy)| \}, \quad |\lambda_p| = \sum_{k=1}^{n} \lambda_p^{(k)},$$

открытый октант $Q(a)$ с вершиной в точке $a \in \partial B$:

$$Q(a) = \{x \in B \subset \mathbb{R}^n \mid x_k < a_k,\ k = 1, \dots, n,\ a \in \partial B\}$$

и пусть $u_k = a_k - x_k > 0,\ k = 1, \dots, n,\ d = \sqrt{\sum_{k=1}^n u_k^2}$.

Определение 1. *Величину*

$$\rho_{QD}(a_1, \dots, a_n) = \varlimsup_{d \to 0+} \frac{\ln M(G, x_1, \dots, x_n)}{\ln \sum_{k=1}^n u_k^{-1}}$$

назовем порядком степенного роста суммы ряда (1) *при подходе к точке* $a \in \partial B$ *внутри октанта* $Q(a) \subset B$.

Теорема 1. *Пусть показатели ряда* (1) *удовлетворяют условию*

$$\varlimsup_{p \to +\infty} \ln^{-1} \ln|\lambda_p| \ln\ln p = \beta_0 < 1. \tag{2}$$

Тогда порядок $\rho_{QD}(a_1, \dots, a_n) = \rho_{QD}(a)$ *вычисляется по формуле*

$$\rho_{QD}(a_1, \dots, a_n) = \varlimsup_{p \to +\infty} \ln^{-1}|\lambda_p| \ln^+\left(|D_p| e^{\langle a, \lambda_p\rangle}\right). \tag{3}$$

Доказательство. Пусть сумма ряда $G(z_1, \dots, z_n)$ имеет конечный порядок $\rho_{QD}(a) < +\infty$; $\forall \varepsilon > 0$ и $\forall d \in (0, d'(\varepsilon))$

$$|D_p| \exp\left(\langle a, \lambda_p\rangle\right) < \|u\|^\rho \exp\left(\langle u, \lambda_p\rangle\right), \tag{4}$$

где $u = (u_1, \dots, u_n)$, норма $\|u\| = \sum_{k=1}^n u_k^{-1}$, $\rho = \rho_{QD}(a) + \varepsilon > 0$. Выберем точку $u(u_1, \dots, u_n)$ с координатами

$$u_k = u_k^{(0)} = \frac{\rho}{\|\lambda_p\| \sqrt{\lambda_p^{(k)}}}, \quad k = 1, \dots, n,$$

где

$$\|\lambda_p\| = \sum_{k=1}^n \sqrt{\lambda_p^{(k)}}.$$

Очевидно, при $p \to +\infty$ величины $u_k^{(0)} \to 0+$, $k = 1, \dots, n$, и $\exists p' \in \mathbb{N}: \forall p \geq p'$ величины $u_k^{(0)}$, $k = 1, \dots, n$, удовлетворяют неравенству (4), тогда

$$E(a, p) = \ln|D_p| + \langle a, \lambda_p\rangle < \rho \ln\|\lambda_p\|^2 + \rho \ln\frac{e}{\rho},$$

следовательно,

$$\varlimsup_{p \to +\infty} \frac{E^+(a, p)}{\ln\|\lambda_p\|^2} \leq \rho_{QD}(a_1, \dots, a_n) + \varepsilon.$$

Замечая, что функции $\ln\|\lambda_p\|^2$ и $\ln|\lambda_p|$ эквивалентны при $p \to +\infty$, имеем

$$\gamma_0 = \varlimsup_{p \to +\infty} \frac{E^+(a, p)}{\ln|\lambda_p|} \leq \rho_{QD}(a_1, \dots, a_n) + \varepsilon, \quad \varepsilon \to 0+ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \gamma_0 \leq \rho_{QD}(a_1, \dots, a_n).$$

Теперь докажем, что $\gamma_0 \geq \rho_{QD}(a)$: $\forall \varepsilon > 0$ и $\forall p \geq p_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$

$$|D_p| < \|\lambda_p\|^{2\gamma} \exp\left(-\langle a, \lambda_p\rangle\right),$$

где $\gamma = \gamma_0 + \varepsilon > 0$ или $\forall p$

$$|D_p| < B(\varepsilon) \| \lambda_p \|^{2\gamma} e^{-\langle a, \lambda_p \rangle},$$

$B(\varepsilon)$ — константа при фиксированном $\varepsilon > 0$, тогда

$$M(G, x_1, \ldots, x_n) < B(\varepsilon) \sum_{p=1}^{\infty} \exp \left\{ \ln \left[\sum_{k=1}^{n} \sqrt{\lambda_p^{(k)}} \right]^{2(\gamma+\varepsilon)} - \langle u, \lambda_p \rangle \right\} e^{-\varepsilon \ln \| \lambda_p \|^2}.$$

Рассмотрим функцию

$$\psi(t_1, \ldots, t_n) = 2(\gamma + \varepsilon) \ln \sum_{k=1}^{n} t_k - \sum_{k=1}^{n} u_k t_k^2,$$

где $t_k \geq 0$, $k = 1, \ldots, n$. Нетрудно видеть, что функция $[-\psi(t_1, \ldots, t_n)]$ является выпуклой [8], следовательно, точка $t(t_1, \ldots, t_n)$ с координатами

$$t_k = t_k^{(0)} = \frac{(\gamma + \varepsilon)^{1/2}}{u_k} \| u \|^{-1/2}, \quad k = 1, \ldots, n,$$

являетея точкой абсолютного максимума функции $\psi(t_1, \ldots, t_n)$, тогда

$$M(G, x) < B(\varepsilon) \exp \left(\max_{t \in \mathbb{R}_+^n} \psi(t_1, \ldots, t_n) \right) \sum_{p=1}^{\infty} e^{-\varepsilon \ln \| \lambda_p \|^2} =$$

$$= B(\varepsilon) \exp \{ (\gamma + \varepsilon) [\ln (\| u \| (\gamma + \varepsilon)) - 1] \} \sum_{p=1}^{\infty} \exp (-\varepsilon \ln \| \lambda_p \|^2). \tag{5}$$

Ряд в правой части (5) сходится при условии (2). В самом деле, из (2) вытекает $\forall \delta > 0 \colon \tau = 1 - \beta - \delta > 0$, $\forall p \geq p^* \in \mathbb{N}$, $\ln p < \ln^{\beta_0 + \delta} |\lambda_p|$ или $\forall \varepsilon > 0$ выполняются неравенства

$$\ln p^{\varepsilon (\ln |\lambda_p|)^\tau} < \varepsilon \ln |\lambda_p| \leq \varepsilon \ln \| \lambda_p \|^2$$

и $\exists p_1 \in \mathbb{N} \colon \forall p \geq p_1$ справедливо неравенство

$$\frac{\ln \ln p}{\ln \ln |\lambda_p|} < \varepsilon \frac{\ln^\tau |\lambda_p|}{\ln \ln |\lambda_p|} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall p \geq \max \{p, p^*\}, \quad \ln p \ln \ln p < \varepsilon \ln \| \lambda_p \|^2,$$

но тогда

$$\sum_{p=1}^{\infty} e^{-\varepsilon \ln \| \lambda_p \|^2} < \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^{\ln \ln p}} < +\infty.$$

Значит, и ряд в правой части (5) сходится к C_1. Тогда

$$M(G, x_1, \ldots, x_n) < B(\varepsilon) C_1 \exp \left\{ (\gamma + \varepsilon) \ln \frac{\| u \| (\gamma + \varepsilon)}{e} \right\},$$

откуда $\forall d \in (0, d^*)$ справедлива оценка

$$\ln M(G, x) < (\gamma + 2\varepsilon) \ln \frac{\| u \| (\gamma + \varepsilon)}{e}$$

и, в свою очередь,

$$\rho_{QD}(a) = \overline{\lim_{d \to 0+}} \frac{\ln M(G, x)}{\ln \| u \|} \leq \gamma + 2\varepsilon = \gamma_0 + 3\varepsilon, \quad \varepsilon \to 0+ \quad \Rightarrow \quad \rho_{QD}(a) \leq \gamma_0.$$

Теорема 1 доказана при $\rho_{QD}(a) \in [0, +\infty)$. Очевидно, теорема 1 верна и для $\rho_{QD}(a_1, \dots, a_n) = +\infty$.

2. Тип степенного роста в октанте.

Определение 2. *Величину*

$$\sigma_{QD}(a_1, \dots, a_n) = \varlimsup_{d \to 0+} \frac{M(G, x_1, \dots, x_n)}{\|u\|^{\rho_{QD}(a)}}$$

назовем типом степенного роста суммы ряда (1) *при подходе к* $a \in \partial B$ — *точке границы сходимости внутри октанта* $Q(a) \subset B$, *если порядок* $\rho_{QD}(a) \in (0, +\infty)$.

Теорема 2. *Пусть показатели ряда* (1) *удовлетворяют условию* (2). *Тогда тип степенного роста* $\sigma_{QD}(a_1, \dots, a_n)$ *вычисляется по формуле*

$$\sigma_{QD}(a_1, \dots, a_n) = \left[\frac{\rho_{QD}(a_1, \dots, a_n)}{\exp(1)} \right]^{\rho_{QD}(a_1, \dots, a_n)} \varlimsup_{p \to +\infty} \frac{|D_p| e^{\langle a, \lambda_p \rangle}}{\|\lambda_p\|^{2\rho_{QD}(a_1, \dots, a_n)}}.$$

Доказательство. Пусть сумма ряда (1) имеет конечный тип роста. Тогда $\forall \varepsilon > 0$ и $\forall d \in (0, d')$ справедлива оценка

$$M(G, x_1, \dots, x_n) < \sigma \|u\|^{\rho},$$

где $\sigma = \sigma_{QD}(a_1, \dots, a_n) + \varepsilon > 0$, $\rho = \rho_{QD}(a) \in (0, +\infty)$. Учитывая оценку для коэффициентов ряда (1), получаем

$$|D_p| < \sigma \|u\|^{\rho} e^{-\langle x, \lambda_p \rangle}$$

или

$$|D_p| \exp\left(\langle a, \lambda_p \rangle \right) < \sigma \|u\|^{\rho} \exp\left(\langle u, \lambda_p \rangle \right) = \sigma \exp\left(\rho \ln \|u\| + \langle u, \lambda_p \rangle \right). \quad (6)$$

Точка $u(u_1, \dots, u_n)$ с координатами u_k, $k = 1, \dots, n$:

$$u_k = u_k^{(0)} = \frac{\rho}{\|\lambda_p\| \sqrt{\lambda_p^{(k)}}}$$

$\forall p \geq p_0$, удовлетворяет неравенству (6), тогда

$$|D_p| e^{\langle a, \lambda_p \rangle} < \sigma \|\lambda_p\|^{2\rho} \left(\frac{e}{\rho} \right)^{\rho},$$

откуда

$$\gamma_0 = \varlimsup_{p \to +\infty} \left(\frac{\rho}{e} \right)^{\rho} \frac{|D_p| e^{\langle a, \lambda_p \rangle}}{\|\lambda_p\|^{2\rho}} \leq \sigma_{QD}(a) + \varepsilon, \ \varepsilon \to 0+ \ \Rightarrow \ \gamma_0 \leq \sigma_{QD}(a).$$

Докажем теперь, что $\gamma_0 \geq \sigma_{QD}(a)$: $\forall \varepsilon > 0$ и $\forall p \geq p' \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$|D_p| e^{\langle a, \lambda_p \rangle} < \gamma \|\lambda_p\|^{2\rho} \left(\frac{e}{\rho} \right)^{\rho},$$

где $\gamma = \gamma_0 + \varepsilon > 0$,

$$M(G, x_1, \dots, x_n) \leqslant \sum_{p=1}^{\infty} |D_p| e^{\langle x, \lambda_p \rangle} < \sum_{p=1}^{\infty} \gamma \|\lambda_p\|^{2\rho} \left(\frac{e}{\rho} \right)^{\rho} e^{-\langle u, \lambda_p \rangle}$$

или

$$M(G,x) < \left(\frac{e}{\rho}\right)^{\rho} \gamma \sum_{p=1}^{\infty} \exp\left\{ \ln \| \lambda_p \|^{2\rho+2\varepsilon} - \langle u, \lambda_p \rangle \right\} \exp(-\varepsilon \ln \| \lambda_p \|^2) <$$

$$< \gamma \left(\frac{e}{\rho}\right)^{\rho} \exp\{(\rho+\varepsilon)[\ln(\|u\|(\rho+\varepsilon)) - 1]\} \sum_{p=1}^{\infty} e^{-\varepsilon \ln \|\lambda_p\|^2}. \tag{7}$$

Ряд в правой части (7) сходится при условии (3), тогда справедливо неравенство $\forall\, d \in (0,\, d'')$

$$M(G,x) < (\gamma_0 + 2\varepsilon) \| u \|^{\rho+\varepsilon},$$

откуда

$$\overline{\lim_{d \to 0+}} \frac{M(G,x)}{\|u\|^{\rho+\varepsilon}} \le \gamma + 2\varepsilon, \quad \varepsilon \to 0+,$$

следовательно, $\sigma_{QD}(a_1, \dots, a_n) \le \gamma_0$ и при конечном типе теорема доказана. Теорема 2 при $\sigma_{QD}(a) = +\infty$, очевидно, справедлива.

Замечания. **1.** В одномерном случае для ряда

$$\sum_{p=1}^{\infty} a_p e^{\lambda_p z}, \quad a_p \in \mathbb{C}, \quad 0 < \lambda_p \uparrow +\infty,$$

при выполнении условия

$$\overline{\lim_{p \to +\infty}} \frac{\ln \ln p}{\ln \ln \lambda_p} < 1$$

порядок и тип степенного роста вычисляются по формулам

$$\rho_D = \overline{\lim_{p \to +\infty}} \ln^{-1} \lambda_p \ln^{+}\left(|a_p| e^{a\lambda_p} \right).$$

Если $\rho_D \in (0, +\infty)$, то

$$\sigma_D = \left(\rho_D e^{-1} \right)^{\rho_D} \overline{\lim_{p \to +\infty}} \lambda_p^{-\rho_D} |a_p| e^{a\lambda_p}.$$

2. Нетрудно видеть, что в случае $n \ge 2$ порядок и тип степенного роста в октанте функционально связаны с точками границы сходимости и не зависят от направлений подхода. Подходить к точке границы можно по любому спрямляемому пути внутри октанта, если расстояние от точек $x \in Q(a) \cap B$ до $a \in \partial B$ стремится к нулю. В этом случае степенной рост суммы ряда (1) не изменяется. Если же окажется, что характеристика роста отлична от нуля в точке $a \in \partial B$ границы, то a – особая точка границы сходимости.

1. *Hadamard J.* Essai sur l'étude des fonctions données par leur développment de Taylor // De Math. pures et appl. – 1892. – **4**, № 8. – P. 101 – 186.
2. *Ritt J. F.* Note on Dirichlet series with complex exponents // Ann. math. – 1925. – **26**. – P. 144.
3. *Nandan K.* On the maximum terma, maximum moduli of analitic functions represented by Dirichlet series // Ann. Polon. Math. – 1973. – № 28. – P. 213 – 222.
4. *Nandan K.* On the lower order of analitic functions represented by Dirichlet series // Rev. roum. math. pures et appl. – 1976. – № 10. – P. 1361 – 1368.
5. *Бойчук В. С.* О росте абсолютно сходящихся в полуплоскости рядов Дирихле // Математический сборник. – Киев: Наук. думка, 1976. – С. 238 – 240.
6. *Громов В. П.* К теории кратных рядов Дирихле. II // Изв. АН АрмССР. Математика. – 1972. – № 2. – С. 89 – 103.
7. *Макаров В. Ю.* О росте суммы кратного ряда экспонент // Изв. вузов. Математика. – 1990. – № 8. – С. 84 – 86.
8. *Тихомиров В. М.* Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. – М., 1987. – Т. 14. – С. 35.

Получено 20.11.91