УДК 517.5

Ю. И. Мельник, д-р физ.-мат. наук (Ин-т математики АН Украины, Киев)

О РАСХОДИМОСТИ РЯДОВ ЭКСПОНЕНТ, ПРЕДСТАВЛЯЮЩИХ РЕГУЛЯРНЫЕ В ВЫПУКЛЫХ МНОГОУГОЛЬНИКАХ ФУНКЦИИ

We establish the existence of functions from the Smirnov class E on a convex polygon whose series of exponentials are divergent in the metric of the space E. Similar facts are proved for the convergence almost everywhere on a boundary of a polygon, for the uniform convergence on a closed polygon, and for the pointwise convergence at noncorner points of the boundary.

Доведено існування функцій класів Смирнова E на опуклому многокутнику, ряди експонент яких розбігаються у метриці простору E. Аналогічні факти встановлені у випадку збіжності майже скрізь на межі многокутника, рівномірної збіжності на замкненому многокутнику та поточкової збіжності в некутових межових точках.

1. Пусть $\overline{M}$ — замкнутый выпуклый многоугольник с вершинами в точках γ_1, $\gamma_2, \ldots, \gamma_N$, $N \geq 3$, M — открытая часть $\overline{M}$ и $0 \in M$. Через $E^p(M)$, $p \geq 1$, обозначим пространство всех регулярных в M функций $f(z)$, для которых

$$\sup_n \int_{C_n} |f(z)|^p |dz| < \infty,$$

где C_n — некоторая последовательность спрямляемых контуров, расположенных в M и стремящихся к границе ∂M.

Известно [1], что любая функция $f \in E^p(M)$ имеет почти всюду на ∂M угловые предельные значения, определяющие функцию (сохраним для нее обозначение $f(z)$), p-я степень модуля которой интегрируется на ∂M. В пространстве $E^p(M)$ вводится норма по формуле

$$\|f\|_p \stackrel{\mathrm{df}}{=} \left\{ \int_{\partial M} |f(z)|^p |dz| \right\}^{1/p},$$

после чего оно становится банаховым. Пусть

$$\mathfrak{L}(\lambda) = \sum_{k=1}^{N} d_k \exp(\gamma_k \lambda), \quad d_k \neq 0,$$

— экспоненциальный полином (квазиполином). Известно [2, с. 56], что множество корней (для простоты предполагается, что все они простые) Λ квазиполинома $\mathfrak{L}(\lambda)$ можно представить в виде

$$\Lambda = \{\lambda_m\}_{m=1}^{m_0} \cup \left(\bigcup_{j=1}^{N} \{\lambda_m^{(j)}\}_{m=m(j)}^{\infty} \right),$$

где m_0 и $m(j)$, $j = 1, 2, \ldots, N$, — некоторые фиксированные натуральные числа. Функции $f \in E^p(M)$, $p \geq 1$, ставится в соответствие ряд экспонент вида

$$f(z) \sim \sum_{m=1}^{m_0} \omega(f; \lambda_m) \exp(\lambda_m z) / \mathfrak{L}'(\lambda_m) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N} \sum_{m=m(j)}^{\infty} \omega(f; \lambda_m^{(j)}) \exp(\lambda_m^{(j)} z) / \mathfrak{L}'(\lambda_m^{(j)}), \tag{1}$$

где

$$\omega(f;\lambda_m^{(j)}) = \sum_{k=1}^{N} d_k \int_{\gamma_{jk}} f(\zeta)\exp\{-\lambda_m^{(j)}(\zeta-\gamma_k)\}\,d\zeta,$$

γ_{jk} — часть ломаной ∂M, соединяющая вершины γ_j и γ_k (на которой $0 \le \arg\{(\gamma_k-\zeta)/(\gamma_{j+1}-\gamma_j)\} \le \pi$ $(\zeta\in\gamma_{jk})$), так что $|\exp\{-\lambda_m^{(j)}(\zeta-\gamma_k)\}| \le$ $\le \text{const}$ $(\zeta\in\gamma_{jk})$); аналогичные формулы справедливы для коэффициентов $\omega(f;\lambda_m)$, (в качестве контура интегрирования в этом случае может быть взята любая из двух ломаных γ_{1k}, соединяющих вершины γ_1 и γ_k).

В работе [3] доказано, что при $1<p<\infty$ ряд (1) сходится к $f(z)$ в метрике пространства $E^p(M)$, а в работе [4] — что он сходится почти всюду на ∂M. В данной работе установлено, что оба эти утверждения не выполняются при $p=1$. Рассмотрены также случаи равномерной и поточечной сходимости.

2. Обозначим через $S_n(f)$ частичную сумму ряда (1):

$$S_n(f)(z) = \sum_{m=1}^{m_0} \omega(f;\lambda_m)\exp(\lambda_m z)/\mathfrak{L}'(\lambda_m) +$$
$$+ \sum_{j=1}^{N}\sum_{m=m(j)}^{\infty} \omega(f;\lambda_m^{(j)})\exp(\lambda_m^{(j)}z)/\mathfrak{L}'(\lambda_m^{(j)}).$$

Теорема 1. *Существует функция $f\in E^1(M)$ такая, что*

$$\|S_n\|_1 \to \infty \quad (n\to\infty). \tag{2}$$

Доказательство. Обозначим через H пространство Харди в единичном круге и пусть $\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \in H$ такая, что

$$\|s_n(\varphi)\|_H \to \infty \quad (n\to\infty) \tag{3}$$

(здесь $s_n(\varphi)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$; существование $\varphi(z)$ следует из теоремы Банаха – Штейнгауза и того факта, что $\|s_n\|_{H\to H}\to\infty$). Зафиксируем j_0, $1\le j_0\le N$, и положим

$$f(z) = \sum_{m=m(j_0)}^{\infty} a_m \exp(\lambda_m^{(j_0)}z)/\mathfrak{L}'(\lambda_m^{(j_0)}). \tag{4}$$

Имеем [5]

$$B_j\exp\{(\gamma_{j_0}-\gamma_{j_0+1})q_{j_0}\exp(i\alpha_{j_0})/2\}\,\varphi(\exp\{2\pi i(z-\gamma_{j_0})/(\gamma_{j_0+1}-\gamma_{j_0})\})\times$$
$$\times\exp\{q_{j_0}\exp(i\alpha_{j_0})(z-\gamma_{j_0})\} - f(z) = -\sum_{m=m(j_0)}^{\infty} a_m\{\exp(\lambda_m^{(j_0)}z)/\mathfrak{L}'(\lambda_m^{(j_0)}) -$$
$$- B_{j_0}(-1)^m\exp(\mathring{\lambda}_m^{(j_0)}(z-(\gamma_{j_0}+\gamma_{j_0+1})/2))\}, \tag{5}$$

$$B_j = \text{const},\ q_{j_0} = \text{const},\ \alpha_{j_0} = \text{const},\ \mathring{\lambda}_m^{(j_0)} = 2\pi mi/(\gamma_{j_0+1}-\gamma_{j_0}) + q_{j_0}\exp(i\alpha_{j_0}).$$

Из условия $\varphi\in H$ следует, что первый член в левой части равенства (5) принадлежит $E^1(M)$; правая же часть (5) является функцией, регулярной в M и непрерывной в $\overline{M}$ (см., например, [5]). Поэтому из (5) следует, что $f\in E^1(M)$. Далее из условия $a_m\to 0$ $(m\to 0)$ и теоремы единственности [6] следует, что ряд (4) является рядом вида (1). Осталось установить (2). Используя неравенство [5]

$$|\exp(\lambda_m^{(j_0)} z) / \mathfrak{L}'(\lambda_m^{(j_0)}) - (-1)^m B_{j_0} \exp\{\mathring{\lambda}_m^{(j_0)}(z - (\gamma_{j_0} + \gamma_{j_0+1})/2)\}| \le$$
$$\le A \exp(-am), \quad A = \text{const}, \quad 0 < a = \text{const}, \tag{6}$$

и соотношение (3), окончательно получаем

$$\|S_n(f)\|_1 > \int_{\gamma_{j_0}}^{\gamma_{j_0+1}} |S_n(f)(z)||dz| \asymp \|s_n(\varphi)\|_H \to \infty \quad (n \to \infty).$$

Теорема доказана.

Теорема 2. *Существует функция* $f \in E^1(M)$ *такая, что ряд* (1) *расходится почти всюду на* ∂M.

Доказательство. Пусть $\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \in H$ такая, что ряд Фурье функции $\varphi(e^{i\theta})$, расходится почти всюду [7, с. 482]. Положим

$$f_j(z) = \sum_{m=m(j)}^{\infty} a_m \exp(\lambda_m^{(j)} z) / \mathfrak{L}'(\lambda_m^{(j)}), \quad j = 1, 2, \dots N, \tag{7}$$

$$f(z) = \sum_{j=1}^{N} f_j(z) \equiv \sum_{j=1}^{N} \sum_{m=m(j)}^{\infty} a_m \exp(\lambda_m^{(j)} z) / \mathfrak{L}'(\lambda_m^{(j)}). \tag{8}$$

Как и при доказательстве теоремы 1, видим, что все функции $f_j(z)$, $j = 1, 2, \dots N$, принадлежат $E^1(M)$ и, значит, $f \in E^1(M)$; кроме того, все ряды (7) являются рядами вида (1) и, значит, ряд (8) также является рядом вида (1).

Осталось убедиться, что ряд (8) расходится почти всюду на ∂M. Зафиксируем произвольное натуральное k, $1 \le k \le N$. Из (6) следует, что при $j \ne k$ все ряды (7) сходятся во всех внутренних точках стороны $[\gamma_k, \gamma_{k+1}]$, а ряд (7) при $j = k$, учитывая расходимость ряда Фурье функции $\varphi(\exp(i\theta))$, расходится почти всюду на $[\gamma_k, \gamma_{k+1}]$. Поэтому ряд (8) расходится почти всюду на $[\gamma_k, \gamma_{k+1}]$. Этим теорема доказана.

Отправляясь от „подходящих" функций $\varphi(z)$ (см., например, [7, с. 475, 473], аналогично устанавливаются следующие результаты.

Теорема 3. *Существует регулярная в* M *и непрерывная на* $\overline{M}$ *функция* $f(z)$ *такая, что ряд* (1) *сходится на* ∂M, *но неравномерно.*

Теорема 4. *Существует регулярная в* M *и непрерывная на* $\overline{M}$ *функция* $f(z)$ *такая, что ряд* (1) *расходится в неугловых точках* z_j, $j = 1, 2, \dots, N-1$, *лежащих на сторонах* $[\gamma_j, \gamma_{j+1}]$.

1. *Привалов И. И.* Граничные свойства аналитических функций. – М.; Л.: Гостехиздат, 1950. – 336 с.
2. *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент. – М.: Наука, 1976. – 536 с.
3. *Седлецкий А. М.* Базисы из экспонент в пространствах E^p на выпуклых многоугольниках // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1978. – **42**, № 5. – С. 1101–1119.
4. *Мельник Ю. И.* О представлении регулярных функций радами Дирихле в замкнутых выпуклых многоугольниках // Укр. мат. журн. – 1977. – **29**, № 6. – С. 826–830.
5. *Мельник Ю. И.* О скорости сходимости рядов экспонент, представляющих регулярные в выпуклых многоугольниках функции // Там же. – 1985. – **37**, № 6. – С. 719–722.
6. *Мельник Ю. И.* О единственности разложения регулярных в выпуклых многоугольниках функций в ряды экспонент // Там же. – 1982. – **34**, № 2. – С. 217–219.
7. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 3-х т. – М.: Мир, 1965. – Т. 1. – 615 с.

Получено 11.03.92