УДК 519.21

Н. В. Москальцова, асп.,
В. М. Шуренков, д-р фіз.-мат. наук. (Київ. автодорожн. ін-т)

ПРО ПОТЕНЦІАЛИ ЕРГОДИЧНИХ ЛАНЦЮГІВ МАРКОВА

Two theorems on the existence of a potential of an ergodic Markov chain in an arbitrary phase space are proved.

Доведено дві теореми про існування потенціалу ергодичного ланцюга Маркова в довільному фазовому просторі.

Дана работа є продовженням [1].

Розглянемо однорідний ланцюг Маркова X_n в деякому вимірному фазовому просторі $(E, \mathfrak{A})$; σ-алгебра $\mathfrak{A}$ є лічильно породженою. Вважатимемо ланцюг ергодичним і позначимо через π його стаціонарну ймовірнісну міру, а через $Q^n(x, A)$ — ймовірність переходу за n кроків. Дослідимо поведінку його потенціалу, а точніше, знайдемо такі функції f, що існуватиме границя $\lim\limits_{p \uparrow 1} R_p f(x)$, де

$$R_p = \sum_{n \geq 0} p^n Q^n, \quad Qf(x) = \int Q(x, dy) f(y).$$

Спочатку введемо деякі поняття, що будуть необхідні далі. Сукупність $\mathfrak{A}$-вимірних множин $\mathcal{E}$ називатимемо мізерним класом, якщо:

1) для будь-яких $A, B \in \mathcal{E}$ виконуються $A \bigcup B \in \mathcal{E}$;

2) з $A_0 \subset A$, $A \in \mathcal{E}$ випливає $A_0 \in \mathcal{E}$.

Тобто, $\mathcal{E}$ — мізерний клас, якщо він замкнений відносно скінченного об'єднання своїх множин, а також містить всі $\mathfrak{A}$-вимірні підмножини всіх своїх елементів.

Якщо деякий клас $\mathcal{E}$ містить таку злічену кількість множин, яка покриває весь простір E, то називатимемо цей клас повним. $\mathfrak{A}$-вимірну функцію f будемо називати $\mathcal{E}$-фінітною, якщо $f = 0$ поза деякою множиною з $\mathcal{E}$. Позначимо для зручності $\langle \pi, f \rangle = \int \pi(dx) f(x)$.

Теорема 1. *Існує такий мізерний повний клас $\mathcal{E}$, що границя*

$$\lim_{p \uparrow 1} R_p f(x)$$

існує та скінченна для всіх $\mathcal{E}$-фінітних обмежених функцій f з $\langle \pi, f \rangle = 0$, для всіх $x \in E$.

Доведення. Позначимо через Y_n, $n \geq 0$, ланцюг Маркова, що є вкладеним у ланцюг X_k, $k \geq 0$, в моменти часу ν_n такі, що величини $\nu_0 = 0, \nu_1 - \nu_0, \ldots$ $\ldots, \nu_{k+1} - \nu_k, \ldots$ незалежні та $P(\nu_{k+1} - \nu_k = r) = 2^{-r}$, $r \geq 1$. Тобто $Y_n = X_{\nu_n}$. Очевидно, Y_n — однорідний ергодичний ланцюг Маркова, що має перехідні ймовірності $\tilde{Q}(x, A)$, де

$$\tilde{Q} = \sum_{k \geq 1} 2^{-k} Q^k,$$

і інваріантну міру π.

Оскільки Y_n ергодичний ланцюг, то згідно з лемою 1 ([2], гл. 1, § 2) можна знайти всюди додатну $\mathfrak{A}$-вимірну функцію q та ймовірнісну міру ρ такі, що $\tilde{Q}(x, A) \geq q(x)\rho(A)$. І тому що міра $q(x)\rho(dy)$ абсолютно неперервна відносно міри $\tilde{Q}(x, dy)$, існує функція $p(x, y)$, вимірна по парі своїх змінних, така, що

$$p(x, y) = \frac{q(x)\rho(dy)}{\tilde{Q}(x, dy)}, \quad 0 \leq p(x, y) \leq 1,$$

тобто,

$$q(x)\rho(A) = \int_A p(x, y)\,\tilde{Q}(x, dy).$$

Згідно з [2] (гл. 2, § 1) існує такий момент часу τ, що $\mathbb{P}_x\{\tau < \infty\} = 1$, $\mathbb{P}_x\{\tau = n, Y_\tau \in A\} = \mathbb{P}_x\{\tau = n\}\rho(A)$ для всіх x,

$$\rho(A) = \mathbb{P}_x\{Y_\tau \in A\}, \quad \mathbb{P}_\rho \tau = \int \rho(dx)\,\mathbb{P}_x \tau,$$

виявляється скінченним. А саме: нехай, як і в [2], $\tau = \inf\{n \geq 1 : p(Y_{n-1}, Y_n) \geq \theta_n\}$, де випадкові величини θ_k, $k \geq 0$, незалежні в сукупності, а також не залежать від ланцюга Y_n, $n \geq 0$, та мають спільний рівномірний розподіл на $[0, 1]$. Зауважимо, що

$$\langle \pi, f \rangle = \frac{1}{\mathbb{P}_\rho \tau}\,\mathbb{P}_\rho \sum_{n=0}^{\tau-1} f(Y_n).$$

Розглянемо поведінку резольвенти $\tilde{R}_t$ ланцюга Y_n, якщо $t \uparrow 1$, а саме:

$$\tilde{R}_t f(x) = \mathbb{P}_x \sum_{n \geq 0} t^n f(Y_n) = \mathbb{P}_x \sum_{n=0}^{\tau-1} t^n f(Y_n) + \mathbb{P}_x \sum_{n \geq \tau} t^n f(Y_n) =$$

$$= \mathbb{P}_x \sum_{n=0}^{\tau-1} t^n f(Y_n) + \mathbb{P}_x \left[t^\tau \sum_{n \geq 0} t^n\,\mathbb{P}_{Y_\tau} f(Y_n) \right]. \tag{1}$$

Останнє рівняння є можливим завдяки тому, що ланцюг Y_n має марківську властивість у момент часу τ. Позначимо для зручності

$$\tilde{G}_t f(x) = \mathbb{P}_x \sum_{n=0}^{\tau-1} t^n f(Y_n), \quad \tilde{\varphi}_t(x) = \mathbb{P}_x t^\tau.$$

Тоді, проінтегрувавши обидві частини рівняння (1), будемо мати $\langle \rho, \tilde{R}_t f \rangle = \langle \rho, \tilde{G}_t f \rangle + \langle \rho, \tilde{\varphi}_t \rangle \langle \rho, \tilde{R}_t f \rangle$, звідки

$$\langle \rho, \tilde{R}_t f \rangle = \frac{\langle \rho, \tilde{G}_t f \rangle}{1 - \langle \rho, \tilde{\varphi}_t \rangle}.$$

Тому (1) можна переписати у вигляді

$$\tilde{R}_t f(x) = \tilde{G}_t f(x) + \tilde{\varphi}_t(x)\,\frac{\langle \rho, \tilde{G}_t f \rangle}{1 - \langle \rho, \tilde{\varphi}_t \rangle}. \tag{2}$$

Очевидно, $\tilde{\varphi}_t(x) \to 1$,

$$\langle \rho, \tilde{G}_t f \rangle \to \mathbb{P}_\rho \sum_{n=0}^{\tau-1} f(Y_n) \ \text{ та } \ 1 - \langle \rho, \tilde{\varphi}_t \rangle \ \text{ і } \ (1-t)\,\mathbb{P}_\rho \tau$$

мають спільну границю при $t \uparrow 1$. Розглянемо другий доданок правої частини (2), він буде мати спільну границю з

$$\frac{1}{(1-t)\mathbb{P}_\rho \tau} \mathbb{P}_\rho \sum_{n=0}^{\tau-1} t^n f(Y_n)$$

при $t \uparrow 1$, а саме:

$$\frac{1}{\mathbb{P}_\rho \tau} \mathbb{P}_\rho \sum_{n=0}^{\tau-1} n f(Y_n).$$

Позначимо $h_m(x) = \mathbb{P}_x\{\tau \le m\}$ та розглянемо

$$\mathbb{P}_\rho \sum_{n=0}^{\tau-1} n\, h_m(Y_n) = \mathbb{P}_\rho \sum_{n \ge 0} n \left[1_{\{n<\tau\}} \mathbb{P}_{Y_n}\{\tau \le m\} \right] =$$

$$= \sum_{n \ge 0} n\, \mathbb{P}_\rho \Big\{ p(Y_0, Y_1) < \theta_1, \ldots, p(Y_{n-1}, Y_n) < \theta_n, \ 1 -$$

$$- \mathbb{P}_{Y_n}\{p(Y_0, Y_1) < \theta_1, \ldots, p(Y_{m-1}, Y_m) < \theta_m\} \Big\}.$$

Позначимо для зручності

$$\alpha_k^l = \prod_{j=l}^{k-1} [1 - p(Y_j, Y_{j+1})],$$

тоді

$$\mathbb{P}_\rho \sum_{n=0}^{\tau-1} n\, f_m(Y_n) = \sum_{n \ge 0} n\, \mathbb{P}_\rho \Big(\alpha_n^0 (1 - \mathbb{P}_{Y_n} \alpha_m^0) \Big) =$$

$$= \sum_{n \ge 0} n\, \mathbb{P}_\rho \Big(\alpha_n^0 (1 - \alpha_{n+m}^n) \Big) = \sum_{n \ge 0} n \Big(\mathbb{P}_\rho \alpha_n^0 - \mathbb{P}_\rho \alpha_{n+m}^0 \Big) =$$

$$= \sum_{n \ge 0} n\, \mathbb{P}_\rho\{n < \tau \le n+m\} \le m \mathbb{P}_\rho \tau. \tag{3}$$

Далі одержуємо

$$\mathbb{P}_x \sum_{n=0}^{\tau-1} h_m(Y_n) = \mathbb{P}_x \sum_{n \ge 0} 1_{\{n<\tau\le n+m\}} \le m. \tag{4}$$

Зауважимо, що $h_m(x) \uparrow 1$ при $m \to \infty$, тому для всіх x шляхом вибору достатньо великих m можна забезпечити $h_m(x) \ge 1/2$. Введемо множини $E_m\{x \in \in E\colon h_m(x) \ge 1/2\}$, тоді $h_m(x) \ge (1/2)\, 1_{E_m}(x)$ для всіх x. Сукупність множин E_m утворює мізерний повний клас. Маємо

$$\tilde{\mu}(E_m) = \sum_{n \ge 0} n\, \mathbb{P}_\rho\{Y_n \in E_m, \ n < \tau\} = \sum_{n \ge 0} n\, \mathbb{P}_\rho 1_{E_m}(Y_n)\, 1_{\{n<\tau\}} \le$$

$$\le 2 \sum_{n \ge 0} n\, \mathbb{P}_\rho h_m(Y_n)\, 1_{\{n<\tau\}}. \tag{5}$$

З урахуванням (3) $\tilde{\mu}(E_m) < \infty$. Крім того, якщо f — $\mathcal{E}$-фінітна функція, то з

(2) – (5) випливає

$$|\tilde{R}_t f(x)| \le Cm + C\tilde{\mu}(E_m) < \infty .$$

Резольвента ланцюга X_n, що дорівнює $R_p = \sum_{n\ge 0} p^n Q^n$, пов'язана з резольвентою $\tilde{R}_t$ ланцюга Y_n:

$$R_p = R_{1/2}\tilde{R}_t, \quad \frac{1}{2} \le p < 1; \quad t = 2p - 1.$$

Тоді маємо

$$\lim_{p\uparrow 1} R_p f(x) = Vf(x) - \langle \mu, f \rangle,$$

де

$$Vf(x) = R_{1/2}\tilde{V} f(x), \qquad \langle \mu, f \rangle = 2\langle \tilde{\mu}, f \rangle,$$

$$\tilde{V} f(x) = \mathbb{P}_x \sum_{n=0}^{\tau-1} f(Y_n), \quad \langle \tilde{\mu}, f \rangle = \frac{1}{\mathbb{P}_\rho \tau}\, \mathbb{P}_\rho \sum_{n=0}^{\tau-1} n f(Y_n),$$

і теорему доведено.

Аналізуючи доведення теореми 1, бачимо, що справедливе більш точне твердження.

Деяке невід'ємне ядро $W(x, A)$, $x \in E$, $A \in \mathfrak{A}$, називатимемо $\mathcal{E}$-обмеженим, якщо $\sup_x W(x, D) < \infty$ для всіх $D \in \mathcal{E}$. Знакозмінне ядро $W(x, A)$ називатимемо $\mathcal{E}$-обмеженим, якщо W — різниця двох невід'ємних $\mathcal{E}$-обмежених ядер, тобто $W = W_+ - W_-$, де $W_\pm$ — невід'ємні обмежені ядра.

Теорема 2. *Існують такий повний мізерний клас $\mathcal{E}$ та $\mathcal{E}$-обмежене ядро W, що границя $\lim_{p\uparrow 1} R_p f(x) = Wf(x)$ існує для всіх $x \in E$ і для всіх $\mathcal{E}$-фінітних обмежених функцій f з $\langle \pi, f \rangle = 0$.*

Доведення. Якщо позначити $W(x, A) = R_{1/2}\tilde{V}(x, A) - 2\tilde{\mu}(A)$ і зауважити, що це ядро виявляється $\mathcal{E}$-обмеженим, то одержуємо шукане.

Теореми 1 та 2 можна розглядати як уточнений варіант твердження наслідку 3 з [2, с. 288]. Більш того, можна довести, що твердження цього наслідку справедливе тоді і тільки тоді, коли $\mathbb{P}_\rho \tau^2 < \infty$.

Дана робота виконана при фінансовій підтримці Державного комітету України з питань науки та технологій.

1. *Москальцова Н. В., Шуренков В. М.* Об асимптотике потенциала счетной эргодической цепи Маркова // Укр. мат. журн. – 1993. – **45**, № 2. – С. 265 – 270.
2. *Шуренков В. М.* Эргодические процессы Маркова. – М.: Наука, 1989. – 336 с.

Получено 18.11.92.