УДК 519.41 / 47

Я. П. Сысак, д-р физ.-мат. наук (Ин-т математики АН Украины, Киев)

ОБ ОДНОМ ВОПРОСЕ Б. АМБЕРГА*

In the case where a group G is the product $G = AB$ of Abelian subgroups A and B, one of which has a finite 0-rank, it is proved that the Fitting subgroup F and the Hirsch – Plotkin radical R admit the decompositions $F = (F \cap A)(F \cap B)$ and $R = (R \cap A)(R \cap B)$, respectively. This gives the affirmative answer to B. Amberg's question.

Якщо група G є добутком $G = AB$ абелевих підгруп A і B, одна з яких має скінчений 0-ранг, то доведено, що підгрупа Фіттінга F і радикал Хірша – Плоткіна R мають розклад $F = (F \cap A)(F \cap B)$ і $R = (R \cap A)(R \cap B)$. Це дає позитивну відповідь на одне запитання Б. Амберга.

Пусть группа G есть произведение $G = AB$ двух абелевых подгрупп A и B. Как известно, группа G метабелева (теорема Ито [1]). Подгруппа H группы G называется факторизуемой, если $H = (A \cap H)(B \cap H)$ и $A \cap B \le H$. В работе [2] доказано, что за исключением тривиальных случаев группа G всегда имеет нетривиальную факторизуемую нормальную подгруппу. Там же показано, что центр, FC-центр, гиперцентр и FC-гиперцентр группы G являются факторизуемыми подгруппами и найдены некоторые достаточные условия, при выполнении которых факторизуемыми будут подгруппа Фиттинга и радикал Хирша — Плоткина группы G. Как показывают примеры, построенные в [3, с. 28], в общем случае названные две подгруппы не обязательно факторизуемы. Б. Амберг доказал, что они факторизуемым, если подгруппы A и B минимаксны или периодические ([2], теорема 2.4 и следствие 2.6), и поставил вопрос: будет ли радикал Хирша — Плоткина группы $G = AB$ факторизуемым, если подгруппы A и B имеют конечный 0-ранг ([2], вопрос 2.7) и ([4], вопрос IX, a). Напомним, что абелева группа имеет конечный 0-ранг, если она есть расширение конечно порожденной группы посредством периодической группы. Следующая теорема, являющаяся основным результатом настоящей статьи, дает положительный ответ на этот вопрос.

Теорема 1. *Пусть группа G — произведение $G = AB$ абелевых подгрупп A и B, по крайней мере одна из которых имеет конечный 0-ранг. Тогда подгруппа Фиттинга и радикал Хирша — Плоткина группы G являются ее факторизуемыми подгруппами.*

Доказательство теоремы 1 основывается на следующей теореме, представляющей самостоятельный интерес.

Теорема 2. *Пусть группа G — произведение $G = AB$ абелевых подгрупп A и B и M — нормальная абелева подгруппа группы G. Если пересечение $AM \cap BM$ содержится в радикале Хирша — Плоткина группы G, то оно является произведением факторизуемых нильпотентных нормальных подгрупп группы G.*

Основная роль в доказательстве теоремы 2 принадлежит полученной автором конструкции, позволяющей представить некоторые произведения абелевых групп группами (2×2)-матриц над подходящими коммутативными кольцами. Детали этой конструкции на языке групп, ассоциированных с радикальными кольцами, изложены в [3]. Поэтому ниже мы остановимся лишь на некоторых основных моментах этого изложения. Отметим, что все используемые нами определения и обозначения стандартны и в основном соответствуют [5].

1. Связь с радикальными кольцами. Пусть группа G имет такие абелевы подгруппы A, B и нормальную абелеву подгруппу M, что $G = MA = MB = AB$ и $M \cap A = M \cap B = A \cap B = 1$. Ясно, что каждый элемент $a \in A$ единственным

* Работа выполнена при поддержке Государственного комитета Украины по науке и технологиям.

образом представляется в виде $a = bm^{-1}$, где $b \in B$ и $m \in M$. Положим $\varphi(a) = m$. Тогда отображение $\varphi: A \to M$ — скрещенный изоморфизм группы A на группу M, т. е. такое взаимно однозначное отображение из A на M, что $\varphi(a_1 a) = \varphi(a_1)^a \varphi(a)$ для любых $a, a_1 \in A$.

Определим на подгруппе M новую операцию „$*$", полагая $m_1 * m_2 = [m_1, \varphi^{-1}(m_2)]$ для любых элементов m_1, m_2 из M. Непосредственно проверяется, что относительно операций „ $\cdot$ " и „$*$" множество элементов подгруппы M образует коммутативное радикальное (в смысле Джекобсона) кольцо, которое мы будем обозначать через $\tilde{M}$ и применять в нем обычную запись сложения и умножения элементов. Поэтому, если обозначить через $\tilde{m}$ элемент кольца $\tilde{M}$, соответствующий элементу $m \in M$, то для любых m_1, $m_2 \in M$ будем иметь $\tilde{m}_1 + \tilde{m}_2 = \widetilde{m_1 m_2}$ и $\tilde{m}_1 \tilde{m}_2 = \widetilde{m_1 * m_2}$. Ясно, что присоединенная группа кольца $\tilde{M}$ изоморфна M и присоединенная группа кольца $\tilde{M}$ изоморфна подгруппе A, причем последний изоморфизм реализуется отображением $\tilde{m} \mapsto \varphi^{-1}(m)$, где $m \in M$. Действительно, если $m_1 \in M$, $a = \varphi^{-1}(m)$ и $a_1 = \varphi^{-1}(m_1)$, то

$$\tilde{m}_1 + \tilde{m} + \tilde{m}_1 \tilde{m} = \widetilde{m_1 m (m_1 * m)} = \widetilde{m_1^a m} = \widetilde{\varphi(a_1)^a \varphi(a)} =$$

$$= \widetilde{\varphi(a_1 a)} \mapsto a_1 a = \varphi^{-1}(m_1)\varphi^{-1}(m).$$

Вложим кольцо $\tilde{M}$ стандартным образом в кольцо с единицей 1 и рассмотрим группу матриц

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & \tilde{M} \\ 0 & 1 + \tilde{M} \end{pmatrix}.$$

Если $a \in A$ и $m \in M$, то простые вычисления показывают, что отображение

$$am \mapsto \begin{pmatrix} 1 & \tilde{m} \\ 0 & 1 + \widetilde{\varphi(a)} \end{pmatrix}$$

задает изоморфизм группы G на группу Γ. Более того, подгруппа (соответственно, нормальная подгруппа) G_0 группы G тогда и только тогда имеет разложение $G_0 = M_0 A_0 = M_0 B_0 = A_0 B_0$, где $M_0 = M \cap G_0$, $A_0 = A \cap G_0$ и $B_0 = B \cap G_0$, когда $\tilde{M}_0$ — подкольцо (соответственно идеал) кольца $\tilde{M}$.

Лемма. 1) *Группа G тогда и только тогда (локально) нильпотентна, когда кольцо $\tilde{M}$ (локально) нильпотентно.* 2) *Если группа G локально нильпотентна, то она есть произведение нильпотентных нормальных подгрупп вида $G_0 = M_0 A_0 = M_0 B_0 = A_0 B_0$, где $M_0 = M \cap G_0$, $A_0 = A \cap G_0$ и $B_0 = B \cap G_0$.*

Доказательство. Утверждение 1 — непосредственное следствие того легко проверяемого факта, что образом коммутатора $[m, a_1, a_2, \ldots, a_n]$ элементов $m \in M$ и $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ является матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & \tilde{m}\widetilde{\varphi(a_1)}\widetilde{\varphi(a_2)} \ldots \widetilde{\varphi(a_n)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и прообразом матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & \tilde{m}\tilde{m}_1 \dots \tilde{m}_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

в группе G есть коммутатор $[m, \varphi^{-1}(m_1), \dots, \varphi^{-1}(m_n)]$ для любых элементов $m, m_1, \dots, m_n$ из M.

Докажем 2. В силу 1 кольцо $\tilde{M}$ локально нильпотентно и, так как оно коммутативно, каждый его конечно порожденный идеал нильпотентен. Возьмем теперь произвольные элементы $a \in A$, $m \in M$ и обозначим через $\tilde{M}_0$ идеал кольца $\tilde{M}$, порожденный элементами $\tilde{m}$ и $\widetilde{\varphi(a)}$. Поскольку этот идеал нильпотентен, то подгруппа

$$\Gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & \tilde{M}_0 \\ 0 & 1 + \tilde{M}_0 \end{pmatrix}$$

является нильпотентной нормальной подгруппой в Γ, содержащей элемент

$$\begin{pmatrix} 1 & \tilde{m} \\ 0 & 1 + \widetilde{\varphi(a)} \end{pmatrix}.$$

В силу сказанного выше это означает, что прообраз G_0 подгруппы Γ_0 в группе G является ее нильпотентной нормальной подгруппой, содержащей элемент am и имеющей разложение $G_0 = M_0A_0 = M_0B_0 = A_0B_0$, где $M_0 = M \cap G_0$, $A_0 = A \cap G_0$ и $B_0 = B \cap G_0$. Следовательно, группа G есть произведение нильпотентных нормальных подгрупп указанного вида. Лемма доказана.

2. Доказательство теоремы 2. Пусть пересечение $MA \cap MB$ содержится в радикале Хирша — Плоткина группы $G = AB$. Обозначим $H = MA \cap MB$, $A_1 = A \cap H$ и $B_1 = B \cap H$. Тогда H — нормальная локально нильпотентная подгруппа в G, имеющая разложение $H = MA_1 = MB_1 = A_1B_1$. Так как центр Z подгруппы H имеет разложение $Z = (M \cap Z)(A_1 \cap Z) = (M \cap Z)(B_1 \cap Z) = (A_1 \cap Z)(B_1 \cap Z)$ и является нормальной подгруппой в G, то подгруппа H будет произведением факторизуемых нильпотентных нормальных в G подгрупп, если таковым будет ее образ в фактор-группе G/Z. А поскольку центр Z содержит произведение $(A_1 \cap M)(B_1 \cap M)(A_1 \cap B_1)$, то переход к фактор-группе G/Z позволяет считать, что $A_1 \cap M = B_1 \cap M = A_1 \cap B_1 = 1$. Но тогда по лемме подгруппа H есть произведение нильпотентных нормальных подгрупп вида $H_0 = M_0A_0 = M_0B_0 = A_0B_0$, где $M_0 = M \cap H_0$, $A_0 = A \cap H_0$ и $B_0 = B \cap H_0$. По теореме Фиттинга ([5], теорема 5.2.8) подгруппа MH_0 нильпотентна и, так как в фактор-группе G/M подгруппа H/M центральна, подгруппа H_0M нормальна в G. Очевидно, $H_0M = A_0M = B_0M$. Если $[A_0, M] = 1$, то $H_0 = A_0B_0$ содержится в факторизуемой абелевой нормальной подгруппе Z группы G. Пусть $[A_0, M] \neq 1$. Так как подгруппа H_0 нормальна в H, то $[A_0, M] \leq M \cap H_0 = M_0$. Далее, $[A_0, M]$ — коммутант подгруппы H_0M и потому нормален в G. Рассмотрим фактор-группу $G/[A_0, M] = \overline{G}$. Подгруппа $\overline{H}_0 = H_0/[A_0, M]$ содержится в центре $\overline{X}$ подгруппы $\overline{H} = H/[A_0, M]$, который является факторизуемой абелевой нормальной подгруппой вида $\overline{X} = \overline{A}_2\overline{B}_2$, где $A_0 \leq A_2 \leq A_1$ и $B_0 \leq B_2 \leq B_1$. Прообраз X подгруппы $\overline{X}$ есть нормальная подгруппа в G, содержащая подгруппу H_0. Поэтому $X = A_2B_2[A_0, M] = A_2B_2(A_0B_0) = A_2B_2$ — факторизуемая подгруппа. Кроме того, по теореме Холла ([5] теорема 5.2.10) X — нильпотентная подгруппа. Таким образом, подгруппа H_0 содержится в факторизуемой нильпотентной нормальной подгруппе группы G и, следовательно, подгруппа H является произведением таких групп. Теорема доказана.

3. Доказательство теоремы 1. Так как в группе $G = AB$ одна из подгрупп A или B по условию имеет конечный 0-ранг, то по следствию 3 из [3, с. 33] для каждой абелевой подгруппы M группы G, нормальной в G, пересечение $AM \cap BM$ локально нильпотентно. Поэтому по теореме 2 это пересечение есть произведение факторизуемых нильпотентных нормальных подгрупп группы G. Но тогда и для каждой нильпотентной нормальной в G подгруппы N пересечение $H = AN \cap BN$ также является таким произведением. Действительно, если N' — коммутант подгруппы N, то в силу доказанного выше пересечение $N'A \cap N'B$ и образ подгруппы H в фактор-группе G/N' являются произведениями факторизуемых нильпотентных нормальных подгрупп группы G и фактор-группы G/N' соответственно. Поэтому в силу цитируемой выше теоремы Холла подгруппа H также будет иметь это свойство. Следовательно, если F — подгруппа Фиттинга группы G, то для каждой нильпотентной нормальной подгруппы N из G пересечение $AN \cap BN$ содержится в F и, таким образом, $F = (A \cap F)(B \cap F)$ — факторизуемая подгруппа.

Покажем теперь, что радикал Хирша — Плоткина R группы G является факторизуемой подгруппой. Очевидно, для этого достаточно показать, что для каждого элемента $x \in R$ из равенства $x = ab$, где $a \in A$, $b \in B$, вытекает включение $a \in R$. Убедимся сначала, что последнее справедливо, если подгруппа $\langle a, b\rangle$ нильпотентна. Действительно, в этом случае имеем

$$[a, \underbrace{b, \ldots, b}_{n}] = 1$$

для некоторого $n \geq 1$. Поэтому для любого элемента $b_1 \in B$ справедливо

$$[b_1, a, \underbrace{b, \ldots, b}_{n}] = [b_1, [a, b], \underbrace{b, \ldots, b}_{n-1}] =$$

$$= [b_1, [a, b, b], \underbrace{b, \ldots, b}_{n-2}] = [b_1, [a, b, \ldots, b]] = 1.$$

Но тогда $[[B, a], b, \ldots, b] = 1$ и, так как $[B, a] = [AB, a] = [G, a]$ — нормальная абелева подгруппа в G, то подгруппа $[B, a]\langle b\rangle$ нильпотентна. Далее, подгруппа $[B, a]\langle x\rangle$ содержится в R и потому локально нильпотентна. А поскольку подгруппы $[B, a]\langle b\rangle$ и $[B, a]\langle x\rangle$ взаимно нормализуемы, то по теореме Хирша — Плоткина ([5], теорема 12.1.2) подгруппа $[B, a]\langle x\rangle\langle b\rangle$ также локально нильпотентна. Замечая, что $[B, a]\langle a\rangle \leq [B, a]\langle x\rangle\langle b\rangle$ и $[B, a]\langle a\rangle$ — нормальная подгруппа в G, заключаем, что $[B, a]\langle a\rangle \leq R$ и, значит, $a \in R$.

Покажем, что подгруппа $\langle a, b\rangle$ нильпотентна. Согласно теореме 2 коммутатор $[a, b]$ лежит в некоторой факторизуемой нильпотентной нормальной подгруппе CD группы G, где $C \le A$ и $D \le B$. Положим $H = \langle a \rangle CD \langle b \rangle$ и убедимся, что $N_H(\langle a, b \rangle) = A_1 B_1$, где $A_1 = \langle a \rangle N_C(\langle a, b \rangle)$ и $B_1 = \langle b \rangle N_D(\langle a, b \rangle)$. Действительно, если $cd \in N_H(\langle a, b \rangle)$ для некоторых $c \in C$ и $d \in D$, то $\langle a, b \rangle^c = \langle a, b \rangle^{d^{-1}} \ge \langle a, b \rangle$, откуда $\langle a, b \rangle^c = \langle a, b \rangle K^c$, где $K = \langle a, b \rangle \cap CD$. Но тогда $K \le \langle a, b \rangle^c \cap K = (\langle a, b \rangle \cap CD)^c = K^c$ и, так как подгруппа CD нильпотентна, из включения $K \le K^c$ вытекает равенство $K = K^c$. Следовательно, $\langle a, b \rangle^c = \langle a, b \rangle$ и, таким образом, $c \in N_C(\langle a, b \rangle)$, $d \in N_D(\langle a, b \rangle)$. Пусть R_1 — радикал Хирша — Плоткина подгруппы $\langle a, b \rangle$. Подгруппа R_1 нильпотентна ([5], теорема 15.5.1). Кроме того, она нормальна в группе $A_1 B_1$ и потому содержится в подгруппе Фиттинга этой группы. Поэтому в силу доказанного выше последняя подгруппа факторизуема и, значит, вместе с элементом $x = ab$ содержит элементы a и b. Таким образом, подгруппа $\langle a, b \rangle$ нильпотентна, и теорема доказана.

Заметим, что из теоремы 2 и приведенного доказательства теоремы 1 непосредственно вытекает следующее утверждение.

Следствие. *Если группа G есть произведение $G = AB$ абелевых подгрупп A и B, то ее подгруппа Фиттинга факторизуема тогда и только тогда, когда факторизуем ее радикал Хирша — Плоткина. В частности, если группа G локально нильпотентна, то ее подгруппа Фиттинга факторизуема.*

1. *Itô N.* Über das Produkt von zwei abelschen Gruppen // Math. Z. – 1955. – **62**, № 3. – S. 400 – 401.
2. *Amberg B.* Products of two Abelian subgroups // Rocky Mount. J. Math. – 1984. – **14**, № 3. – P. 541 – 547.
3. *Сысак Я. П.* Произведения бесконечных групп. – Киев, 1982. – 36 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 82.53).
4. *Amberg B.* Infinite factorized groups // Lect. Notes Math. – 1988. – **1398**. – P. 1 – 24.
5. *Robinson D. J. S.* A course in the theory of groups. – Berlin etc.: Springer, 1982. – 482 p.

Получено 23.12.92