УДК 517.944

Л. Г. Хома, асп. (Ін-т математики АН України, Київ),

ПРО ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРЕМ ІСНУВАННЯ ДО АСИМПТОТИЧНИХ РОЗКЛАДІВ

By the example of a certain nonlinear boundary-value problem for a second-order hyperbolic equation we justify a new approach to the application of the Krylov – Bogolyubov – Mitropolskii asymptoti methods. For certain linear problems, we present the compatibility conditions and the relations enablin; one to construct exact solutions.

На прикладі однієї крайової задачі для рівняння другого порядку гіперболічного типу обгрун товано новий підхід до застосування асимптотичних методів Крилова – Боголюбова – Митропо льського. Виділяються лінійні задачі, для яких вказуються умови сумісності та формули побу дови точних розв'язків.

Як відомо [1 – 4], асимптотичні методи Крилова – Боголюбова – Митропольсько го застосовуються при дослідженні розв'язків стандартних систем або близьки: до них як для звичайних диференціальних рівнянь, так і для рівнянь в частин них похідних. Проте дані методи можна застосувати і для більш широкого класу рівнянь в частинних похідних. Зокрема, при відшуканні розв'язку гіпер болічного рівняння

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} + \varepsilon c(x,t) u = f(x,t) + \varepsilon F(x,t,u,u_t,u_x), \qquad (1)$$

який задовольняє крайові умови

$$\begin{aligned} u(0,t) &= \varepsilon \Phi_1(u)\Big|_{x=0}, \\ u(\pi,t) &= \varepsilon \Phi_2(u)\Big|_{x=\pi}, \end{aligned} \qquad (2)$$

можна за допомогою перетворень звести задачу (1), (2) до такої задачі:

$$v_{tt} - a^2 v_{xx} = \varepsilon F_1(x,t,v,v_t,v_x), \qquad (3)$$

$$v(0,t) = \varepsilon \Phi_1(v)\Big|_{x=0}, \quad v(\pi,t) = \varepsilon \Phi_2(v)\Big|_{x=\pi}. \qquad (4)$$

Це можна зробити, використавши нові шукані функції v і z, які зв'язані з функцією u співвідношенням $u = v + z$. В результаті одержимо задачу

$$v_{tt} - a^2 v_{xx} + z_{tt} - a^2 z_{xx} + \varepsilon c(x,t)(v+z) = f(x,t) + \varepsilon F(x,t,v+z,v_t+z_t,v_x+z_x), \qquad (5)$$

$$\begin{aligned} v(0,t) + z(0,t) &= \varepsilon \Phi_1(v+z)\Big|_{x=0}, \\ v(\pi,t) + z(\pi,t) &= \varepsilon \Phi_2(v+z)\Big|_{x=\pi}. \end{aligned} \qquad (6)$$

Якщо відомий класичний розв'язок лінійної задачі

$$z_{tt} - a^2 z_{xx} + \varepsilon c(x,t) z = f(x,t), \qquad (7)$$

$$z(0,t) = z(\pi,t) = 0, \quad z(x,0) = 0, \quad z_t(x,0) = 0, \qquad (8)$$

то на основі його властивостей можна в першому наближенні говорити про поведінку розв'язку крайової задачі (1), (2).

Тому природно виникає питання про існування класичного розв'язку крайової задачі (7), (8).

Доведені в роботі [5] теореми існування і єдиності класичного розв'язку надають можливість сформулювати необхідні і достатні умови існування точни: розв'язків для окремих випадків рівняння (7).

Теорема 1. *Для існування і єдиності класичного розв'язку крайової задачі* (7), (8) *в області* $\Pi_T = \{(x, t)\colon 0 \le x \le \pi,\ 0 \le t \le T\}$ *необхідно і достатньо, щоб функції* $c(x, t)$, $f(x, t)$ *задовольняли умови*

$$f(x, t) \in C(\Pi_T), \quad c(x, t) \in C^{1,0}(\Pi_T) \ \text{або}\ c(x, t) \in C^{0,1}(\Pi_T), \tag{9}$$

$$p^-(x, t) = \int_0^t \tilde{f}(x + a(t-\tau), \tau)\, d\tau \in C^1(\Pi_T), \tag{10}$$

$$p^+(x, t) = \int_0^t \tilde{f}(x - a(t-\tau), \tau)\, d\tau \in C^1(\Pi_T), \tag{11}$$

де $\tilde{f}$ *непарне* 2π*-періодичне продовження функції* $f(x, t)$ *по змінній* x *з відрізка* $[0, \pi]$ *на всю числову вісь.*

Теорема 2. *Для існування і єдиності класичного розв'язку крайової задачі* (7), (8) *в області* $\Pi_T = \{(x, t)\colon 0 \le x \le \pi,\ 0 \le t \le T\}$ *необхідно і достатньо, щоб функції* $f(x, t)$, $c(x, t)$ *задовольняли умову* (9) *і*

$$f(0, t) = f(\pi, t) = 0, \tag{12}$$

а кожний з інтегралів $p^-(x, t)$, $p^+(x, t)$, *які визначаються згідно з* (10), (11), *належав хоч би одному з класів* $C^{1,0}(\Pi_T)$ *або* $C^{0,1}(\Pi_T)$.

Зауважимо, що одержані результати не містять схеми побудови точного розв'язку задачі (7), (8).

Теорема 3. *Розв'язок* $z(x, t)$ *крайової задачі* (7), (8) *при* $c(x, t) \equiv 0$ *існує, якщо функція* $f(x, t)$ *задовольняє умову* (12) *і умови*

$$f(x, t) \in C^{1,0}(\Pi_T) \ \text{або}\ f(x, t) \in C^{0,1}(\Pi_T). \tag{13}$$

Більш того, розв'язок задачі (7), (8) *при* $c(x, t) \equiv 0$ *можна записати в явному вигляді*

$$\begin{aligned} z(x, t) &= \frac{1}{2} \int_0^t d\theta \int_0^\theta \{\tilde{f}(x + a(\theta-\tau), \tau) + \tilde{f}(x - a(\theta-\tau), \tau)\}\, d\tau \equiv \\ &\equiv \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_\tau^t \{\tilde{f}(x + a(\theta-\tau), \tau) + \tilde{f}(x - a(\theta-\tau), \tau)\}\, d\theta. \end{aligned} \tag{14}$$

Доведення. Перша частина теореми 3 доводиться на основі перевірки виконання умов теорем 1 і 2. Друга частина теореми 3 доводиться безпосередньою перевіркою. Справді, функція, визначена формулою (14), і її похідна

$$z_t = \frac{1}{2} \int_0^t \{\tilde{f}(x + a(t-\tau), \tau) + \tilde{f}(x - a(t-\tau), \tau)\}\, d\tau$$

задовольняють нульові початкові умови $z(x, 0) = z_t(x, 0) = 0$.

Враховуючи, що $\tilde{f}(x, t)$ непарне 2π-періодичне продовження функції $f(x, t)$ по змінній x з відрізка $[0, \pi]$ на всю числову вісь, переконуємося у виконанні граничних умов $z(0, t) = z(\pi, t) = 0$. Диференціюючи по t і x функцію $z(x, t)$, визначену формулою (14), переконуємося, що $z_{tt} - a^2 z_{xx} = f(x, t)$, що треба було довести.

Зауважимо, що при $c(x,t) = c = \mathrm{const}$ задача (7), (8) розв'язується методом Фур'є [6], а при довільному $c(x,t)$ не завжди вдається знайти точний розв'язок вказаної задачі. Але в окремих випадках, зокрема при $c(x,t) = 0$, такий розв'язок існує і єдиний при вказаних вище умовах (теорема 1, 2) і зображається таким рядом [7]:

$$z(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n(x)}{\omega_n} \int_0^t f_n(\tau) \sin \omega_n (t-\tau)\, d\tau, \tag{15}$$

де $y_n(x)$, ω_n — власні функції і власні значення крайової задачі Штурма – Ліувілля

$$-a^2 y''(x) + q(x)\, y(x) = \omega^2 y(x),$$

$$y(0) = y(\pi) = 0,$$

$f_n(t)$ — коефіцієнти Фур'є функції $f(x,t)$.

1. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 504 с.
2. *Митропольский Ю. А.* Метод усреднения в нелинейной механике. – Киев: Наук. думка, 1971. – 440 с.
3. *Митропольский Ю. А., Мосеенков Б. И.* Асимптотические решения уравнений в частных производных. – Киев: Вища шк., 1976. – 590 с.
4. *Митропольский Ю. А., Хома Г. П.* Математическое обоснование асимптотических методов нелинейной механики. – Киев: Наук. думка, 1983. – 212 с.
5. *Митропольський Ю. А., Хома Л. Г.* Існування класичного розв'язку змішаної задачі для лінійного гіперболічного рівняння другого порядку // Укр. мат. журн. – 1993. – **45**, № 9. – С. 1232 – 1239.
6. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 735 с.
7. *Чернятин В. А.* Обоснование метода Фурье в смешаной задаче для уравнений в частных производных. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1991. – 112 с.

Одержано 16.03.93