УДК 517.515

Ю. М. Березанский, акад., **В. О. Ливинский, Е. В. Литвинов,** аспиранты
(Ин-т математики АН Украины, Киев)

СПЕКТРАЛЬНЫЙ ПОДХОД К АНАЛИЗУ БЕЛОГО ШУМА*

By using the spectral projection theorem, the classical Segal transform is constructed as a Fourier transform in the generalized joint eigenvectors of a certain family of the field operators. It is noted that the spectral approach to the Segal transform, which forms the basis of Gaussian white noise analysis, enables one to construct an extensive generalization of this transform.

За допомогою проективної спектральної теореми класичне перетворення Сігала будується як перетворення Фур'є за узагальненими сумісними власними векторами деякої сім'ї польових операторів. Відмічається, що спектральний підхід до перетворення Сігала, котре лежить в основі аналізу гауссового білого шуму, дає можливість побудови широкого узагальнення цього перетворення.

Данная статья посвящается памяти крупнейшего математика 20-го столетия Марка Григорьевича Крейна. Среди огромного научного наследия М. Г. Крейна имеется несколько работ, связанных с разработанным им методом направляющих функционалов. Именно в них впервые дан способ построения разложений по собственным векторам общего самосопряженного оператора. Теорема о подобном разложении для семейства коммутирующих самосопряженных операторов (проекционная спектральная теорема, п. 1) лежит в основе данной работы.

Анализ белого шума появился в 1975 г. после работы Т. Хиды [1] и затем разрабатывался в ряде статей [2 – 10] (работы [7 – 10] содержат достаточно полную библиографию). Этот анализ, т. е. определенного типа теория обобщенных функций бесконечномерного аргумента, основывается на оснащении пространства Фока $\mathcal{F}(H)$ и на применении к этому оснащению преобразования Сигала S. Преобразование S отображает это оснащение в оснащение пространства $L_2 = S(\mathcal{F}(H))$, построенного по гауссовой мере γ_1 на некотором бесконечномерном пространстве Φ'. Последнее оснащение является базой для конструирования теории обобщенных функций бесконечного числа переменных.

Другая точка зрения на построение теории обобщенных функций бесконечного числа переменных, основывающаяся на оснащении бесконечного тензорного произведения пространств, принадлежит Ю. М. Березанскому и была предложена в 1973 г. совместно с Ю. С. Самойленко в [11]. Но позже, после работы Ю. Г. Кондратьева [12], стало ясно, что эта конструкция тесно связана с S-преобразованием. Это направление отражено в работах [13 – 16], последние две книги содержат полную библиографию.

В 1975 г. Ю. М. Березанский предложил доказать, что S-преобразование является спектральным преобразованием Фурье относительно разложения по совместным обобщенным собственным векторам семейства полевых операторов. Этот результат был доказан В. Д. Кошманенко и Ю. С. Самойленко [17] (см. также [16]).

Настоящая статья является обобщением работы [17] и основана на результатах работ [18, 19]. Применяемый спектральный подход позволяет получить классическое S-преобразование для L_2 на общем пространстве Φ' (вместо $\Phi' = \mathbb{R}^\infty = \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \times \ldots$, как в [17]) и изучить квазиядерные оснащения $L_2(\Phi', d\gamma_1(\xi))$ более точно. Кроме того, спектральная точка зрения дает возможность построения широкого обобщения S-преобразования. Соответствующие результаты содержатся в [18] (ниже в п. 5 они лишь намечаются и будут подробно изложены в другой работе). Оказывается возможным заменить полиномы Эр-

* Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда фундаментальных исследований Государственного комитета Украины по науке и технологиям.

мита и гауссову меру в конструкции S-преобразования на произвольные системы ортонормированных полиномов и соответствующую меру. Беря образ оснащения пространства Фока с помощью такого обобщения S-преобразования, получаем возможность строить теорию обобщенных функций бесконечного числа переменных, в которой роль полиномов Эрмита играют другие системы ортогональных полиномов.

Основные результаты настоящей статьи анонсированы в [20], а ее основная идея изложена Ю. М. Березанским в докладе на 6-м советско-японском симпозиуме по теории вероятностей и математической статистике (Киев, 5–10 августа 1991 г.). Ю. М. Березанский выражает искреннюю признательность проф. Ю. Фрёлиху, В. Хунцикеру и Ю. Мозеру за их гостеприимство в ETH (г. Цюрих, Швейцария), где была написана значительная часть этой работы; работа поддерживалась Швейцарским национальным фондом (SNF).

1. Общее преобразование Фурье. Рассмотрим в сепарабельном гильбертовом пространстве H_0 произвольное семейство $A = (A_x)_{x\in X}$ самосопряженных операторов A_x, коммутирующих в смысле коммутации их разложений единицы. Будем предполагать, что имеется гильбертово квазиядерное оснащение пространства H_0 [14–16]:

$$H_- \supseteq H_0 \supseteq H_+ \supseteq D. \tag{1}$$

Здесь H_+ — позитивное гильбертово пространство, топологически (т. е. плотно и непрерывно) вложенное в H_0, причем оператор вложения квазиядерный (т. е. Гильберта – Шмидта), H_- — соответствующее негативное пространство, D — сепарабельный проективный предел гильбертовых пространств, топологически вложенный в H_+.

Предположим, что каждый оператор A_x стандартно связан с цепочкой (1), т. е. $\mathrm{Dom} A_x \supseteq D$ и сужение $A_x \upharpoonright D$ действует непрерывно из D в H_+. В этом случае можно строить разложение по совместным обобщенным собственным векторам семейства A, которое в свою очередь приводит к соответствующему преобразованию Фурье. Сформулируем необходимый в дальнейшем результат, ограничиваясь случаем наличия циклического вектора у семейства A (что приводит к однократному спектру).

Будем говорить, что единичный вектор $\Omega \in H_0$ является циклическим для семейства A, если существуют произведения $A_{x_1}^{m_1} \ldots A_{x_p}^{m_p}$ такие, что $\Omega \in$ $\in \mathrm{Dom}\,(A_{x_1}^{m_1} \ldots A_{x_p}^{m_p})$, $A_{x_1}^{m_1} \ldots A_{x_p}^{m_p}\,\Omega \in H_+$ и линейная оболочка этих векторов плотна в H_+ (здесь $x_1, \ldots, x_p$ — различные точки из X; $m_1, \ldots, m_p \in \mathbb{Z}_+ =$ $= \{0, 1, \ldots\}$, $p \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$). Итак, предполагаем, что для A существует циклический вектор.

Обозначим через $\mathbb{R}^X$ совокупность всех вещественнозначных функций на X: $X \ni x \mapsto \lambda(x) \in \mathbb{R}$, а через $C_\sigma(\mathbb{R}^X)$ — σ-алгебру множеств из $\mathbb{R}^X$, натянутую на всевозможные цилиндрические множества $\{\lambda(\cdot) \in \mathbb{R}^X \mid (\lambda(x_1), \ldots$ $\ldots, \lambda(x_n)) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\}$, где $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ всюду ниже обозначает совокупность борелевских множеств топологического пространства R. Пусть Λ — некоторое фиксированное множество пространства $\mathbb{R}^X$. Далее будем рассматривать меры в Λ, заданные на σ-алгебре $C_\sigma(\Lambda)$, состоящей из всех пересечений множеств из $C_\sigma(\mathbb{R}^X)$ с Λ.

Справедлива следующая теорема (проекционная спектральная теорема) о преобразовании Фурье, порожденном семейством A [15, 16].

Теорема 1. *По семейству* A *можно построить множество* $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^X$ *(спектр* A*) и вероятностную меру* ρ *на* $C_\sigma(\Lambda)$ *(спектральную меру), для которых выполняются следующие условия.*

1. *Существует определенная* ρ*-почти везде слабо измеримая вектор-функция* $\Lambda \ni \lambda(\cdot) \mapsto \xi(\lambda(\cdot)) \in H_-$, *значение которой для каждого* $\lambda(\cdot)$ *является совместным обобщенным собственным вектором семейства* A *с собственным значением* $\lambda(\cdot)$, т. е. $\forall\, \varphi \in D$

$$\left(\xi(\lambda(\cdot)), A_x\varphi\right)_{H_0} = \lambda(x)\left(\xi(\lambda(\cdot)), \varphi\right)_{H_0}, \quad x \in X; \quad \xi(\lambda(\cdot)) \neq 0. \tag{2}$$

2. *Для каждого* $\varphi \in H_+$ *определено* ρ*-почти для всех* $\lambda(\cdot) \in \Lambda$ *преобразование Фурье*

$$H_+ \ni \varphi \mapsto \tilde{\varphi}(\lambda(\cdot)) = \left(\varphi, \xi(\lambda(\cdot))\right)_{H_0} = (F\varphi)(\lambda(\cdot)) \in \mathbb{C}^1, \tag{3}$$

при этом справедливо равенство Парсеваля

$$(\varphi, \psi)_{H_0} = \int_\Lambda \tilde{\varphi}(\lambda(\cdot))\,\overline{\tilde{\psi}(\lambda(\cdot))}\, d\rho(\lambda(\cdot)), \quad \varphi, \psi \in H_+. \tag{4}$$

3. *Изометрический согласно* (4) *оператор* F *после замыкания по непрерывности становится унитарным оператором между пространствами* H_0 *и* $L_2(\Lambda,\ d\rho(\lambda(\cdot)))$.

***Замечание* 1.** Из теоремы 1 следует, что спектр Λ семейства A определяется с точностью до множеств нулевой спектральной меры. Точнее, Λ можно заменить на произвольное $\Lambda_1 \supseteq \Lambda$ $(\Lambda_1 \subseteq \mathbb{R}^X)$ и положить $\rho_1(\alpha) = \rho(\alpha \cap \Lambda)$ $(\alpha \in C_\sigma(\Lambda_1))$.

2. Пространство Фока и его оснащение. Пусть H — действительное сепарабельное гильбертово пространство, H_c — его комплексификация. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $H_c^{\otimes n}$ n-ю тензорную степень пространства H_c, а через $\mathcal{F}(H) \subseteq H_c^{\otimes n}$ — подпространство симметричных элементов из $H_c^{\otimes n}$. Фоковское (симметричное, бозонное) пространство $\mathcal{F}(H)$ определяется как ортогональная сумма пространств $\mathcal{F}_n(H)$ и $\mathcal{F}_0(H) = \mathbb{C}^1$. Таким образом, $\mathcal{F}(H)$ состоит из всех последовательностей $f = \left(f_n\right)_{n=0}^\infty$, $f_n \in \mathcal{F}_n(H)$, для которых

$$\| f \|^2_{\mathcal{F}(H)} = \sum_{n=0}^\infty \| f_n \|^2_{\mathcal{F}_n(H)} < \infty, \tag{5}$$

$$(f, g)_{\mathcal{F}(H)} = \sum_{n=0}^\infty (f_n, g_n)_{\mathcal{F}_n(H)}, \quad f, g \in \mathcal{F}(H).$$

Нам понадобится специальный ортонормированный базис в $\mathcal{F}(H)$, так называемый базис чисел заполнения, который строится по заданному ортонормированному базису $(e_j)_{j=1}^\infty$ в H. Пусть P_n — ортогональный проектор в $H_c^{\otimes n}$ на $\mathcal{F}_n(H)$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots) \in \mathbb{Z}^\infty_{+,0} \subset \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+ \times \ldots = \mathbb{Z}^\infty_+$, где $\mathbb{Z}^\infty_{+,0}$ обозначает совокупность финитных последовательностей из $\mathbb{Z}^\infty_+$. Положим $\forall\, \alpha \in \mathbb{Z}^\infty_{+,0}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots$ и введем при $|\alpha| > 0$ векторы

$$e_\alpha^{|\alpha|} = \left(\frac{|\alpha|!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots}\right)^{1/2} P_{|\alpha|}\left(e_1^{\otimes\alpha_1} \otimes e_2^{\otimes\alpha_2} \otimes \ldots\right), \quad \alpha \in \mathbb{Z}^\infty_{+,0} \tag{6}$$

(в случае $\alpha_k = 0$ сомножитель $e_k^{\otimes\alpha_k}$ в (6) считается отсутствующим; $0! = 1$). Нетрудно доказать, что векторы (6) с $|\alpha| = n$ образуют ортонормированный базис в пространстве $\mathcal{F}_n(H)$, поэтому векторы

$$e_\alpha = (0, \dots, 0, e_\alpha^{|\alpha|}, 0, 0, \dots) \quad \left(\alpha \in \mathbb{Z}_{+,0}^\infty, \ |\alpha| > 0\right), \quad e_0 = (1, 0, 0, \dots) \tag{7}$$

($e_\alpha^{|\alpha|}$ стоит на $|\alpha|$-м месте) образуют ортонормированный базис в $\mathcal{F}(H)$. Это и есть искомый базис.

Перейдем к оснащению пространства Фока. Пусть $\left(H_\tau\right)_{\tau\in T}$ — направленное по вложению семейство гильбертовых пространств, пересечение которых плотно в каждом H_τ. Существует проективный предел $\Phi = \operatorname*{pr\,lim}_{\tau\in \mathrm{T}} H_\tau$. Будем предполагать, что H — одно из пространств H_τ, причем $\|\cdot\|_H \le \|\cdot\|_{H_\tau}$, $\tau \in \mathrm{T}$. Тогда можно построить цепочку

$$\Phi' \supseteq H_{-\tau} \supseteq H \supseteq H_\tau \supseteq \Phi, \quad \tau \in \mathrm{T}, \tag{8}$$

где Φ' обозначает сопряженное к Φ пространство (топологизированное, например, слабой топологией), а $H_{-\tau}$ — негативное пространство относительно позитивного H_τ и нулевого H. Цепочку (8) можно сначала комплексифицировать, перейдя к пространствам $H_{\tau,c}$, Φ_c и т. д., а затем взять тензорную степень

$$\left(\Phi_c^{\otimes n}\right)' \supseteq H_{-\tau,c}^{\otimes n} \supseteq H_c^{\otimes n} \supseteq H_{\tau,c}^{\otimes n} \supseteq \Phi_c^{\otimes n}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{9}$$

По поводу этих конструкций см [16]. Отметим лишь, что $\Phi_c^{\otimes n}$ и $\left(\Phi_c^{\otimes n}\right)'$ определяются соответственно как

$$\operatorname*{pr\,lim}_{\tau\in \mathrm{T}} H_{\tau,c}^{\otimes n} = \bigcap_{\tau\in \mathrm{T}} H_{\tau,c}^{\otimes n},$$

$$\operatorname*{ind\,lim}_{\tau\in \mathrm{T}} H_{-\tau,c}^{\otimes n} = \bigcup_{\tau\in \mathrm{T}} H_{-\tau,c}^{\otimes n}.$$

Оснащение (9) пространства $H_c^{\otimes n}$ после „проектирования посредством оператора P_n" вызывает соответствующее оснащение $\mathcal{F}_n(H)$. Конструкция основывается на следующем факте.

Лемма 1. *Оператор ортогонального проектирования* $P_n\colon H_c^{\otimes n} \to \mathcal{F}_n(H)$ $\forall\, \tau \in \mathrm{T}$ *расширяется* (*сужается*) *до такого же оператора, действующего из* $H_{-\tau,c}^{\otimes n}$ *в* $\mathcal{F}_n(H_{-\tau})$ (*из* $H_{\tau,c}^{\otimes n}$ *в* $\mathcal{F}_n(H_\tau)$).

Доказательство. Нетрудно понять, что оператор $P_n\colon H_c^{\otimes n} \to \mathcal{F}_n(H)$ может быть задан следующей формулой:

$$P_n = \frac{1}{n!} \sum_{s\in\sigma_n} \mathcal{U}_{s,n}. \tag{10}$$

Здесь унитарный оператор $\mathcal{U}_{s,n}$ в $H_c^{\otimes n}$ задается на тотальном множестве элементов вида $f_1 \otimes \dots \otimes f_n \in H_c^{\otimes n}$ посредством равенства

$$\mathcal{U}_{s,n}(f_1 \otimes \dots \otimes f_n) = f_{s(1)} \otimes \dots \otimes f_{s(n)}, \tag{11}$$

где $s = (s(1), \dots, s(n))$ — некоторая перестановка множества $\{1, \dots, n\}$; суммирование в (10) ведется по группе σ_n всех таких перестановок. Для доказательства достаточно убедиться, что оператор P_n, определяемый по формуле (10), удовлетворяет требованиям $P_n^2 = P_n$ и $P_n^* = P_n$. Эти равенства достаточно проверить на векторах $f_1 \otimes \ldots \otimes f_n$, что делается непосредственно.

Те же формулы (10), (11) справедливы при замене H_c на $H_{-\tau,c}$ и $H_{\tau,c}$. Это приводит к требуемому расширению и сужению оператора P_n.

Из представления $\Phi_c^{\otimes n}$ и $(\Phi_c^{\otimes n})'$ через $H_{\tau,c}$ и $H_{-\tau,c}$ следует возможность расширения оператора P_n на все $(\Phi_c^{\otimes n})'$ и его сужения на $\Phi_c^{\otimes n}$. Для всех этих операторов сохраним обозначение P_n. Легко также понять, что оператор $P_n : H_{-\tau,c}^{\otimes n} \to \mathcal{F}_n(H_{-\tau})$ является сопряженным в смысле цепочки (9) к оператору $P_n : H_{\tau,c}^{\otimes n} \to \mathcal{F}_n(H_\tau)$.

Лемма 1 позволяет построить для каждого $n \in \mathbb{N}$ по (9) следующую цепочку:

$$\begin{array}{ccccccccc} P_n\big((\Phi_c^{\otimes n})'\big) & \supseteq & P_n\big(H_{-\tau,c}^{\otimes n}\big) & \supseteq & P_n\big(H_c^{\otimes n}\big) & \supseteq & P_n\big(H_{\tau,c}^{\otimes n}\big) & \supseteq & P_n\big(\Phi_c^{\otimes n}\big) \\ \| & & \| & & \| & & \| & & \| \\ \mathcal{F}_n(\Phi') & & \mathcal{F}_n(H_{-\tau}) & & \mathcal{F}_n(H) & & \mathcal{F}_n(H_\tau) & & \mathcal{F}_n(\Phi). \end{array} \qquad (12)$$

Будем также считать, что $\mathcal{F}_0(\cdot) = \mathbb{C}^1$.

Пространства (12) действительно образуют цепочку: $\mathcal{F}_n(H_{-\tau})$, $\mathcal{F}_n(\Phi')$ дуальны относительно $\mathcal{F}_n(H)$ к пространствам $\mathcal{F}_n(H_\tau)$, $\mathcal{F}_n(\Phi)$ соответственно. Это следует из того, что любой антилинейный непрерывный функционал l над $\mathcal{F}_n(H_\tau)$ может быть записан в виде

$$l(\varphi_n) = \hat{l}(P_n\varphi_n) = (\xi_n, P_n\varphi_n)_{H_c^{\otimes n}} = (P_n\xi_n, \varphi_n)_{H_c^{\otimes n}} = (P_n\xi_n, \varphi_n)_{\mathcal{F}_n(H)},$$

где $\hat{l}$ — продолжение l на все $H_{\tau,c}^{\otimes n}$, а ξ_n — соответствующий этому продолжению элемент из $H_{-\tau,c}^{\otimes n}$.

Предположим, что цепочка (8) квазиядерна, т. е. оператор вложения $H_\tau \to H$ квазиядерный, тогда ее тензорная степень (9) также будет квазиядерной [16]. Поэтому оператор вложения $\mathcal{F}_n(H_\tau) \to \mathcal{F}_n(H)$ квазиядерный как сужение такого оператора на подпространство. Иными словами, цепочка (12) квазиядерна. Если пространство Φ ядерное, то таким же будет и $\mathcal{F}_n(\Phi)$.

Пусть O_τ — оператор вложения $H_\tau \to H$ и $\| O_\tau \|$ его норма Гильберта–Шмидта. Тогда для всех $n \in \mathbb{N}$ оператор вложения $H_{\tau,c}^{\otimes n} \to H_c^{\otimes n}$ равен $O_\tau^{\otimes n}$ (после продолжения операторов посредством комплексификации) и $\| O_\tau^{\otimes n} \| = \| O_\tau \|^n$. Поэтому норма Гильберта–Шмидта вложения $\mathcal{F}_n(H_\tau) \subseteq \mathcal{F}_n(H)$ не больше чем $\| O_\tau \|^n$.

Наша дальнейшая цель — введение обобщенных пространств Фока посредством n-частичных пространств (12). Они и будут давать требуемое оснащение $\mathcal{F}_n(H)$. Наиболее широкое обобщение $\mathcal{F}_{\text{fin}}^*(\Phi)$ пространства Фока состоит из всех последовательностей $\xi = (\xi_n)_{n=0}^\infty$, где $\xi_n \in \mathcal{F}_n(\Phi')$. Наиболее узкое пространство $\mathcal{F}_{\text{fin}}(\Phi)$ состоит из всех финитных последовательностей $\varphi = (\varphi_n)_{n=0}^\infty$, где $\varphi_n \in \mathcal{F}_n(\Phi)$. В линейном пространстве $\mathcal{F}_{\text{fin}}(\Phi)$ легко ввести топологию, которая дает следующую сходимость: $\mathcal{F}_{\text{fin}}(\Phi) \ni \varphi^{(m)} \underset{m\to\infty}{\to} \varphi \in \mathcal{F}_{\text{fin}}(\Phi)$, если все последовательности $\varphi^{(m)}$ равномерно финитны и $\forall\, n \in \mathbb{Z}_+$ $\varphi^{(m)} \to \varphi_n$ в смысле пространства $\mathcal{F}_n(\Phi)$. Легко видеть, что $\mathcal{F}^*_{\text{fin}}(\Phi)$ можно интерпретировать как пространство, сопряженное к $\mathcal{F}_{\text{fin}}(\Phi)$.

Пусть $p = (p_n)_{n=0}^{\infty}$, $p_n \geq 1$, — некоторый вес; обозначим через P семейство $[1, \infty)^{\infty}$ всех таких весов. Для каждого $p \in \mathrm{P}$ и $\tau \in \mathrm{T}$ введем гильбертово пространство $\mathcal{F}_n(H_\tau, p)$, состоящее из всех последовательностей $\varphi = (\varphi_n)_{n=0}^{\infty}$, $\varphi_n \in \mathcal{F}_n(H_\tau)$, для которых

$$\| \varphi \|^2_{\mathcal{F}(H_\tau, p)} = \sum_{n=0}^{\infty} \| \varphi_n \|^2_{\mathcal{F}_n(H_\tau)} p_n < \infty, \tag{13}$$

$$(\varphi, \psi)_{\mathcal{F}(H_\tau, p)} = \sum_{n=0}^{\infty} (\varphi_n, \psi_n)_{\mathcal{F}_n(H_\tau)} p_n, \quad \varphi, \psi \in \mathcal{F}(H_\tau, p).$$

В частности, если $p = 1$ (т. е. $\forall\, n\ p_n = 1$) и $H_\tau = H$, то пространство $\mathcal{F}(H, 1)$ совпадает с классическим пространством Фока $\mathcal{F}(H)$. Ясно, что $\| \cdot \|_{\mathcal{F}(H_\tau, p)} \geq$ $\geq \| \cdot \|_{\mathcal{F}(H)}$ и $\mathcal{F}(H_\tau, p)$ плотно в $\mathcal{F}(H)$. Поэтому можно построить цепочку

$$\mathcal{F}(H_{-\tau}, p^{-1}) = \big(\mathcal{F}(H_\tau, p) \big)_- \supseteq \mathcal{F}(H) \supseteq \mathcal{F}(H_\tau, p),$$

где $\mathcal{F}(H_\tau, p)$ является позитивным пространством и $\big(\mathcal{F}(H_\tau, p) \big)_-$ — негативным. Легко видеть, что последнее пространство совпадает с $\mathcal{F}(H_{-\tau}, p^{-1})$, которое строится подобно (13) с заменой $\mathcal{F}_n(H_\tau)$, p_n на $\mathcal{F}_n(H_{-\tau})$, p_n^{-1} $(p^{-1} =$ $= (p_n^{-1})_{n=0}^{\infty})$.

Семейство пространств $\big(\mathcal{F}(H_\tau, p) \big)_{(\tau, p) \in \mathrm{T}\times\mathrm{P}}$ направлено по вложению и их пересечение содержит $\mathcal{F}_{\text{fin}}(\Phi)$ и, следовательно, плотно в каждом $\mathcal{F}(H_\tau, p)$. Поэтому мы можем ввести проективный предел $\underset{(\tau, p)\in \mathrm{T}\times\mathrm{P}}{\mathrm{pr\,lim}}\ \mathcal{F}(H_\tau, p)$, который, разумеется, равен пространству $\mathcal{F}_{\text{fin}}(\Phi)$. Таким образом, сконструирована следующая цепочка пространств:

$$\mathcal{F}^*_{\text{fin}}(\Phi) = \underset{(\tau, p)\in \mathrm{T}\times\mathrm{P}}{\mathrm{ind\,lim}}\ \mathcal{F}(H_{-\tau}, p^{-1}) \supseteq \mathcal{F}(H_{-\tau}, p^{-1}) \supseteq \mathcal{F}(H) \supseteq \mathcal{F}(H_\tau, p) \supseteq$$

$$\supseteq \underset{(\tau, p)\in \mathrm{T}\times\mathrm{P}}{\mathrm{pr\,lim}}\ \mathcal{F}(H_\tau, p) = \mathcal{F}_{\text{fin}}(\Phi); \quad \mathrm{P} \in [1, \infty)^{\infty}, \quad \forall\, \tau, p. \tag{14}$$

Отметим следующее обобщение цепочки (14). Возьмем вместо $\mathrm{P} = [1, \infty)^{\infty}$ некоторое семейство весов $\mathrm{P} \subseteq [1, \infty)^{\infty}$ с естественным условием: $\forall\, p', p'' \in$ $\in \mathrm{P}\ \exists\, p''' \in \mathrm{P}$: $p''' \geq p'$, $p''' \geq p''$ (т. е. $\forall\, n\ p'''_n \geq p'_n$, $p'''_n \geq p''_n$). Сейчас также можно сконструировать $\underset{(\tau, p)\in \mathrm{T}\times\mathrm{P}}{\mathrm{pr\,lim}}\ \mathcal{F}(H_\tau, p)$, но это пространство не обязательно равно $\mathcal{F}_{\text{fin}}(\Phi)$.

Нетрудно написать условие квазиядерности вложения $\mathcal{F}(H_\tau, p)$ в $\mathcal{F}(H)$.

Лемма 2. *Предположим, что вложение $O_\tau: H_\tau \to H$ квазиядерно. Тогда для квазиядерности вложения $\mathcal{F}(H_\tau, p) \subseteq \mathcal{F}(H)$ достаточно выполнения следующего условия:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \| O_\tau \|^{2n} p_n^{-1} < \infty. \tag{15}$$

Доказательство. Действительно, пусть $(l_\beta^{(n)})_{\beta=1}^{\infty}$ — некоторый ортонормированный базис в пространстве $\mathcal{F}_n(H_\tau)$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда векторы

$$(p_0^{-1/2}, 0, 0, \ldots), \quad q_\beta^{(n)} = (0, \ldots, 0, p_n^{-1/2} l_\beta^{(n)}, 0, 0, \ldots), \quad \beta \in \mathbb{N}, \quad n \in \mathbb{N}$$

($p_n^{-1/2} l_\beta^{(n)}$ находится на n-м месте) образуют ортонормированный базис пространства $\mathcal{F}(H_\tau, p)$. Квадрат нормы Гильберта – Шмидта оператора вложения $\mathcal{F}(H_\tau, p) \to \mathcal{F}(H)$ будет равен

$$p_0^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\beta=1}^{\infty} \| q_\beta^{(n)} \|_{\mathcal{F}(H)}^2 = p_0^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} p_n^{-1} \left(\sum_{\beta=1}^{\infty} \| l_\beta^{(n)} \|_{\mathcal{F}(H)}^2 \right)^n \le$$

$$\le p_0^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} p_n^{-1} \| O_\tau \|^{2n} < \infty.$$

Мы здесь использовали то, что норма Гильберта – Шмидта оператора вложения $\mathcal{F}_n(H_\tau, p) \to \mathcal{F}_n(H)$ не превышает такой нормы для оператора вложения $H_{\tau,c}^{\otimes n} \to H_c^{\otimes n}$, равной $\| O_\tau \|^{2n}$.

***Замечания.* 2.** Аналогично доказывается более общее утверждение: пусть $O_{\tau'',\tau'}$ — оператор вложения $H_{\tau''} \to H_{\tau'}$, $\tau', \tau'' \in \mathrm{T}$; тогда для квазиядерности вложения $\mathcal{F}(H_{\tau''}, p'') \subseteq \mathcal{F}(H_{\tau'}, p')$ достаточно, чтобы

$$\sum_{n=0}^{\infty} \| O_{\tau'',\tau'} \|^{2n} p_n' \, p_n''^{-1} < \infty. \tag{16}$$

3. В случае $p = p' = p''$ условия (15), (16) выполняются тогда и только тогда, когда $\| O_\tau \| < 1$, $\| O_{\tau'',\tau'} \| < 1$.

Из (16) следует, что пространство $\operatorname{pr\,lim}_{(\tau,p)\in \mathrm{T}\times \mathrm{P}} \mathcal{F}(H_\tau, p)$ ядерное, если $\forall \tau' \in \mathrm{T}$, $p' \in \mathrm{P}$ $\exists \tau'' \in \mathrm{T}$, $p'' \in \mathrm{P}$, для которых выполняется условие (16). Ясно, что для ядерного Φ пространство $\mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(\Phi)$ также ядерное.

4. Предположим, что $\mathrm{P} = \{1\}$, т. е. мы рассматриваем классические пространства Фока $\mathcal{F}(H_\tau, 1) = \mathcal{F}(H_\tau)$, $\tau \in \mathrm{T}$, и изучаем вопрос существование и ядерности $\operatorname{pr\,lim}_{(\tau,p)\in \mathrm{T}\times \mathrm{P}} \mathcal{F}(H_\tau, 1) = \operatorname{pr\,lim}_{\tau\in \mathrm{T}} \mathcal{F}(H_\tau)$ и возможность построения цепочки типа (14). Если семейство $(H_\tau)_{\tau\in \mathrm{T}}$ направлено по вложению, то семейство $(\mathcal{F}(H_\tau))_{\tau\in \mathrm{T}}$ уже не обязательно имеет это свойство: возможно, что нормы операторов вложения $H_{\tau'''} \to H_{\tau'}$, $H_{\tau'''} \to H_{\tau''}$ больше чем 1, тогда для соответствующих пространств Фока непрерывных вложений может и не быть. Для существования проективного предела достаточно требовать, чтобы эти нормы были не больше 1. Такой предел будет ядерным, если $\forall \tau \in \mathrm{T}$ $\exists \tau' \in \mathrm{T}$: $\| O_{\tau'',\tau'} \| < 1$; цепочка типа (14) существует.

5. В этой статье мы не будем изучать более специальные оснащения пространства Фока. Отметим лишь один важный случай. Предположим, что ядерное пространство Φ является счетным проективным пределом: $\Phi = \operatorname{pr\,lim}_{\tau\in \mathrm{T}} H_\tau$,

$\mathrm{T} = \mathbb{N}$, и выполняются следующие требования:

1) $\forall \tau \in \mathrm{T} \; \exists \tau' \in \mathrm{T}$: оператор вложения $H_{\tau'} \to H_\tau$ квазиядерный и его норма Гильберта – Шмидта меньше 1;

2) $\forall \tau \in \mathrm{T} \;\; \forall \varepsilon > 0 \; \exists \tau' \in \mathrm{T}$: $\|\varphi\|_{H_\tau} \le \varepsilon \|\varphi\|_{H_{\tau'}}, \;\; \varphi \in \Phi$.

В соответствии с замечаниями 3 и 4 проективный предел $\operatorname{pr\,lim}_{\tau \in \mathrm{T}} \mathcal{F}(H_\tau)$ существует и является ядерным пространством. Условие 2 определяет специальные свойства этого пространства, которые важны в ряде приложений, более подробно см. [16].

3. Полевые операторы и их свойства. Напомним сперва некоторые классические понятия. Пусть $\mathcal{F}(H)$ — пространство Фока:

$$\mathcal{F}(H) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_n(H), \quad f = \left(f_n \right)_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{F}(H). \tag{17}$$

Через $\mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(H)$ обозначим линейное множество финитных векторов из $\mathcal{F}(H)$. Зафиксируем вектор $h \in H$ и введем оператор рождения $a_+(h)$ как оператор „сдвига направо":

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(H) \supseteq \mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(H) \ni (f_0, f_1, \dots) = f \mapsto a_+(h) f = \\ = (0, \sqrt{1}\, P_1(h \otimes f_0), \sqrt{2}\, P_2(h \otimes f_1), \dots) \in \mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(H) \subseteq \mathcal{F}(H). \end{aligned} \tag{18}$$

Здесь P_n обозначает симметризатор (10). Таким образом,

$$\operatorname{Dom}(a_+(h) f) = \mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(H) \quad \text{и} \quad \forall f_n \in \mathcal{F}_n(H)$$

$$a_+(h) f_n = \sqrt{n+1}\, P_{n+1}(h \otimes f_n), \quad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{19}$$

Сужение $a_+(h)$ на n-частичное подпространство $\mathcal{F}_n(H)$ из (17) действует в $\mathcal{F}_{n+1}(H)$ („рождает частицу") и является ограниченным оператором с нормой, равной $\sqrt{n+1}\, \|h\|_H$. Во всем пространстве $\mathcal{F}(H)$ оператор $a_+(h)$ не ограничен.

Пусть $(a_+(h))^*$ — сопряженный оператор к $a_+(h)$ в пространстве $\mathcal{F}(H)$; очевидно, $\operatorname{Dom}(a_+(h))^* \supseteq \mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(H)$. Оператор уничтожения $a_-(h)$ определяется формулой

$$a_-(h) = (a_+(h))^* \restriction \mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(H). \tag{20}$$

Легко понять, что оператор $a_-(h)$ является некоторым „сдвигом налево": его сужение на $\mathcal{F}_n(H)$ действует в пространство $\mathcal{F}_{n-1}(H)$ ($n \in \mathbb{N}$; $a_-(h) \restriction \mathcal{F}_0(H) = 0$) и является ограниченным оператором с нормой $\sqrt{n}\, \|h\|_H$; $\operatorname{Ran}(a_-(h)) = \mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(H)$.

Можно проверить, что операторы рождение и уничтожения удовлетворяют следующим каноническим коммутационным соотношениям:

$$\begin{gathered} [a_+(h_1), a_+(h_2)] = 0, \qquad [a_-(h_1), a_-(h_2)] = 0, \\ [a_-(h_1), a_+(h_2)] = (h_1, h_2)_H\, 1. \end{gathered} \tag{21}$$

Здесь $[A, B] = AB - BA$, и операторные равенства (21) нужно понимать на $\mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(H)$.

Полевые операторы $A(h)$, $h \in H$, вводятся в пространстве $\mathcal{F}(h)$ посредством формулы

$$A(h) = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_+(h) + a_-(h)), \quad \mathrm{Dom}\,(A(h)) = \mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(H). \tag{22}$$

Эти операторы, очевидно, эрмитовы и формально коммутируют на $\mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(H)$, $[A(h_1), A(h_2)] = 0$ $(h_1, h_2 \in H)$ — последнее вытекает из (21). Более того, можно доказать следующее важное утверждение: замыкания $\tilde{A}(h)$ полевых операторов самосопряжены и коммутируют в сильном смысле, т. е. в смысле коммутации их разложений единицы. Доказательство этого факта см., например, в [16].

Будем изучать семейство замыканий полевых операторов

$$A = (\tilde{A}(\varphi))_{\varphi\in\Phi}. \tag{23}$$

В силу сформулированного выше утверждения операторы $\tilde{A}(\varphi)$ самосопряжены и коммутируют.

Легко понять, что $\mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(\Phi)$ *является базой каждого оператора* $\tilde{A}(\varphi)$, т. е. $(\tilde{A}(\varphi) \upharpoonright \mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(\Phi))^{\sim} = \tilde{A}(\varphi)$, $\varphi \in \Phi$. В самом деле, для любого $\varphi \in \Phi$ достаточно показать, что для каждого финитного вектора $f = (f_n)_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(H)$ существует последовательность векторов $\psi^{(m)} = (\psi_n^{(m)})_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(\Phi)$, $m \in \mathbb{N}$, такая, что в $\mathcal{F}(H)$ $A(\varphi)\psi^{(m)} \to A(\varphi)f$ при $m \to \infty$. Для этого достаточно убедиться, что $\forall\, n$ $(A(\varphi) \upharpoonright \mathcal{F}_n(H))\, \psi_n^{(m)} \to (A(\varphi) \upharpoonright \mathcal{F}_n(H)) f_n$. Но согласно (22) и структуре $a_+(\varphi)$ и $a_-(\varphi)$ $\mathrm{Ran}\,(A(\varphi) \upharpoonright \mathcal{F}_n(H)) \subseteq \mathcal{F}_{n-1}(H) \oplus \mathcal{F}_{n+1}(H)$, и оператор $A(\varphi) \upharpoonright \mathcal{F}_n(\Phi)$ действует непрерывно из $\mathcal{F}_n(H)$ в последнюю ортогональную сумму. Поэтому утверждение вытекает из плотности $\Phi_c^{\otimes n}$ в $H_c^{\otimes n}$ и, следовательно, плотности $\mathcal{F}_n(\Phi)$ в $\mathcal{F}_n(H)$.

Будем применять общую теорему 1 к семейству (23) замыканий полевых операторов. Сейчас в обозначениях п. 1 $X = \Phi$, $A_x = \tilde{A}(\varphi)$.

Зафиксируем оснащение (8) пространства H с вещественным ядерным пространством Φ. Построим следующую цепочку, являющуюся частью цепочки (14):

$$\mathcal{F}(H_{-\tau}, p^{-1}) \supseteq \mathcal{F}(H) \supseteq \mathcal{F}(H_{\tau}, p) \supseteq \mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(\Phi). \tag{24}$$

Вес $p = (p_n)_{n=0}^{\infty}$ должен быть выбран таким образом, чтобы вложение $\mathcal{F}(H_{\tau}, p) \subseteq \mathcal{F}(H)$ было квазиядерным. В соответствии с леммой 2 для этого достаточно выполнения условия (15). Зафиксируем такие τ и вес p; теперь цепочка (24) будет играть роль цепочки $H_- \supseteq H_0 \supseteq H_+ \supseteq D$ (1) в рассматриваемом случае. Докажем две леммы, относящиеся к семейству (23) и цепочке (24).

Лемма 3. *Для каждого* $\varphi \in \Phi$ *оператор* $\tilde{A}(\varphi)$ *стандартно связан с цепочкой* (24).

Доказательство. Имеем $D = \mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(\Phi) \subseteq \mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(H) = \mathrm{Dom}\,(A(\varphi)) \subseteq \mathrm{Dom}\,(\tilde{A}(\varphi))$. Необходимо показать, что $\tilde{A}(\varphi) \upharpoonright \mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(\Phi) = A(\varphi) \upharpoonright \mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(\Phi)$ действует непрерывно из $\mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(\Phi)$ в $\mathcal{F}(H_{\tau}, p)$. В силу (22) достаточно доказать непрерывность операторов $a_+(\varphi) \upharpoonright \mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(\Phi)$, $a_-(\varphi) \upharpoonright \mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(\Phi) : \mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(\Phi) \to \mathcal{F}(H_{\tau}, p)$. Но из структуры этих операторов и вида топологии в пространствах $\mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(\Phi)$ и $\mathcal{F}(H_{\tau}, p)$ следует, что достаточно доказать для каждого $n \in \mathbb{Z}_+$ непрерывность двух операторов $a_+(\varphi) \upharpoonright \mathcal{F}_n(\Phi): \mathcal{F}_n(\Phi) \to \mathcal{F}_{n+1}(H_\tau)$ и $a_-(\varphi) \upharpoonright \mathcal{F}_{n+1}(\Phi): \mathcal{F}_{n+1}(\Phi) \to$ $\to \mathcal{F}_n(H_\tau)$.

Первый оператор согласно (19) имеет вид $a_+(\varphi)\psi_n = \sqrt{n+1}\, P_{n+1}(\varphi \otimes \psi_n)$, $\psi_n \in \mathcal{F}_n(\Phi)$. Ввиду леммы 1 оператор P_{n+1} в этой формуле можно рассматривать как построенный не по пространству H, а по пространству H_τ, и поэтому согласно изложенному в начале п. 3 справедлива оценка

$$\| a_+(\varphi)\psi_n \|_{\mathcal{F}_{n+1}(H_\tau)} \le \sqrt{n+1}\, \|\varphi\|_{H_\tau} \|\psi\|_{\mathcal{F}_n(H_\tau)}, \quad \psi_n \in \mathcal{F}_n(H_\tau). \tag{25}$$

Из сходимости в $\mathcal{F}_n(\Phi)$ следует сходимость в $\mathcal{F}_n(H_\tau)$, поэтому из последней оценки следует непрерывность первого оператора.

Рассмотрим второй оператор. Прежде всего отметим, что согласно лемме 1 оператор P_n является непрерывным оператором (и даже оператором проектирования) в каждом пространстве $H_{-\tau}$, H_τ, $\tau \in \mathrm{T}$.

Далее, в соответствии с определением оператора $a_-(\varphi)$ как сужения на $\mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(H)$, сопряженного в $\mathcal{F}(H)$ к оператору $a_+(\varphi)$, можно записать $\forall\, \psi_{n+1} \in$ $\in \mathcal{F}_{n+1}(H_\tau) \subseteq H_{\tau,c}^{\otimes(n+1)}$ и $\forall\, \xi_n \in \mathcal{F}_n(H_{-\tau}) \subseteq H_{-\tau,c}^{\otimes n}$, $n \in \mathbb{Z}_+$,

$$\begin{aligned} \big(a_-(\varphi)\psi_{n+1}, \xi_n \big)_{\mathcal{F}_n(H)} &= \big(\psi_{n+1}, a_+(\varphi)\xi_n \big)_{\mathcal{F}_{n+1}(H)} = \\ &= \big(\psi_{n+1}, \sqrt{n+1}\, P_{n+1}(\varphi \otimes \xi_n) \big)_{H_c^{\otimes(n+1)}}. \end{aligned} \tag{26}$$

Поясним. Мы можем записать сперва (26) для $\xi_n \in \mathcal{F}_n(H)$, а затем перейти к пределу, когда ξ_n стремится к $\xi_n \in \mathcal{F}_n(H_{-\tau})$ в смысле сходимости в последнем пространстве (такой переход возможен благодаря упомянутой непрерывности P_{n+1} в $H_{-\tau,c}^{\otimes(n+1)}$).

Из (25), используя равенство единице нормы оператора P_{n+1} как проектора в $H_{-\tau,c}^{\otimes(n+1)}$, получаем

$$\begin{aligned} \left| \big(a_-(\varphi)\psi_{n+1}, \xi_n \big)_{\mathcal{F}_n(H)} \right| &= \left| \big(\psi_{n+1}, \sqrt{n+1}\, P_{n+1}(\varphi \otimes \xi_n) \big)_{H_c^{\otimes(n+1)}} \right| \le \\ &\le \| \psi_{n+1} \|_{H_{\tau,c}^{\otimes(n+1)}} \| \sqrt{n+1}\, P_{n+1}(\varphi \otimes \xi_n) \|_{H_{-\tau,c}^{\otimes(n+1)}} \le \\ &\le \sqrt{n+1}\, \| \psi_{n+1} \|_{H_{\tau,c}^{\otimes(n+1)}} \| \varphi \otimes \xi_n \|_{H_{-\tau,c}^{\otimes(n+1)}} = \\ &= \sqrt{n+1}\, \| \psi_{n+1} \|_{H_{\tau,c}^{\otimes(n+1)}} \| \varphi \|_{H_{-\tau}} \| \xi_n \|_{H_{-\tau,c}^{\otimes n}} = \\ &= \sqrt{n+1}\, \| \psi_{n+1} \|_{H_{\tau,c}^{\otimes(n+1)}} \| \varphi \|_{H_{-\tau}} \| \xi_n \|_{\mathcal{F}_n(H_{-\tau})}. \end{aligned}$$

В последнем неравенстве ξ_n является произвольным элементом из $\mathcal{F}_n(H_{-\tau})$, поэтому $a_+(\varphi)\psi_{n+1} \in \mathcal{F}_n(H_\tau)$ и справедлива следующая оценка:

$$\| a_-(\varphi)\psi_{n+1} \|_{\mathcal{F}_n(H_\tau)} \le \sqrt{n+1}\, \| \varphi \|_{H_{-\tau}} \| \psi_{n+1} \|_{\mathcal{F}_{n+1}(H_\tau)}, \quad \psi_{n+1} \in \mathcal{F}_{n+1}(H_\tau) \tag{27}$$

(мы сейчас использовали цепочку (12)).

Из сходимости в $\mathcal{F}_{n+1}(\Phi)$ следует сходимость в $\mathcal{F}_{n+1}(H_\tau)$, поэтому оценка (27) обеспечивает непрерывность оператора $a_-(\varphi) \upharpoonright \mathcal{F}_{n+1}(\Phi): \mathcal{F}_{n+1}(\Phi) \to \mathcal{F}_n(H_\tau)$, что и требовалось доказать.

Лемма 4. *Для каждого* $\psi \in D = \mathcal{F}_{\text{fin}}(\Phi)$ *векторнозначная функция*

$$\Phi \ni \varphi \mapsto \tilde{A}(\varphi)\psi \in \mathcal{F}_n(H_\tau, p) \tag{28}$$

является линейной и непрерывной.

Доказательство. Для $\psi = \mathcal{F}_{\text{fin}}(\Phi\ )$ $\tilde{A}(\varphi)\psi = A(\varphi)\psi$ и благодаря (22) линейность функции (28) вытекает из линейности отображений $\Phi \ni \varphi \mapsto$ $\mapsto a_+(\varphi)\psi \in \mathcal{F}(H)$, $\Phi \ni \varphi \mapsto a_-(\varphi)\psi \in \mathcal{F}(H)$. Линейность первого из них очевидна на основании определения (18), (19), а линейность второго легко следует из (20).

Для доказательства непрерывности (28) достаточно убедиться, что $\forall\ \psi_n \in$ $\in \mathcal{F}_n(\Phi)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, линейное по доказанному отображение $\Phi \ni \varphi \mapsto A(\varphi)\psi_n =$ $= (1/\sqrt{2})(a_+(\varphi)\psi_n + a_-(\varphi)\psi_n) \in \mathcal{F}(H_\tau, p)$ непрерывно. Из характера действия операторов $a_+(\varphi)$ и $a_-(\varphi)$ и вида топологии в $\mathcal{F}(H_\tau, p)$ такая непрерывность будет следовать из непрерывности линейных отображений $\Phi \ni \varphi \mapsto a_+(\varphi)\psi_n \in$ $\in \mathcal{F}_{n+1}(H_\tau)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $\Phi \ni \varphi \mapsto a_-(\varphi)\psi_n \in \mathcal{F}_{n-1}(H_\tau)$, $n \in \mathbb{N}$. Их непрерывность вытекает из оценок (25) и (27) соответственно.

Для дальнейшего нам необходимо знать правило действия на базис чисел заполнения операторов рождения, уничтожения и полевых. Зафиксируем ортонормированный базис $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ в пространстве H и построим по нему базис e_α, $\alpha \in \mathbb{Z}_{+,0}^{\infty}$, чисел заполнения (6), (7). Рассмотрим операторы $a_+(e_j)$, $a_-(e_j)$ и $A(e_j)$, $j \in \mathbb{N}$, определенные согласно (18), (19), (22) для $h = e_j$.

Лемма 5. *Операторы* $a_+(e_j)$ *действуют следующим образом:* $\forall\ \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots) \in \mathbb{Z}_{+,0}^{\infty}$

$$a_+(e_j)e_\alpha = \sqrt{\alpha_j + 1}\ e_{\alpha + 1_j}, \quad j = \mathbb{N}, \tag{29}$$

где через $\alpha + 1_j$ *обозначена последовательность*

$$\alpha + 1_j = (\alpha_1, \dots, \alpha_{j-1}, \alpha_j + 1, \alpha_{j+1}, \dots) \in \mathbb{Z}_{+,0}^{\infty} \tag{30}$$

(*т. е. в* α *на* j*-м месте* α_j *заменено на* $\alpha_j + 1$).

Доказательство. Будем пользоваться следующим равенством для симметризаторов, которое докажем ниже:

$$P_{n+1}(h \otimes P_n f_n) = P_{n+1}(h \otimes f_n), \quad h \in H, \quad f_n \in H_c^{\otimes n}, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{31}$$

Согласно (19) и (31) имеем

$$a_+(e_j)\, e_\alpha^{|\alpha|} = a_+(e_j)\Big(\Big(\frac{|\alpha|!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\dots}\Big)^{1/2} P_{|\alpha|}\big(e_1^{\otimes\alpha_1} \otimes e_2^{\otimes\alpha_2} \otimes \dots\big)\Big) =$$

$$= \Big(\Big(\frac{|\alpha|!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\dots}\Big)^{1/2} \sqrt{|\alpha|+1}\, P_{|\alpha|+1}\Big(e_j \otimes P_{|\alpha|}\big(e_1^{\otimes\alpha_1} \otimes e_2^{\otimes\alpha_2} \otimes \dots\big)\Big)\Big) =$$

$$= \Big(\frac{|\alpha|!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\dots}\Big)^{1/2} \sqrt{|\alpha|+1}\, P_{|\alpha|+1}\big(e_j \otimes e_1^{\otimes\alpha_1} \otimes e_2^{\otimes\alpha_2} \otimes \dots\big) =$$

$$= \Big(\frac{|\alpha|!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\dots}\Big)^{1/2} \sqrt{|\alpha|+1}\ \times$$

$$\times P_{|\alpha|+1}\Big(e_1^{\otimes\alpha_1} \otimes \ldots \otimes e_{j-1}^{\otimes\alpha_{j-1}} \otimes e_j^{\otimes(\alpha_j+1)} \otimes e_{j+1}^{\otimes\alpha_{j+1}} \otimes \ldots \Big) =$$

$$= \sqrt{\alpha_j+1}\, \Big(\frac{(|\alpha|+1)!}{\alpha_1!\ldots\alpha_{j-1}!(\alpha_j+1)!\,\alpha_{j+1}!\ldots} \Big)^{1/2} \times$$

$$\times P_{|\alpha|+1}\Big(e_1^{\otimes\alpha_1} \otimes \ldots \otimes e_{j-1}^{\otimes\alpha_{j-1}} \otimes e_j^{\otimes(\alpha_j+1)} \otimes e_{j+1}^{\otimes\alpha_{j+1}} \otimes \ldots \Big) =$$

$$= \sqrt{\alpha_j+1}\; e_{\alpha+1_j}^{|\alpha+1_j|} \qquad \forall\, \alpha \in \mathbb{Z}_{+,0}^{\infty}, \quad \forall\, j \in \mathbb{N}.$$

Полученное равенство очевидно эквивалентно (29).

Установим соотношение (31). Имеем

$$\Big(P_{n+1}(h \otimes P_n f_n), g^{\otimes(n+1)} \Big)_{\mathcal{F}_{n+1}(H)} = \Big(h \otimes P_n f_n, g^{\otimes(n+1)} \Big)_{H_c^{\otimes(n+1)}} =$$

$$= (h, g)_{H_c}\Big(P_n f_n, g^{\otimes n} \Big)_{H_c^{\otimes n}} = (h, g)_{H_c}\Big(f_n, g^{\otimes n} \Big)_{H_c^{\otimes n}} =$$

$$= \Big(h \otimes f_n, g^{\otimes(n+1)} \Big)_{H_c^{\otimes(n+1)}} = \Big(P_{n+1}(h \otimes f_n), g^{\otimes(n+1)} \Big)_{\mathcal{F}_{n+1}(H)} \quad \forall\, g \in H_c.$$

Из этого равенства следует (31), так как векторы $g^{\otimes(n+1)}$, $g \in H_c$, образуют тотальное множество в $\mathcal{F}_{n+1}(H)$.

***Замечание* 6.** Ортонормированный базис в бесконечном тензорном произведении сепарабельных гильбертовых пространств $H_1, H_2, \ldots$ $\mathcal{H}_e = \oplus_{n=1;e}^{\infty} H_n$ со стабилизирующей последовательностью $e = (e^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ [14–16] индексируется подобно базису чисел заполнения (7) посредством $\alpha \in \mathbb{Z}_{+,0}^{\infty}$. Так, напомним, что для его построения нужно в каждом H_n зафиксировать ортонормированный базис $(e_k^{(n)})_{k=0}^{\infty}$, для которого $e_0^{(n)} = e^{(n)}$, и образовать формальное произведение

$$e_\alpha = e_{\alpha_1}^{(1)} \otimes e_{\alpha_2}^{(2)} \otimes \ldots, \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots) \in \mathbb{Z}_{+,0}^{\infty} \tag{32}$$

(произведение (32), начиная с некоторого $\nu+1$-го места, содержит векторы стабилизации: $e^{(\nu+1)} \otimes e^{(\nu+2)} \otimes \ldots$). Пространство $\oplus_{n=1;e}^{\infty} H_n$, по определению, является гильбертовым пространством, натянутым на векторы (32), которые считаются ортонормированными. Сопоставляя с вектором e_α базиса (7) вектор (32), получаем унитарный изоморфизм между $\mathcal{F}(H)$ и $\mathcal{H}_e$. Этим изоморфизмом мы будем сейчас пользоваться.

Для оператора A, действующего в $\mathcal{F}(H)$, можно ввести обычным образом его „матрицу" $\big(A_{\alpha,\beta}\big)_{\alpha,\beta\in\mathbb{Z}_{+,0}^{\infty}}$, полагая $A_{\alpha,\beta} = \big(Ae_\beta, e_\alpha\big)_{\mathcal{F}(H)}$. Такая матрица для оператора $a_+(e_j)$ (j фиксировано) благодаря (30) имеет вид

$$(a_+(e_j))_{\alpha,\beta} = \Big(a_+(e_j)e_\beta, e_\alpha \Big)_{\mathcal{F}(H)} = \Big(\sqrt{\beta_j+1}\, e_{\beta+1_j}, e_\alpha \Big)_{\mathcal{F}(H)} =$$

$$= \sqrt{\beta_j+1}\, \Big(e_{(\beta_1,\ldots,\beta_{j-1},\beta_j+1,\beta_{j+1},\ldots)}, e_{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots)} \Big)_{\mathcal{F}(H)} =$$

$$= \sqrt{\beta_j+1}\, \delta_{\alpha_1,\beta_1}\ldots\delta_{\alpha_{j-1},\beta_{j-1}}\,\delta_{\alpha_j,\beta_j+1}\,\delta_{\alpha_{j+1},\beta_{j+1}}\ldots, \quad \alpha,\beta \in \mathbb{Z}_{+,0}^{\infty}. \tag{33}$$

Аналогично можно построить матрицу по оператору A, действующему в $\mathcal{H}_e$, используя при этом базис (32). Два оператора, действующие соответственно в $\mathcal{F}(H)$ и $\mathcal{H}_e$ и имеющие одинаковые матрицы, изоморфны. Легко написать действующий в $\mathcal{H}_e$ образ оператора $a_+(e_j)$ при таком изоморфизме. Так, для каждого $j \in \mathbb{N}$ введем обычную полубесконечную якобиевую матрицу (оператор) $\mathcal{J}_{+,j}$, у которой все элементы равны нулю за исключением первой диагонали под главной, которая имеет вид $(\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots)$. Тогда матрице (33) соответствует оператор в $\mathcal{H}_e$

$$1 \otimes \dots \otimes 1 \otimes \mathcal{J}_{+,j} \otimes 1 \otimes 1 \otimes \dots = a_+(e_j) \tag{34}$$

($\mathcal{J}_{+,j}$ стоит на j-м месте; равенство в (34) нужно понимать как изоморфизм).

Беря сопряженный оператор к (34), получаем

$$1 \otimes \dots \otimes 1 \otimes \mathcal{J}_{-,j} \otimes 1 \otimes 1 \otimes \dots = a_-(e_j), \tag{35}$$

где $\mathcal{J}_{-,j}$ — аналогичная $\mathcal{J}_{+,j}$ матрица, в которой $(\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots)$ является диагональю, первой над главной. Соотношение (35) можно переписать в аналогичном (29) виде. В результате получим: $\forall \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots) \in \mathbb{Z}^{\infty}_{+,0}$ в случае $\alpha_j > 0$

$$a_-(e_j)e_\alpha = \sqrt{\alpha_j}\, e_{\alpha-1_j}, \quad j \in \mathbb{N}, \tag{36}$$

$\alpha - 1_j = (\alpha_1, \dots, \alpha_{j-1}, \alpha_j - 1, \alpha_{j+1}, \dots)$; $a_-(e_j)e_\alpha = 0$, если $\alpha_j = 0$.

Представление типа (34), (35) для полевого оператора $A(e_j)$, очевидно, будет иметь вид

$$A(e_j) = 1 \otimes \dots \otimes 1 \otimes \mathcal{J}_j \otimes 1 \otimes 1 \otimes \dots,$$

$$\mathcal{J}_j = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\frac{1}{2}} & 0 & 0 & \dots \\ \sqrt{\frac{1}{2}} & 0 & \sqrt{\frac{2}{2}} & 0 & \dots \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{2}} & 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & \dots \\ . & . & . & . & \dots \end{pmatrix}. \tag{37}$$

Установим еще одну лемму. Предварительно введем один ортонормированный базис в пространстве H и соответствующий ему базис чисел заполнения. Именно, построим посредством процедуры ортогонализации ортонормированный базис $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ в пространстве H, исходя из последовательности $(\varepsilon_j)_{j=1}^{\infty}$, $\varepsilon_j \in \Phi$, тотальной в $H_{\tau,c}$. В результате последовательность $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ будет также тотальной в $H_{\tau,c}$. Поэтому соответствующий базис $e_\alpha^{|\alpha|}$ вида (6) для $|\alpha| = n \in \mathbb{N}$ образует тотальное множество в $\mathcal{F}_n(H_\tau)$: это следует из тотальности множества $\left\{ e_1^{\otimes\alpha_1} \otimes e_2^{\otimes\alpha_2} \otimes \dots \,||\alpha| = n \right\}$ в $H_{\tau,c}^{\otimes n}$ и того, что симметризатор P_n действует в этом пространстве (лемма 1). Множество $\{e_\alpha |\ \alpha \in \mathbb{Z}^{\infty}_{+,0}\} \subseteq \mathcal{F}_{\text{fin}}(\Phi)$, очевидно, тотально в $\mathcal{F}(H_\tau, p)$.

Так построенный базис $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ и отвечающий ему базис чисел заполнения $(e_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}^{\infty}_{+,0}}$ в дальнейшем будем постоянно использовать.

Лемма 6. *Вектор* $\Omega = e_0 = (1, 0, 0, \dots) \in \mathcal{F}(H)$ *является циклическим для семейства* (23) *замыканий полевых операторов.*

Доказательство. Достаточно убедиться, что для произвольного $\alpha \in \mathbb{Z}_{+,0}^{\infty}$ вектор e_α из введенного сейчас базиса принадлежит линейной оболочке векторов

$$A^{\alpha_1}(e_1) \dots A^{\alpha_\nu}(e_\nu)\Omega, \qquad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_\nu, 0, 0, \dots) \in \mathbb{Z}_{+,0}^{\infty}. \tag{38}$$

Будем доказывать этот факт по индукции. Так как согласно (18), (19) $\forall\, h \in H$ $a_+(h)\Omega = h$, $a_-(h)\Omega = 0$, то по (22) $A(h)\Omega = (1/\sqrt{2})\,h$. Таким образом, для произвольного $j \in \mathbb{N}$ векторы $e_j = \sqrt{2}\,A(e_j)\Omega$ входят в линейную оболочку векторов (29) с $|\alpha| = 1$. Предположим теперь, что в линейную оболочку векторов (38) с $|\alpha| \le n$, $n \in \mathbb{N}$, входят все e_α с $|\alpha| \le n$. Докажем, что тогда все векторы e_α с $|\alpha| \le n+1$ входят в линейную оболочку (38) с $|\alpha| \le n+1$ и этим будет завершено доказательство леммы.

Из (29) и (36) вытекает, что для всех $j \in \mathbb{N}$

$$\begin{gathered} A(e_j)e_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\alpha_j+1}\; e_{\alpha+1_j} + \sqrt{\alpha_j}\; e_{\alpha-1_j}\right), \quad 0 \ne \alpha \in \mathbb{Z}_{+,0}^{\infty}, \quad \alpha_j > 0, \\ A(e_j)e_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}\, e_{\alpha+1_j}, \quad 0 \ne \alpha \in \mathbb{Z}_{+,0}^{\infty}, \quad \alpha_j = 0, \quad A(e_j)\Omega = \frac{1}{\sqrt{2}}\, e_j. \end{gathered} \tag{39}$$

Рассмотрим $\alpha \in \mathbb{Z}_{+,0}^{\infty}$, для которого $|\alpha| \le n+1$. Если $|\alpha| \le n$, то e_α принадлежит последней линейной оболочке по индукции. Пусть $|\alpha| = n+1$, тогда согласно (39)

$$A^{\alpha_1}(e_1) \dots A^{\alpha_\nu}(e_\nu)\Omega = a_+^{\alpha_1}(e_1) \dots a_+^{\alpha_\nu}(e_\nu)\Omega + f_n, \tag{40}$$

где вектор $f_n \in \oplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{F}_k(H)$ и является некоторой линейной комбинацией векторов e_β с $|\beta| \le n$. Но согласно (29) $a_+^{\alpha_1}(e_1) \dots a_+^{\alpha_\nu}(e_\nu)\Omega = c\,e_\alpha$, $c > 0$, и из (40) мы заключаем, что e_α принадлежит линейной оболочке векторов (38) с $|\alpha| \le n+1$.

4. Изоморфизм Сигала как преобразование Фурье. Мы проделали всю необходимую подготовительную работу для построения согласно теореме 1 преобразования Фурье, отвечающего семейству (23) замыканий полевых операторов.

Итак, сейчас рассматривается семейство $A = (\tilde{A}(\varphi))_{\varphi \in \Phi}$ коммутирующих самосопряженных операторов, действующих в пространстве $H_0 = \mathcal{F}(H)$, оснащенном посредством цепочки (24), играющей роль (1). Как и в п. 3, Φ — ядерное пространство, вес p выбран таким, чтобы оснащение (24) было квазиядерным; $X = \Phi$, $A_x = \tilde{A}(\varphi)$.

В силу леммы 3 для любого $\varphi \in \Phi$ оператор $\tilde{A}(\varphi)$ стандартно связан с цепочкой (24), а в силу леммы 6 вектор $\Omega = (1, 0, 0, \dots)$ циклический для семейства A. С помощью леммы 4 легко заключаем, что спектр A может быть взят равным $\Phi' \subseteq \mathbb{R}^{\Phi}$. В самом деле, равенство (2) перепишем в виде

$$\big(\xi(\lambda(\cdot)), A(\varphi)\psi\big)_{\mathcal{F}(H)} = \lambda(\varphi)\big(\xi(\lambda(\cdot)), \psi\big)_{\mathcal{F}(H)} \quad \forall\, \varphi \in \Phi, \quad \psi \in \mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(\Phi), \tag{41}$$

где $\xi(\lambda(\cdot)) \in \mathcal{F}(H_{-\tau}, p^{-1})$ — соответствующий совместный обобщенный собственный вектор. Из (41) и леммы 4 следует, что функция $\Phi \ni \varphi \mapsto \lambda(\varphi) \in \mathbb{R}^1$

линейна и непрерывна. Таким образом, каждое собственное значение $\lambda(\cdot) \in \Phi'$. Учитывая замечание 1, можно положить $\Lambda = \Phi'$.

В дальнейшем через λ будем обозначать элементы из Φ' и писать $\lambda(\varphi) = (\lambda, \varphi)_H$, $\varphi \in \Phi$; $\lambda = \lambda(\cdot)$.

Зафиксируем базис чисел заполнения $\left(e_\alpha \right)_{\alpha \in \mathbb{Z}^\infty_{+,0}}$, введенный перед формулировкой леммы 5. Множество $\{e_\alpha \,|\, \alpha \in \mathbb{Z}^\infty_{+,0}\} \subseteq \mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(\Phi)$ тотально в $\mathcal{F}(H_\tau, p)$ и поэтому для любого вектора $\xi = (\xi_n)_{n=0}^\infty \in \mathcal{F}(H_{-\tau}, p^{-1})$ последовательность его „координат"

$$\xi_\alpha = \left(\xi, e_\alpha \right)_{\mathcal{F}(H)}, \quad \alpha \in \mathbb{Z}^\infty_{+,0}, \tag{42}$$

или

$$\xi_{n,\alpha} = \left(\xi, e^n_\alpha \right)_{\mathcal{F}_n(H)}, \quad \alpha \in \mathbb{Z}^\infty_{+,0}, \quad |\alpha| = n, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

полностью определяет этот вектор. Каждый вектор $f = (f_n)_{n=0}^\infty \in \mathcal{F}(H)$ можно записать посредством координат (42) в виде

$$f = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^\infty_{+,0}} f_\alpha e_\alpha, \tag{43}$$

$$\left(f, g \right)_{\mathcal{F}(H)} = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^\infty_{+,0}} f_\alpha \overline{g}_\alpha, \quad f, g \in \mathcal{F}(H).$$

Для $\varphi = (\varphi_n)_{n=0}^\infty \in \mathcal{F}(H_\tau, p)$ и $\xi = (\xi_n)_{n=0}^\infty \in \mathcal{F}(H_{-\tau}, p^{-1})$ также справедливо равенство

$$\left(\varphi, \xi \right)_{\mathcal{F}(H)} = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^\infty_{+,0}} \varphi_\alpha \overline{\xi}_\alpha. \tag{44}$$

Сходимость ряда (44) в общем случае будет только условной: берется последовательность $f^{(k)} \in \mathcal{F}(H)$, сходящаяся при $k \to \infty$ к ξ в смысле пространства $\mathcal{F}(H_{-\tau}, p^{-1})$. Тогда ряд (44) равен пределу при $k \to \infty$ рядов для $\left(\varphi, f^{(k)} \right)_{\mathcal{F}(H)}$ вида (43).

Найдем совместный обобщенный собственный вектор $\xi(\lambda)$ для семейства (24). Сейчас в соответствии с (42) $\xi(\lambda) = \left(\xi_\alpha(\lambda) \right)_{\alpha \in \mathbb{Z}^\infty_{+,0}} \in \mathcal{F}(H_{-\tau}, p^{-1})$, $\lambda \in \Phi'$.

Лемма 7. *Для координат $\xi_\alpha(\lambda)$ вектора $\xi(\lambda)$ справедлива следующая формула*:

$$\xi_\alpha(\lambda) = \xi_0(\lambda)\, h_{\alpha_1}\!\left((\lambda, e_1)_H \right) h_{\alpha_2}\!\left((\lambda, e_2)_H \right) \ldots, \tag{45}$$

$$\xi_0(\lambda) \neq 0, \quad \alpha \in \mathbb{Z}^\infty_{+,0}, \quad \lambda \in \Phi'.$$

Здесь $(h_k(t))_{k=0}^\infty$ — последовательность ортонормированных полиномов Эрмита относительно канонической гауссовой меры на оси $d\gamma_1(1) = \pi^{-1/2} e^{-t^2} dt$, $t \in \mathbb{R}^1$.

Доказательство. Соотношение (41) перепишем в виде

$$\left(\xi(\lambda), A(\varphi)\psi \right)_{\mathcal{F}(H)} = (\lambda, \varphi)_H \left(\xi(\lambda), \psi \right)_{\mathcal{F}(H)}, \quad \varphi \in \Phi, \quad \psi \in \mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(\Phi). \tag{46}$$

Заменяя в (46) φ на e_j и ψ на e_α, получаем

$$\big(\xi(\lambda), A(e_j)e_\alpha\big)_{\mathcal{F}(H)} = (\lambda, e_j)_H \xi_\alpha(\lambda), \quad j \in \mathbb{Z}_+, \quad \alpha \in \mathbb{Z}_{+,0}^\infty. \tag{47}$$

Учитывая (39), перепишем (47) в виде

$$\sqrt{\frac{\alpha_j}{2}}\,\xi_{\alpha-1_j}(\lambda) + \sqrt{\frac{\alpha_j+1}{2}}\,\xi_{\alpha+1_j}(\lambda) = (\lambda, e_j)_H \xi_\alpha(\lambda), \ \alpha \in \mathbb{Z}_{+,0}^\infty, \ \alpha_j > 0, \tag{48}$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}}\,\xi_{\alpha+1_j}(\lambda) = (\lambda, e_j)_H \xi_\alpha(\lambda), \ \ \alpha \in \mathbb{Z}_{+,0}^\infty, \ \ \alpha_j = 0, \ \ j \in \mathbb{N}.$$

Найдем решение этих рекуррентных соотношений. Положим в (48) $j = 1$ и $\alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = 0$. Тогда

$$\begin{gathered}\sqrt{\frac{\alpha_1}{2}}\,\xi_{(\alpha_1-1,0,0,\ldots)}(\lambda) + \sqrt{\frac{\alpha_1+1}{2}}\,\xi_{(\alpha_1+1,0,0,\ldots)}(\lambda) = \\ = (\lambda, e_1)_H\, \xi_{(\alpha_1,0,0,\ldots)}(\lambda), \quad \alpha_1 \in \mathbb{N}, \\ \sqrt{\frac{1}{2}}\,\xi_{(1,0,0,\ldots)}(\lambda) = (\lambda, e_1)_H\, \xi_{(0,0,0,\ldots)}(\lambda) = (\lambda, e_1)_H\, \xi_0(\lambda).\end{gathered} \tag{49}$$

Таким образом, мы применяем к последовательности $\big(\xi_{(\alpha_1,0,0,\ldots)}(\lambda)\big)_{\alpha_1=0}^\infty$ якобиеву матрицу из (37). Поэтому решение системы (49) имеет вид (см. [21])

$$\xi_{(\alpha_1,0,0,\ldots)}(\lambda) = \xi_0(\lambda)\, h_{\alpha_1}\big((\lambda, e_1)_H\big), \quad \alpha_1 \in \mathbb{Z}_+. \tag{50}$$

Положим теперь в (48) $j = 2$, $\alpha_3 = \alpha_4 = \ldots = 0$ и зафиксируем некоторое $\alpha_1 \in \mathbb{Z}_+$. Получим

$$\begin{gathered}\sqrt{\frac{\alpha_2}{2}}\,\xi_{(\alpha_1,\alpha_2-1,0,0,\ldots)}(\lambda) + \sqrt{\frac{\alpha_2+1}{2}}\,\xi_{(\alpha_1,\alpha_2+1,0,0,\ldots)}(\lambda) = \\ = (\lambda, e_2)_H\, \xi_{(\alpha_1,\alpha_2,0,0,\ldots)}(\lambda), \quad \alpha_2 \in \mathbb{N}, \\ \sqrt{\frac{1}{2}}\,\xi_{(\alpha_1,1,0,0,\ldots)}(\lambda) = (\lambda, e_2)_H\, \xi_{(\alpha_1,0,0,0,\ldots)}(\lambda).\end{gathered}$$

Отсюда, как и выше, заключаем (используя (50))

$$\begin{gathered}\xi_{(\alpha_1,\alpha_2,0,0,\ldots)}(\lambda) = \xi_{(\alpha_1,0,0,0,\ldots)}(\lambda)\, h_{\alpha_2}\big((\lambda, e_2)_H\big) = \\ = \xi_0(\lambda)\, h_{\alpha_1}\big((\lambda, e_1)_H\big)\, h_{\alpha_2}\big((\lambda, e_2)_H\big), \quad \alpha_2 \in \mathbb{Z}_+.\end{gathered}$$

Продолжая эту процедуру, получаем формулу (45).

Начальная функция $\xi_0(\lambda) \neq 0$, $\lambda \in \Phi'$: так как если для некоторого $\lambda \in \Phi'$ $\xi_0(\lambda) = 0$, то согласно (45) $\xi(\lambda) = 0$, а это противоречит определению совместного обобщенного собственного вектора.

Удобно в (45) выбрать $\xi_0(\lambda) = 1$, $\lambda \in \Phi'$. Поясним этот шаг. Пусть $\xi_1(\lambda)$ — соответствующий этому выбору обобщенный собственный вектор. Тогда согласно (45) $\xi(\lambda) = \xi_0(\lambda)\,\xi_1(\lambda)$ и преобразование Фурье (3) будет равно новому преобразованию Фурье, отвечающему 1, умноженному на $\xi_0(\lambda)$. Равенство Парсеваля (4) сохранится для новой спектральной меры $d\rho_1(\lambda) = |\xi_0(\lambda)|^2 d\rho(\lambda)$.

Применяя теорему 1 и используя формулу (45), заключаем, что преобразование Фурье и равенство Парсеваля в данном случае для произвольного $\lambda \in \Phi'$

имеет вид

$$\mathcal{F}(H_\tau, p) \ni \varphi = \left(\varphi_\alpha \right)_{\alpha \in \mathbb{Z}^\infty_{+,0}} \mapsto (F, \varphi)(\lambda) = \tilde{\varphi}(\lambda) =$$

$$= \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^\infty_{+,0}} \varphi_\alpha \xi_\alpha(\lambda) \in L_2(\Phi', d\rho(\lambda)), \tag{51}$$

$$\xi_\alpha(\lambda) = h_{\alpha_1}\left((\lambda, e_1)_H \right) h_{\alpha_2}\left((\lambda, e_2)_H \right) \ldots,$$

$$(\varphi, \psi)_{\mathcal{F}(H)} = \int_{\Phi'} \tilde{\varphi}(\lambda)\, \overline{\tilde{\psi}(\lambda)}\, d\rho(\lambda), \quad \varphi, \psi \in \mathcal{F}(H_\tau, p),$$

где ρ — соответствующая спектральная мера.

Отметим, что сходимость ряда в (51) следует понимать как сходимость в условном смысле ряда типа (44). С другой стороны, ее можно понимать как сходимость в среднем квадратичном в пространстве $L_2(\Phi', d\rho(\lambda))$, так как функции $\left(\xi_\alpha(\lambda) \right)_{\alpha \in \mathbb{Z}^\infty_{+,0}}$ образуют ортонормированную систему в $L_2(\Phi', d\rho(\lambda))$, а последовательность $\left(\varphi_\alpha \right)_{\alpha \in \mathbb{Z}^\infty_{+,0}}$ суммируема с квадратом. То, что функции $\left(\xi_\alpha(\lambda) \right)_{\alpha \in \mathbb{Z}^\infty_{+,0}}$ образуют ортонормированную систему, следует из равенства Парсеваля (51): нужно заметить, что $\xi_\alpha(\lambda) = \tilde{\delta}_\alpha$, где δ является „δ-последовательностью" $\delta_\alpha = \left(\delta_{\alpha,\beta} \right)_{\beta \in \mathbb{Z}^\infty_{+,0}}$.

Найдем спектральную меру ρ. По конструкции последовательность $(e_j)_{j=1}^\infty \subseteq \Phi$ тотальна в Φ' и поэтому корректно определено следующее взаимно однозначное отображение:

$$\Phi' \ni \lambda \mapsto \left((\lambda, e_j)_H \right)_{j=1}^\infty = \left(\lambda_j \right)_{j=1}^\infty = \lambda \in \mathbb{R}^\infty =$$

$$= \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \times \ldots, \qquad \lambda_j = (\lambda, e_j)_H. \tag{52}$$

В смысле отображения (52) предполагаем, что Φ' вложено в $\mathbb{R}^\infty$.

Пусть $C_\sigma(\mathbb{R}^\infty)$ — σ-алгебра, натянутая на все цилиндрические множества из $\mathbb{R}^\infty$, т. е. на множества $Ц(1, \ldots, n; \delta) = \{\lambda \in \mathbb{R}^\infty \mid (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \delta\}$, где $\delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $n \in \mathbb{N}$. Пересечения $\alpha \cap \Phi'$, $\alpha \in C_\sigma(\mathbb{R}^\infty)$, образуют σ-алгебру подмножеств из Φ', и легко понять, что эта σ-алгебра совпадает с $\mathcal{B}(\Phi')$ [16]. Каждая мера μ на $\mathcal{B}(\Phi')$ продолжается до некоторой меры $\hat{\mu}$ на $C_\sigma(\mathbb{R}^\infty)$: $C_\sigma(\mathbb{R}^\infty) \ni \alpha \mapsto \hat{\mu}(\alpha) = \mu(\alpha \cap \Phi')$. В частности, спектральная мера ρ на Φ' продолжается до меры $\hat{\rho}$ на $\mathbb{R}^\infty$.

Функции $\xi_\alpha(\lambda)$, $\lambda \in \Phi'$, из (51) также продолжаются до функций $\hat{\xi}_\alpha(\lambda) = h_{\alpha_1}(\lambda_2)\, h_{\alpha_2}(\lambda_2) \ldots$ на $\mathbb{R}^\infty$ и очевидно

$$\int_{\mathbb{R}^\infty} \hat{\xi}_\alpha(\lambda)\, \hat{\xi}_\beta(\lambda)\, d\hat{\rho}(\lambda) = \int_{\Phi'} \xi_\alpha(\lambda)\, \xi_\beta(\lambda)\, d\rho(\lambda) = \delta_{\alpha,\beta}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{Z}^\infty_{+,0}. \tag{53}$$

Зафиксируем $\nu \in \mathbb{N}$, введем меру $\mathcal{B}(\mathbb{R}^\nu) \ni \delta \mapsto \hat{\rho}_\nu(\delta) = \hat{\rho}(Ц(1, \ldots, n; \delta))$ и многомерные полиномы Эрмита $h_\alpha(\lambda) = h_{\alpha_1}(\lambda_1) \ldots h_{\alpha_\nu}(\lambda_\nu)$, $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_\nu) \in$

$\in \mathbb{R}^{\nu}$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_\nu) \in \mathbb{Z}_+^{\nu}$. Тогда из равенства (53) следует

$$\int\limits_{\mathbb{R}^\infty} h_\alpha(\lambda)\, h_\beta(\lambda)\, d\hat{\rho}_\nu(\lambda) = \delta_{\alpha,\beta}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^{\nu}. \tag{54}$$

Но известно, что только каноническая гауссова мера имеет свойство (54), т.е. $\hat{\rho}_\nu = \gamma_1 \times \dots \times \gamma_1$ (ν раз)[16]. Так как ν произвольно, то $\hat{\rho} = \gamma_1 \times \gamma_1 \times \dots$. Спектральная мера ρ является сужением этой меры $\hat{\rho}$ на Φ'. Таким образом, можно утверждать, что спектральная мера ρ равна гауссовой мере γ_1 на Φ' с единичным корреляционным оператором.

Из изложенного и теоремы 1 вытекает следующая теорема.

Теорема 2. *Преобразование Фурье по совместным обобщенным собственным векторам семейства* (23) *имеет вид*

$$\mathcal{F}(H) \ni f = \left(f_\alpha \right)_{\alpha \in \mathbb{Z}_{+,0}^\infty} \mapsto (Ff)(\lambda) = \tilde{f}(\lambda) =$$

$$= \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_{+,0}^\infty} f_\alpha h_\alpha(\lambda) \in L_2(\Phi', d\gamma_1(\lambda)), \tag{55}$$

где γ_1 *— каноническая гауссова мера на* Φ', f_α *—* α*-координата вектора* f *в базисе чисел заполнения* (*см.* (42)), *построенном по некоторому ортонормированному базису* $(e_j)_{j=1}^\infty$ *пространства* H (*см. с.* 179), *а* h_α *— бесконечномерный полином Эрмита*:

$$h_\alpha(\lambda) = h_{\alpha_1}\left((\lambda, e_1)_H \right) h_{\alpha_2}\left((\lambda, e_2)_H \right) \dots, \quad \alpha \in \mathbb{Z}_{+,0}^\infty, \quad \lambda \in \Phi', \tag{56}$$

(*$\left(h_k(t) \right)_{k=0}^\infty$ — ортонормированная последовательность полиномов Эрмита на* $\mathbb{R}^1$ *с канонической гауссовой мерой*). *Оператор* (55) *является унитарным между пространствами* $\mathcal{F}(H)$ *и* $L_2(\Phi', d\gamma_1(\lambda))$ *и совпадает с преобразованием Сигала.*

Поясним: совпадение (55) с преобразованием Сигала вытекает из сравнения этой формулы с формулами (2.27), (2.25) и (2.24), гл. 2 из [16].

Сделаем несколько замечаний к этой теореме.

Замечания. **7.** Для $f \in \mathcal{F}(H_\tau, p) \subseteq \mathcal{F}(H)$, где вложение $H_\tau \subseteq H$ квазиядерно и p удовлетворяет условию (15), ряд (55) сходится во введенном условном смысле. В общем случае он сходится в смысле пространства $L_2(\Phi', d\gamma_1(\lambda))$.

8. Образ $F\left(\mathcal{F}(H_\tau, p) \right) \subseteq L_2(\Phi', d\gamma_1(\lambda))$ с топологией $\mathcal{F}(H_\tau, p)$ является гильбертовым пространством, квазиядерно вложенным в $L_2(\Phi', d\gamma_1(\lambda))$ и порождающим некоторое оснащение последнего пространства. Такая ситуация имеет место и для каждого пространства G, содержащегося между $\mathcal{F}(H)$ и $\mathcal{F}_{\text{fin}}(\Phi)$: $\mathcal{F}(H) \supseteq G \supseteq \mathcal{F}_{\text{fin}}(\Phi)$ $\left(G \right.$ может принадлежать семейству пространств $\left(\mathcal{F}(H_\tau, p) \right)_{(\tau,t) \in \mathrm{T}\times\mathrm{P}}$ или нет $\left. \right)$. В частности, $F\left(\mathcal{F}_{\text{fin}}(\Phi) \right)$ является пространством $\mathcal{P}_{\text{cyl}}(\Phi')$ цилиндрических полиномов на Φ'; применяя F к пространству, построенному в замечании 5, получаем пространство $\mathcal{A}(\Phi')$ [12, 16].

9. Ядерность Φ не является необходимой для нашей конструкции. Достаточно, чтобы пространство Φ было проективным пределом вещественных гильбертовых пространств, сепарабельным и таким, чтобы существовала цепочка $H \supseteq H_+ \supseteq \Phi$ с топологическим вложением $\Phi \subseteq H_+$ и квазиядерным вложением $H_+ \subseteq H$. Тогда спектральная мера является гауссовой на Φ': $\rho = \gamma_1$. Сейчас противоречия не возникают, так как $\Phi' \supseteq H_-$ и H_- является множеством полной гауссовой меры на $\mathbb{R}^\infty$.

10. Ортогональное разложение (17) пространства Фока переходит под действием преобразования Фурье F в разложение Винера–Ито пространства $L_2(\Phi', d\gamma_1(\lambda))$ на ортогональную сумму подпространств $L_{2,n}(\Phi', d\gamma_1(\lambda)) = F\big(\mathcal{F}_n(H)\big)$ — n-кратных винеровских интегралов ($n \in \mathbb{Z}_+$).

11. Под действием F каждый полевой оператор $\tilde{A}(\varphi)$ переходит в оператор умножения на $(\lambda, \varphi)_H$: $(A(\varphi)\psi)^{\sim}(\lambda) = (\lambda, \varphi)_H \tilde{\psi}(\lambda)$, $\varphi \in \Phi$, $\psi \in \mathcal{F}_{\text{fin}}(\Phi)$, $\lambda \in \Phi'$.

12. Важные примеры конструкции:

1) $H = l^2$ и Φ равно пространству $\mathbb{R}_0^\infty$ финитных действительных последовательностей $\varphi = (\varphi_n)_{n=1}^\infty$, сейчас $\Phi' = \mathbb{R}^\infty$;

2) $H = L_2(\mathbb{R}^1, dx)$ и Φ равно пространству Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R}^1)$, сейчас $\Phi' = \mathcal{S}'(\mathbb{R}^1)$ (классический анализ белого шума).

В заключение рассматриваемого пункта остановимся на следующем вопросе. Пусть мы имеем цепочку вещественных сепарабельных пространств $\Phi' \supseteq H \supseteq \Phi = \operatorname{pr\,lim}_{\tau \in T} H_\tau$, где H гильбертово, а Φ ядерно, и оператор S, действующий из Φ в Φ', причем непрерывно из некоторого $H_{\tau'}$ в некоторое $H_{-\tau''}$ $\big(\exists\, \tau', \tau'' \in T$, для которых $\| S\varphi \|_{H_{-\tau''}} \le c \| \varphi \|_{H_{\tau'}}$, $\varphi \in \Phi\big)$. Предполагается, что S положителен: $(S\varphi, \varphi)_H > 0$, если $\varphi \ne 0$. Тогда можно построить гильбертово пространство H_S как пополнение Φ относительно скалярного произведения $(\varphi, \psi)_{H_S} = (S\varphi, \psi)_H$, $\varphi, \psi \in \Phi$, и рассмотреть пространство Фока $\mathcal{F}(H_S)$. Поскольку вложение $\Phi \subseteq H_S$ топологично, то мы можем, конечно, рассмотреть семейство $A = \big(A_\varphi^{\sim}\big)_{\varphi \in \Phi}$ полевых операторов, действующих в пространстве $\mathcal{F}(H_S)$, и, применив к этому семейству теорему 2, построить изоморфизм между пространствами $\mathcal{F}(H_S)$ и $L_2(\Phi'_S, d\gamma_1(\lambda))$, где Φ'_S — пространство, сопряженное к Φ относительно H_S. Но часто бывает удобным использовать старую цепочку (24) и установить изоморфизм между пространствами $\mathcal{F}(H_S)$ и $L_2(\Phi', d\rho(\lambda))$ с некоторой специальной мерой ρ. Подробнее об этом см. [16, 19], а сейчас мы только наметим один путь установления равенства $\rho = \gamma_S$.

Легко видеть, что найдется такое $\tau_0 \in T$, что вложение $H_{\tau_0} \subseteq H$ квазиядерно и $|(S\varphi, \psi)_H| \le K \|\varphi\|_{H_{\tau_0}} \|\psi\|_{H_{\tau_0}}$, $K > 0$, $\varphi, \psi \in \Phi$. Следовательно, пространство H_{τ_0} вкладывается в H_S топологически. Потребуем дополнительно, чтобы вложение $H_{\tau_0} \subseteq H_S$ было также квазиядерным (ясно, что мы всегда можем добиться этого, выбирая подходящее τ_0). Тогда, учитывая замечание 9, можно построить изоморфизм между пространствами $\mathcal{F}(H_S)$ и $L_2(H_{-\tau_0,s}, d\gamma_1(\lambda))$, где пространство $H_{-\tau_0,s}$ сопряжено к H_{τ_0} относительно H_S. Затем, используя естественный изоморфизм $S'\colon H_{-\tau_0,s} \to H_{-\tau_0}$, который определяется из равенства $(\xi, \varphi)_{H_S} = (S'\xi, \varphi)_H$ $(\varphi \in H_{\tau_0},\ \ \xi \in H_{-\tau_0,s})$, т. е. $S' \upharpoonright \Phi = S \upharpoonright \Phi$, построим изоморфизм между пространствами $L_2(H_{-\tau_0,s}, d\gamma_1(\lambda))$ и $L_2(H_{-\tau_0}, d\gamma_S(\lambda)) = L_2(\Phi', d\gamma_S(\lambda))$; при этом значения меры γ_S подсчитываются сначала на цилиндрических множествах из $H_{-\tau_0}$, которые являются образами цилиндрических множеств из $H_{-\tau_0,s}$ при изоморфизме $S'\colon \gamma_S(S'(\text{Ц})) = \gamma_1(\text{Ц})$, $\text{Ц} \in C_\sigma(H_{-\tau_0})$.

5. Обобщение на якобиевы матрицы. Наметим упоминавшееся во введении обобщение предыдущих рассмотрений, которое основывается на разложении по совместным обобщенным собственным векторам более общего, чем (23), семейства самосопряженных операторов. Для его введения зафиксируем последовательность общих якобиевых матриц, которые будут заменять матрицы из (37)

$$L_j = \begin{pmatrix} b_0(j) & a_0(j) & 0 & 0 & \dots \\ a_0(j) & b_1(j) & a_1(j) & 0 & \dots \\ 0 & a_1(j) & b_2(j) & a_2(j) & \dots \\ . & . & . & . & \dots \end{pmatrix}, \tag{57}$$

$$a_n(j) > 0, \quad b_n(j) \in \mathbb{R}^1, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Введем для каждого $j \in \mathbb{N}$ в пространстве $\mathcal{F}(H)$ обобщенные операторы рождения $c_+(e_j)$ и уничтожения $c_-(e_j)$ $\left((e_j)_{j=1}^\infty \text{ — некоторый фиксированный ортонормированный базис } H \right)$, положив $\operatorname{Dom}(c_+(e_j)) = \mathcal{F}_{\text{fin}}(H)$,

$$\mathcal{F}_n(H) \ni \varphi_n \mapsto (c_+(e_j) \upharpoonright \mathcal{F}_n(H))\varphi_n =$$
$$= \sqrt{n+1}\, P_{n+1}(e_j \otimes (Q_{n,j}\varphi_n)) \in \mathcal{F}_{n+1}(H), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{58}$$
$$c_-(e_j) = (c_+(e_j))^* \upharpoonright \mathcal{F}_{\text{fin}}(H)).$$

В (58) оператор $Q_{n,j}\colon \mathcal{F}_n(H) \to \mathcal{F}_n(H)$ имеет вид

$$\mathcal{F}_n(H) \ni f_n = \sum_{\substack{\alpha \in Z_{+,0}^\infty, \\ |\alpha| = n}} f_{n,\alpha} e_\alpha^n \mapsto Q_{n,j} f_n =$$
$$= \sum_{\substack{\alpha \in Z_{+,0}^\infty, \\ |\alpha| = n}} a_{\alpha_j(j)} \sqrt{2(\alpha_j+1)^{-1}}\, f_{n,\alpha} e_\alpha^n \in \mathcal{F}_n(H). \tag{59}$$

Обобщенный полевой оператор $C(e_j)$ (дополнительно возмущенный главной диагональю L_j) определяется в пространстве $\mathcal{F}(H)$ на $\mathcal{F}_{\text{fin}}(\Phi)$ как $C(e_j) = 2^{-1/2}(c_+(e_j) + c_-(e_j)) + B_j$; оператор $B_j \upharpoonright \mathcal{F}_n(H)\colon \mathcal{F}_n(H) \to \mathcal{F}_n(H)$ задается формулой (59), в которой $a_{\alpha_j(j)}\sqrt{2(\alpha_j+1)^{-1}}$ заменено на $b_{\alpha_j(j)}$.

Операторы $C(e_j)$ будут эрмитовыми и формально коммутирующими. При некоторых ограничениях для каждого j на рост элементов матрицы L_j можно доказать, что их замыкания $\tilde{C}(e_j)$ будут самосопряженными коммутирующими операторами. Семейство $C = (\tilde{C}(e_j))_{j=1}^\infty$ стандартно связано с цепочкой (24). После применения теоремы 1 получим следующее обобщение теоремы 2.

Теорема 3. *Пусть* $(P_k(j;t))_{k=0}^{\infty}$ *— система ортонормированных полиномов и* $d\rho_j(t)$ *— спектральная мера на* $\mathbb{R}^1$, *связанная с матрицей* L_j (57) $(P_0(j;t)=1)$. *Преобразование Фурье* F *по совместным обобщенным собственным векторам семейства* C *имеет вид* (55), *где* $L_2(\Phi', d\gamma_1(\lambda))$ *заменено на* $L_2(\mathbb{R}^{\infty}, d\rho(\lambda))$, $\rho=\rho_1\times\rho_2\times\ldots$, *а вместо* h_α *фигурирует бесконечномерный полином*:

$$P_\alpha(\lambda) = P_{\alpha_1}(1,\lambda_1)\,P_{\alpha_2}(2,\lambda_2)\ldots, \quad \lambda=(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}\in\mathbb{R}^{\infty}; \quad \alpha\in\mathbb{Z}_{+,0}^{\infty}.$$

Преобразование Фурье, разумеется, есть унитарный оператор между пространствами $\mathcal{F}(H)$ *и* $L_2(\mathbb{R}^{\infty}, d\rho(\lambda))$.

Отметим, что выше вместо $\mathbb{R}^{\infty}$ можно рассматривать

$$\operatorname{supp}\rho = \times_{j=1}^{\infty}\operatorname{supp}\rho_j \subseteq \mathbb{R}^{\infty}$$

или подмножество $\operatorname{supp}\rho$ полной меры ρ (именно такая ситуация имеет место в теореме 2).

1. *Hida T.* Analysis of Brownian functionals // Carleton Math. Lect. Notes. – 1975. – № 13. – 83 p.
2. *Kubo I., Takenaka S.* Calculus of gaussian white noise. I–IV // Proc. Japan Acad. – 1980. – **56 A**, № 8. – P. 376 – 380; 1980. – **56 A**, № 9. – P. 411 – 416; 1981. – **57 A**, № 9. – P. 433 – 437; 1982. – **58 A**, № 5. – P. 186 – 189.
3. *Potthoff J., Streit L.* A characterization of Hida distributions // J. Funct. Anal. – 1991. – **101**, № 1. – P. 212 – 229.
4. *Hida T., Potthoff J., Streit L.* White noise analysis and applications // Math. + Phys. – 1989. – **3**. – P. 143 – 178.
5. *Albeverio S., Hida T., Potthoff J., Röckner M., Streit L.* Dirichlet forms in terms of white noise analysis I: Construction and QFT examples // Rev. Math. Phys. – 1990. – **1**, № 2. – P. 291 – 312.
6. *Albeverio S., Hida T., Potthoff J., Röckner M., Streit L.* Dirichlet forms in terms of white noise analysis II: Closability and diffusion processes // Ibid. – P. 313 – 323.
7. *Kuo H.-H.* Lectures on white noise analysis // Proc. Preseminar Intern. Conf. Gaussian Random Fields, pt 1. – Nagoya: Nagoya Univ., 1991. – P. 1 – 65.
8. *Lee Yuh-Jia.* Calculus of generalized white noise functionals – An abstract Wiener space approach // Ibid. – P. 66 – 125.
9. *Yokoi Y.* Properties of Gelfand triplet in white noise analysis and a characterization of positive Hida distributions // Ibid, pt 2. – P. 27 – 48.
10. *Hida T.* White noise and random fields – old and new // Ibid, pt 3. – P. 1 – 10.
11. *Березанский Ю. М., Самойленко Ю. С.* Ядерные пространства функций бесконечного числа переменных // Укр. мат. журн. – 1973. – **25**, № 6. – С. 723 – 737 (English transl. in Ukr. Math. J. – 1973. – **25**).
12. *Кондратьев Ю. Г.* Ядерные пространства целых функций в задачах бесконечномерного анализа // Докл. АН СССР. – 1980. – **254**, № 6. – С. 1325 – 1329 (English transl. in Soviet Math. Dokl. – 1981. – **22**).
13. *Kondrat'ev Yu. G., Samojlenko Yu. S.* The space of trial and generalized functions of infinite number of variables // Rep. Math. Phys. – 1978. – **14**, № 3. – P. 325 – 350.
14. *Березанский Ю. М.* Самосопряженные операторы в пространствах функций бесконечного числа переменных. – Киев: Наук. думка, 1978. – 360 с.
15. *Berezansky Yu. M.* Selfadjoint operators in spaces of functions of infinitely many variables // Transl. Amer. Math. Soc. – 1986. – **63**. – XV + 384 p. (extended English trans. of book [14]).
16. *Березанский Ю. М., Кондратьев Ю. Г.* Спектральные методы в бесконечномерном анализе. – Киев: Наук. думка, 1988. – 680 с. (English transl. in print by Klüwer Acad. Publ.).
17. *Кошманенко В. Д., Самойленко Ю. С.* Об изоморфизме между пространством Фока и пространством функций бесконечного числа переменных // Укр. мат. журн. – 1975. – **27**, № 5. – С. 669 – 674 (English transl. in Ukr. Math. J. – 1975. – **27**).
18. *Berezansky Yu. M., Livinsky V. O., Lytvynov E. W.* Spectral approach to white noise analysis. – Zürich, 1991. – 43 p. – (Preprint; ETH-TH / 91-31).
19. *Lytvynov E. W.* On the Segal isomorphism. – Kiev, 1992. – 52 p. – (Preprint / Inst. Math., Ukr. Acad. Sci.; 92.31).
20. *Березанский Ю. М., Ливинский В. О., Литвинов Е. В.* Одно обобщение преобразования Сигала // Докл. АН Украины. – 1992. – № 5. – С. 16 – 20.
21. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – Киев: Наук. думка, 1965. – 800 с. (English transl.: Transl. Amer. Math. Soc. – 1968. – **17**. – IX + 809 p.).

Получено 14.06.93