УДК 517.54

А. А. Гольдберг, д-р физ.-мат. наук (Львов. ун-т),
В. А. Пьяна, ассист. (Ровен. ин-т инж. водн. хоз-ва)

НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕМЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ РАЦИОНАЛЬНЫХ, АЛГЕБРАИЧЕСКИХ И АЛГЕБРОИДНЫХ ФУНКЦИЙ

A number of points A is found, for which the sets of simple A-points uniquely determine rational functions, polynomials, and algebraic or algebroid functions.

Знайдено, для скількох точок A задання множин простих A-точок однозначно визначає раціональну функцію, многочлен, алгебраїчну або алгеброїдну функцію.

1. Основные результаты. Пусть R — рациональная функция одного комплексного переменного, $\deg R$ — ее степень, т. е. максимальная степень двух взаимно простых многочленов, частное которых равно R. Обозначим через $E_s(A, R)$ множество простых A-точек функции R в $\overline{\mathbb{C}}$. Основными результатами статьи являются следующие теоремы единственности и, что потребовало наибольших усилий, построение примеров, показывающих неулучшаемость этих теорем.

Теорема 1. *Пусть R_1 и R_2 — две рациональные функции,* $\deg R_1 = \deg R_2 = n \geq 1$. *Пусть* $q(1) = 3$, $q(2) = q(3) = 5$, $q(n) = 6$ *при* $n \geq 4$. *Если* $A_1, \ldots, A_{q(n)}$ — *различные числа из* $\overline{\mathbb{C}}$ *и* $E_s(A_j, R_1) = E_s(A_j, R_2)$ *при* $1 \leq j \leq q(n)$, *то* $R_1 = R_2$.

Справедливость теоремы 1 будет следовать из более общей теоремы 5 (см. п. 2). Приведем примеры, которые показывают, что если в теореме 1 $q(n)$ заменить на $q(n) - 1$, то утверждение теоремы не верно. При $n = 1$ R_1 и R_2 — дробно-линейные функции, для которых утверждение теоремы 1 и его неулучшаемость известны.

***Пример* 1.** Пусть $n = 2$, функция $R_1(z) = z^2$, $R_2(z) = z^{-2}$. Тогда

$$E_s(1, R_1) = E_s(1, R_2) = \{1, -1\}, \quad E_s(-1, R_1) = E_s(-1, R_2) = \{i, -i\},$$

$$E_s(\infty, R_1) = E_s(\infty, R_2) = \varnothing, \quad E_s(0, R_1) = E_s(0, R_2) = \varnothing.$$

Четыре множества $E_s(A_j, R_1)$ и $E_s(A_j, R_2)$ совпадают, но $R_1 \neq R_2$.

При $n = 3$ возьмем $R_1(z) = z^3$, $R_2(z) = z^{-3}$. Тогда

$$E_s(1, R_1) = E_s(1, R_2) = \{\exp(2\pi i k/3) \colon \ k = 0, 1, 2\},$$

$$E_s(-1, R_1) = E_s(-1, R_2) = \{\exp(\pi i(2k+1)/3) \colon \ k = 0, 1, 2\},$$

$$E_s(0, R_1) = E_s(0, R_2) = E_s(\infty, R_1) = E_s(\infty, R_2) = \varnothing.$$

При $n = 2k \geq 4$ возьмем $R_1(z) = (z^{2k} + 2\sqrt{3}iz^k + 1)/(z^{2k} - 2\sqrt{3}iz^k + 1)$, $R_2(z) = R_1(z)\exp(2\pi i/3)$. Здесь и всюду в дальнейшем, если под знаком корня любой степени стоит положительное число, берем арифметическое значение корня. Тогда

$$E_s(1, R_\nu) = E_s(\exp(2\pi i/3), R_\nu) = E_s(\exp(-2\pi i/3), R_\nu) = \varnothing,$$

$$E_s(0, R_\nu) = \{((-\sqrt{3} \pm 2)i)^{1/k}\}, \quad E_s(\infty, R_\nu) = \{((\sqrt{3} \pm 2)i)^{1/k}\}, \quad \nu = 1, 2$$

(в последних двух множествах подразумевается, что берутся k значений корня, так что эти множества имеют по $2k$ элементов каждое). Таким образом, здесь совпадают 5 множеств $E_s(A_j, R_1)$ и $E_s(A_j, R_2)$.

© А. А. ГОЛЬДБЕРГ, В. А. ПЬЯНА, 1994

При $n = 2k+1$, $k \ge 2$, построить аналогичные примеры нам не удалось.

Теорема 2. *Пусть P_1 и P_2 — многочлены. Если A_1, A_2, A_3 — три различных числа из $\mathbb{C}$ и $E_s(A_j, P_1) = E_s(A_j, P_2)$, $j = 1, 2, 3$, то $P_1 = P_2$.*

Нетрудно убедиться, что если $E_s(A_j, P_1) = E_s(A_j, P_2)$, $j = 1, 2$, то может быть $P_1 \ne P_2$.

Пример 2. Пусть $T_n(z) = \cos(n \arccos z)$ — многочлен Чебышева степени $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$, $m \ne n$. Тогда, с одной стороны, $E_s(1, T_{2n}) = E_s(1, T_{2m}) = \{-1, 1\}$, $E_s(-1, T_{2n}) = E_s(-1, T_{2m}) = \varnothing$, а с другой —

$$E_s(1, T_{2n+1}) = E_s(1, T_{2m+1}) = \{1\},$$

$$E_s(-1, T_{2n+1}) = E_s(-1, T_{2m+1}) = \{-1\}.$$

В теореме 2 недостаточно задать два значения A_1 и A_2, даже если в условие теоремы ввести дополнительное требование $\deg P_1 = \deg P_2$. Это показывает следующий пример.

Пример 3. Будем пользоваться такими обозначениями:

$$A = -4 \cdot 3^{-3}(89 - 28\sqrt{10}), \quad B = -2 \cdot 3^{-9}(247 - 14\sqrt{10}),$$

$$a = \sqrt{2(7 - \sqrt{10})/3},$$

$$b = 9^{-1}\{513 + 13{,}5\sqrt{10} + i(89 + 28\sqrt{10})(1183 + 75492\sqrt{10})^{1/2}\}^{1/2};$$

какое из двух значений квадратных корней в определении b выбрано, роли не играет. Пусть

$$P(z) = A(z-a)(z+a)(z^2-6)^3,$$

$$Q(z) = B(z-a)(z+a)z^2\{z^2 - (10 + \sqrt{10})/2\}^2.$$

Очевидно, что $E_s(0, P) = E_s(0, Q) = \{-a, a\}$. Справедливы такие тождества:

$$P(z) - 1 = A(z-b)(z+b)(z-\bar{b})(z+\bar{b})\{z^2 - (10 - \sqrt{10})/2\}^2,$$

$$Q(z) - 1 = B(z-b)(z+b)(z-\bar{b})(z+\bar{b})(z^2-1)^2,$$

откуда следует, что $E_s(1, P) = E_s(1, Q) = \{b, -b, \bar{b}, -\bar{b}\}$.

В этом примере $\deg P = \deg Q = 8$. Рассматривая многочлены $P(z^k)$ и $Q(z^k)$, $k \in \mathbb{N}$, получаем многочлены с аналогичными свойствами степени $8k$.

Вопросы, связанные с примером 3, будут обсуждены в п. 4.3.

Теорема 3. *Пусть P_1 и P_2 — многочлены,* $\deg P_1 = \deg P_2 \ge 1$. *Если A_1, $A_2 \in \mathbb{C}$, $A_1 \ne A_2$, все A_j-точки P_ν или простые, или имеют четные порядки, $j = 1, 2$, $\nu = 1, 2$, и $E_s(A_j, P_1) = E_s(A_j, P_2)$, $j = 1, 2$, то $P_1 = P_2$.*

Теорема 4. *Пусть P_1 и P_2 — многочлены,* $\deg P_1 = \deg P_2 = n \le 5$. *Если $A_1, A_2 \in \mathbb{C}$, $A_1 \ne A_2$, и $E_s(A_j, P_1) = E_s(A_j, P_2)$, $j = 1, 2$, то $P_1 = P_2$.*

2. Теоремы единственности для алгебраических функций. Пусть $w = w(z)$ — алгебраическая функция, определяемая как решение уравнения $P(z, w) = 0$, где P — неприводимый многочлен, $\deg_w P = m \ge 1$, $\deg_z P = n \ge 1$. Тогда говорят, что $w(z)$ — m-значная алгебраическая функция степени n. Пусть $A \in \mathbb{C}$. Корни уравнения $P(z, A) = 0$ называются A-точками алгебраической функции $w(z)$ такого порядка, каков порядок нуля многочлена $P(z, A)$. Если $\deg_z P(z, A) = n - p$, $p \ge 1$, то считаем, что $w = w(z)$ имеет A-точку p-го порядка в $z=\infty$. Если $A=\infty$, то ∞-точками (или полюсами) называем корни уравнения $w^m P(z, 1/w)\big|_{w=0}=0$. Будем обозначать через $E(A, w)$ множество A-точек в $\overline{\mathbb{C}}$ алгебраической функции $w=w(z)$ (порядки A-точек во внимание не принимаются), через $E(A, k, w)$, $k\in\mathbb{N}$, — множество* A-точек в $\overline{\mathbb{C}}$, имеющих порядок $\le k$, $\operatorname{card} E(A, w)=\overline{n}(A, w)$, $\operatorname{card} E(A, k, w)=n(A, k, w)$, $E(A, 1, w)=E_s(A, w)$. Рассматривая дискриминант $P(z, w)$ (как многочлена от z), нетрудно убедиться [1], что

$$\sum_{A\in\overline{\mathbb{C}}} (n-\overline{n}(A, w)) \le 2m(n-1). \tag{1}$$

Будем обозначать $\max\{a, b\}=a\vee b$, $\min\{a, b\}=a\wedge b$, $a, b\in\mathbb{R}$.

Теорема 5. *Пусть* w_ν — m*-значная алгебраическая функция степени* n_ν, $\nu=1, 2$, $w_1\ne w_2$. *Пусть* $E(A_j, k_j, w_1)=E(A_j, k_j, w_2)$, $k_j\in\mathbb{N}$, $A_j\in\overline{\mathbb{C}}$, $1\le j\le q$. *Тогда*

$$\sum_{j=1}^{q}\frac{k_j}{k_j+1} \le 2m-\frac{2m}{n_1\vee n_2}+\frac{km}{k+1}\left(1+\frac{n_1\wedge n_2}{n_1\vee n_2}\right), \tag{2}$$

где $k=k_1\vee\ldots\vee k_q$. *В случае, когда* $k_1=\ldots=k_q=1$, $m\ge 2$, $n_1\wedge n_2=1$, $n_1\vee n_2=2$, *выполняется* $q\le 3m$.

Заметим, что в последнем случае, указанном в формулировке теоремы 5, неравенство (2) сводится к $q\le[3{,}5m]$.

Доказательство теоремы 5. Из (1) следует

$$\sum_{j=1}^{q}\overline{n}(A_j, w_\nu) \ge qn_\nu-2m(n_\nu-1), \quad \nu=1, 2. \tag{3}$$

Нетрудно проверить, что

$$\overline{n}(A_j, w_\nu) \le \frac{1}{k_j+1}\{k_j n(A_j, k_j, w_\nu)+n_\nu\} =$$

$$= \frac{k_j}{k_j+1} n(A_j, k_j, w_\nu)+\frac{n_\nu}{k_j+1}, \quad \nu=1, 2. \tag{4}$$

Далее, не уменьшая общность, будем считать, что $A_j\in\mathbb{C}$, все A_j-точки лежат в $\mathbb{C}$, $1\le j\le q$, $n_1\ge n_2$. Каждая точка из $E(A_j, k_j, w_\nu)$ является нулем результанта многочленов $P_1(z, w)$ и $P_2(z, w)$, рассматриваемых как многочлены от w, таких, что уравнение $P_\nu(z, w)=0$ определяет алгебраическую функцию w_ν. Результант является детерминантом порядка $2m$, в первых m строках которого стоят многочлены от z степени $\le n_1$, а в последних m строках — степени $\le n_2$. Поэтому результант имеет не более $m(n_1+n_2)$ нулей и

$$\sum_{j=1}^{q} n(A_j, k_j, w_\nu) \le m(n_1+n_2). \tag{5}$$

Из (3) – (5) следует

$$\sum_{j=1}^{q}(n_\nu-\overline{n}(A_j, w_\nu)) \le 2m(n_\nu-1),$$

* Тоже без учета порядков.

$$n_\nu \sum_{j=1}^{q} \frac{k_j}{k_j+1} \leq 2m(n_\nu - 1) + \sum_{j=1}^{q} \frac{k_j}{k_j+1} n(A_j, k_j, w_\nu) \leq$$

$$\leq 2m(n_\nu - 1) + \frac{k}{k+1} \sum_{j=1}^{q} n(A_j, k_j, w_\nu) \leq 2m(n_\nu - 1) + \frac{km}{k+1}(n_1 + n_2).$$

Полагая в этом неравенстве $\nu = 1$ и деля на n_1, получаем (2). Если возьмем $\nu = 2$, $n_1 = 2$, $n_2 = 1$, $k = 1$, то получим $q \leq 3m$.

***Следствие* 1.** *Пусть w_1 и w_2 — m-значные алгебраические функции степени n. Пусть*

$$q(1, m) = 2m + 1, \quad q(2, m) = 4m + 1, \quad q(3, m) = 6m + [-4m/3] + 1,$$

$$q(4, m) = 5m + 1, \quad q(n, m) = 6m + [-4m/n] + 1$$

при $n \geq 5$. Если A_j, $1 \leq j \leq q(n, m)$, — различные числа из $\overline{\mathbb{C}}$ и $E_s(A_j, w_1) = E_s(A_j, w_2)$ при $1 \leq j \leq q(n, m)$, то $w_1 = w_2$.

Действительно, предполагая, что $w_1 \neq w_2$, и полагая в (2) $k_1 = \ldots = k_q = k = 1$, $n_1 = n_2 = n$, $q = q(n, m)$, получаем неравенство $q(n, m) \leq 6m + [-4m/n]$, что противоречит определению $q(n, m)$.

При $m = 1$ из следствия 1 получаем теорему 1, так как $q(n, 1) = q(n)$.

***Пример* 4.** Пусть функция w_ν определяется уравнением $P_\nu(z, w) = 0$. При $n = 1$ положим $P_1(z, w) = w^m - z$, $P_2(z, w) = z w^m - 1$. Тогда $E_s(\omega_j, w_\nu) = \{1\}$, $\omega_j = \exp(i2\pi j/m)$, $0 \leq j \leq m-1$, $E_s(e^{\pi i/m}\omega_j, w_\nu) = \{-1\}$, $0 \leq j \leq m-1$, $\nu = 1, 2$. Всего имеем $2m$ точек A_j с $E_s(A_j, w_1) = E_s(A_j, w_2)$ и $w_1 \neq w_2$.

При $n = 2$ положим $P_1(z, w) = (z^2 + 4z + 1) w^m - (z^2 - 4z + 1)$, $P_2(z, w) = (z^2 - 4z + 1) w^m - (z^2 + 4z + 1)$.

Определим ω_j, как выше, $\eta_j = \omega_j \exp(\pi i/m)$, $A_{1j} = \omega_j$, $A_{2j} = \eta_j$, $A_{3j} = \eta_j / 3^{1/m}$, $A_{4j} = 3^{1/m}\eta_j$, $0 \leq j \leq m-1$. Тогда $E_s(A_{1j}, w_\nu) = \{0, \infty\}$, $E_s(A_{2j}, w_\nu) = \{-i, i\}$, $E_s(A_{3j}, w_\nu) = E_s(A_{4j}, w_\nu) = \varnothing$, $\nu = 1, 2$. Таким образом, если в следствии 1 при $n = 2$ возьмем не $4m + 1$ точек A_j, а $4m$, то утверждение, что $w_1 = w_2$, вообще говоря, неверно.

При $n = 4$ положим

$$P_1(z, w) = (3z^4 - 2\sqrt{3}iz^2 + 3) w^m + (z^4 - 6\sqrt{3}iz^2 + 1),$$

$$P_2(z, w) = \{(3 + i\sqrt{3})z^4 - (6 + i\,10\sqrt{3})z^2 + 3 + i\sqrt{3}\} w^m -$$

$$- \{(-5 + i\sqrt{3})z^4 - 6(1 - i\sqrt{3}) z^2 - 5 + i\sqrt{3}\}, \quad A_{1j} = \omega_j, \quad A_{2j} = \eta_j,$$

$$A_{3j} = (-1 + 2i\sqrt{3}/3)^{1/m}\omega_j, \quad A_{4j} = (-1 - 2i\sqrt{3}/3)^{1/m}\omega_j$$

(в определении A_{3j} и A_{4j} берем одно из значений корня m-й степени, безразлично какое), $A_{5j} = (1/3)^{1/m}\eta_j$. Тогда $E_s(A_{\mathrm{J}}, \omega_\nu) = \{\pm\sqrt{i(\sqrt{3} \pm 2)}\}$, $E_s(A_{2j}, w_\nu) = \{\pm\sqrt{-i(\sqrt{3} \pm 2)}\}$, $E_s(A_{kj}, w_\nu) = \varnothing$, $k = 3, 4, 5$, $0 \leq j \leq m-1$, $\nu = 1, 2$. Следовательно, $5m$ точек A_j в случае $n = 4$ недостаточно для утверждения, что $w_1 = w_2$ в условиях следствия 1.

То, что величина $q(3, 1) = 5$ в следствии 1 не может быть уменьшена, следует из примера 1 $(n = 3)$. Из этого же примера 1 следует неулучшаемость выбора $q(2k, 1) = 6$, $k \geq 2$. Построить примеры, показывающие неулучшаемость $q(3, m)$ при $m \geq 2$, $q(n, m)$ при $n \geq 5$, $m \geq 2$ и $q(2k+1, 1)$, $k \geq 2$, нам не удалось.

В примере 4 следует установить неприводимость многочленов P_1 и P_2. Для этого можно использовать следующее замечание.

Замечание. Многочлен $P(z, w) = a(z)w^m + b(z)$, $m \in \mathbb{N}$, a, b — взаимно простые многочлены такие, что для некоторого $z_0 \neq \infty$, $a(z_0) = 0$, $a'(z_0) \neq 0$, $b(z_0) \neq 0$, неприводим. Действительно, из уравнения $P(z, w) = 0$ определяется функция $w(z) = \left(c(z - z_0)^{-1} + O(1)\right)^{1/m}$ в некоторой окрестности $z = z_0$, $c = -b(z_0)/a'(z_0)$. Если при достаточно малом $r > 0$ будем аналитически продолжать элемент функции $w(z_0 + re^{i\varphi})$ по кривой $z = z_0 + re^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi m$, то кривая $w = w(z_0 + re^{i\varphi})$, $0 \leq \psi \leq 2\pi\, m$, будет замкнутой жордановой кривой. Если бы многочлен $P(z, w)$ был приводим, то имели бы $w(z_0 + r) = w(z_0 + re^{i2\pi m_1})$ при некотором m_1, $0 < m_1 < m$.

Будем называть алгебраическую функцию целой, если она не имеет полюсов в $\mathbb{C}$. Другими словами, если алгебраическая функция определяется уравнением $P(z, w) = 0$, $\deg_z P = n$, $\deg_w P = m$, то $P(z, w) = cw^m + p_{m-1}(z)w^{m-1} + \ldots + p_0(z)$, где $c \equiv \text{const} \neq 0$. Не уменьшая общность, можно считать, что $c = 1$. Целая алгебраическая функция имеет в $z = \infty$ полюс порядка n.

Теорема 6. *Пусть w_ν — m-значная целая алгебраическая функция степени n_ν, $\nu = 1, 2$, $w_1 \neq w_2$. Пусть $E(A_j, k_j, w_1) = E(A_j, k_j, w_2)$, $1 \leq j \leq q$, $A_j \in \mathbb{C}$. Тогда*

$$\sum_{j=1}^{q} \frac{k_j}{k_j + 1} \leq 2m - 1 - \frac{2m-1}{n_1 \vee n_2} + \frac{k}{k+1}\left(m + (m-1)\frac{n_1 \wedge n_2}{n_1 \vee n_2}\right), \tag{6}$$

где $k = k_1 \vee \ldots \vee k_q$. В случае, когда $k_1 = \ldots = k_q = 1$, $m \geq 2$, $n_1 \wedge n_2 = 1$, $n_1 \vee n_2 = 2$, выполняется $q \leq 3m - 1$.

Доказательство теоремы 6 повторяет доказательство теоремы 5 с тем отличием, что, учитывая $\overline{n}(\infty, w) = 1$, вместо (1) используем

$$\sum_{A \in \mathbb{C}} (n - \overline{n}(A, w)) \leq (2m-1)(n-1), \tag{1'}$$

поэтому (3) заменяется на

$$\sum_{j=1}^{q} \overline{n}(A_j, w_\nu) \geq q n_\nu - (2m-1)(n_\nu - 1). \tag{3'}$$

Учитывая, что в результанте многочленов P_1 и P_2, о котором шла речь в доказательстве теоремы 5, в случае целых алгебраических функций в первом столбце детерминанта в первой и $(m+1)$-й строках стоит 1, а в остальных — 0, вместо (5) получаем

$$\sum_{j=1}^{q} n(A_j, k_j, w_\nu) \leq m(n_1 + n_2) - n_1 \wedge n_2. \tag{5'}$$

Других отличий в доказательстве нет.

***Следствие* 2.** *Пусть* w_1 *и* w_2 — m*-значные целые алгебраические функции степени* n; $q_1(n, m) = 6m - 2 + [-2(2m-1)/n]$. *Если* A_j, $1 \le j \le q_1(n, m)$ — *различные числа из* $\mathbb{C}$ *и* $E_s(A_j, w_1) = E_s(A_j, w_2)$ *при* $1 \le j \le q_1(n, m)$, *то* $w_1 = w_2$.

При $m = 1$ и $k_1 = \ldots = k_q = 1$ из теоремы 6 вытекает справедливость теоремы 2. Действительно, в этом случае неравенство (6) равносильно такому: $q \le 3 - 2/(n_1 \vee n_2)$, т.е. $q \le 2$. Если возьмем точки A_1, A_2, A_3, то полученное противоречие доказывает, что $w_1 = w_2$. Вопрос о точности следствия 2 при $m = 1$ полностью не решен (см. пример 3). При $m \ge 2$ мы не имеем примеров, подтверждающих точность выражения для $q_1(n, m)$, за исключением случая $n = 1$. Заметим, что $q_1(1, m) = 2m$, $q_1(2, m) = 4m - 1$.

***Пример* 5.** Пусть $m \ge 2$, $P_1(z, w) = w^m + z w^{m-1} - (2^{m-1} z + 1)$, $P_2(z, w) = w^m + + 2z w^{m-1} - (2^m z + 1)$; $w_\nu(z)$ — алгебраическая функция, определяемая уравнением $P_\nu(z, w) = 0$; $\omega_j = \exp(i\, 2\pi j/m)$, $\sigma_j = \exp(i\, 2\pi j/(m-1))$, $A_k = \omega_k$, $0 \le k \le m-1$, $A_k = 2\sigma_{k-m}$, $m \le k \le 2m-2$. Тогда $E_s(A_k, w_\nu) = \{0\}$, $0 \le k \le m-1$, $E_s(A_k, w_\nu) = = \{\infty\}$, $m \le k \le 2m-2$, $\nu = 1, 2$. Неприводимость многочленов P_1 и P_2 очевидна. Таким образом, значение $q_1(1, m) = 2m$ в следствии 2 нельзя уменьшить.

***Доказательство теоремы* 3.** Не уменьшая общность, можно считать, что $A_1 = 0$, $A_2 = 1$. Предположим, что $P_1 \ne P_2$. Пусть $P_1(z) = \omega_1(z) P_{11}(z)$, $P_2(z) = = \omega_1(z) P_{12}(z)$, $P_1(z) - 1 = \omega_2(z) P_{21}(z)$, $P_2(z) - 1 = \omega_2(z) P_{22}(z)$, где ω_1 и ω_2 — многочлены, все нули которых простые, и их множества совпадают соответственно с $E_s(0, P_j)$ и $E_s(1, P_j)$, а P_{kl}, $1 \le k, l \le 2$, — многочлены, все нули которых имеют четные порядки. Тогда

$$\omega_1 P_{11} - \omega_2 P_{21} = 1, \tag{7}$$

$$\omega_1 P_{12} - \omega_2 P_{22} = 1. \tag{8}$$

Обозначим $A = P_{12} - P_{11}$, $B = P_{22} - P_{21}$. Вычитая (7) из (8), получаем

$$\omega_1 A - \omega_2 B = 0. \tag{9}$$

Следовательно, A делится на ω_2, а B — на ω_1, поскольку многочлены ω_1 и ω_2 взаимно простые. Пусть $A = \omega_2 A_1$, $B = \omega_1 B_1$. Из (9) следует $A_1 = B_1 = K$. Очевидно, $K \not\equiv 0$. Пусть $\deg P_1 = \deg P_2 = n$. Легко получаем $\deg K + + \deg \omega_2 = \deg A \le \deg P_{12} = \deg P_{11} = n - \deg \omega_1$. Таким образом, $\deg K \le n - - \deg \omega_1 - \deg \omega_2$. Подставляя $\omega_1 = B/K$ и $\omega_2 = A/K$ в (7), имеем

$$K = P_{11} P_{22} - P_{12} P_{21}. \tag{10}$$

Очевидно, $\deg(P_{11} P_{22}) = \deg(P_{12} P_{21}) = 2n - \deg \omega_1 - \deg \omega_2$. Так как все нули многочленов $P_{11} P_{22}$ и $P_{12} P_{21}$ имеют четные порядки, то существуют многочлены Q_1 и Q_2 такие, что $P_{11} P_{22} = Q_1^2$, $P_{12} P_{21} = Q_2^2$. Тогда $K = (Q_1 + Q_2) \times \times (Q_1 - Q_2)$. Так как $\deg Q_1 = \deg Q_2 = n - (\deg \omega_1 + \deg \omega_2)/2$, то $\deg K \ge n - - (\deg \omega_1 + \deg \omega_2)/2$. Сравнивая оценки $\deg K$ сверху и снизу, получаем $\deg \omega_1 = \deg \omega_2 = 0$, т.е. $E_s(0, P_1) = E_s(1, P_1) = \varnothing$. Кратностью нуля называется его порядок, уменьшенный на единицу. Так как P_1 не имеет простых нулей, то кратность каждого нуля не меньше половины его порядка. Поэтому суммарная кратность всех нулей P_1 не меньше $n/2$ и суммарная кратность всех нулей $P_2 - 1$ тоже не меньше $n/2$. Но тогда сумма порядков всех нулей производной P_1' не меньше n, что невозможно, так как $\deg P_1' = n - 1$.

Доказательство теоремы 4. Легко видеть, что $\operatorname{card} E_s(A, P) + \operatorname{card} E_s(B, P) \geq 2$, $A \neq B$, где P — некоторый многочлен, $\deg P = n$. То, что эта сумма не может быть равна нулю, показано при доказательстве теоремы 3. Если же эта сумма равна 1, то сумма кратностей всех нулей $(P - A)(P - B)$ не меньше $n - 1/2$, т. е. не меньше n, и снова приходим к противоречию.

Не уменьшая общность, можно считать, что $A_1 = 0$, $A_2 = 1$. Пусть $\operatorname{card} E_s(0, P) = n$. Тогда множества $E_s(0,P)$ и $E_s(1,P)$ однозначно определяют P. Действительно, пусть $E_s(0,P) = \{z_1, \ldots, z_n\}$. Тогда $P(z) = A(z - z_1) \ldots (z - z_n)$, $A \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Если $E_s(1,P) \neq \varnothing$ и $a \in E_s(1,P)$, то коэффициент A определяется из равенства $P(a) = 1$. Если $E_s(1,P) = \varnothing$, то предположим, что $E_s(1, BP) = \varnothing$, где $B \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$. Но тогда $E_s(1/B, P) = \varnothing$ и $\operatorname{card} E_s(1, P) + \operatorname{card} E_s(1/B, P) = 0$, что невозможно. Заметим, что для любого $A \in \mathbb{C}$ не может быть $\operatorname{card} E_s(A, P) = n - 1$ по определению $E_s(A, P)$.

Очевидно, мы не уменьшим общность, если будем считать, что $\operatorname{card} E_s(1, P) \leq \operatorname{card} E_s(0,P) \leq n - 2$, где P — многочлен, равный P_1 или P_2.

При $n = 1$ или $n = 2$ утверждение теоремы 4 тривиально, при $n = 3$ оно следует из теоремы 3.

Пусть $n = 4$. В случае $\operatorname{card} E_s(0,P) = \operatorname{card} E_s(1,P) = 2$ единственность следует из теоремы 3. Пусть $\operatorname{card} E_s(0,P) = 2$, $\operatorname{card} E_s(1,P) = 1$. Не уменьшая общность, можно считать, что $E_s(0,P) = \{-1, 1\}$. Тогда $P(z) = A(z^2 - 1) \times (z - a)^2$, где $A \neq 0$, $a \neq \pm 1$. С другой стороны, $P(z) - 1 = B(z - q)(z - b)^3$, $B \neq 0$, $b \neq q$, $E_s(1, P) = \{q\}$, $q \neq \pm 1$. Должно выполняться тождество $A(z^2 - 1) \times (z - a)^2 - B(z - q)(z - b)^3 = 1$. Отсюда сразу видно, что $B = A$. Приравнивая коэффициенты при равных степенях z, получаем

$$2a = q + 3b, \tag{11_1}$$

$$a^2 - 1 = 3qb + 3b^2, \tag{11_2}$$

$$-2a = 3qb^2 + b^3, \tag{11_3}$$

$$-A(a^2 + qb^3) = 1. \tag{11_4}$$

Нам требуется лишь показать, что если при заданном q система (11_1) – (11_4) имеет решение, то числа a и A определяются единственным образом*. Из (11_1) и (11_2) получаем

$$b^2 = -2qb + (q^2 - 4)/3. \tag{12}$$

Из (11_1) и (11_3) следует $(b^2)b + 3q(b^2) + 3b + q = 0$. Подставляя в это уравнение вместо взятого в скобки b^2 выражение в правой части (12), получаем $-2qb^2 + b(q^2 - 4)/3 - 6q^2 b + q(q^2 - 4) + 3b + q = 0$. Снова воспользовавшись (12), получаем для b линейное уравнение $5(1 - q^2)b = q(2q^2 - 11)$, откуда единственным образом определяется b, затем по (11_1) — a и по (11_4) — A.

* На самом деле система имеет решение лишь при $q = \pm i5/\sqrt{2}$, но мы это не используем.

Если $\operatorname{card} E_s(0,P)=2$, $\operatorname{card} E_s(1,P)=0$, то единственность получаем на основе теоремы 3.

Наконец, если $\operatorname{card} E_s(0,P)=\operatorname{card} E_s(1,P)=1$, то P и $P-1$ имеют, помимо простых нулей, по одному нулю 3-го порядка. Сумма кратностей этих нулей равна 4, что невозможно.

Пусть теперь $n=5$. При: а) $\operatorname{card} E_s(0,P)=\operatorname{card} E_s(1,P)=3$; б) $\operatorname{card} E_s(0,P)=3$, $\operatorname{card} E_s(1,P)=1$; в) $\operatorname{card} E_s(0,P)=\operatorname{card} E_s(1,P)=1$; единственность следует из теоремы 3.

Рассмотрим случай, когда $\operatorname{card} E_s(0,P)=3$, $\operatorname{card} E_s(1,P)=2$. Не уменьшая общность, можно считать, что $E_s(1,P)=\{1,-1\}$. Тогда $P(z)=A(z^3+p_2z^2+p_1z+p_0)(z-a)^2$, где корни многочлена 3-й степени простые и совпадают с множеством $E_s(0,P)$; таким образом, коэффициенты p_2, p_1, p_0 заданы. Кроме того, должно выполняться $A\{(z^3+p_2z^2+p_1z+p_0)(z-a)^2-(z^2-1)\ (z-b)^3\}=1$. Требуется показать, что по заданным p_2, p_1, p_0 однозначно определяются A и a.

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z, получаем такую систему:

$$p_2-2a=-3b, \tag{13_1}$$

$$p_1-2ap_2+a^2=3b^2-1, \tag{13_2}$$

$$p_0-2ap_1+p_2a^2=3b-b^3, \tag{13_3}$$

$$-2ap_0+a^2p_1=-3b^2, \tag{13_4}$$

$$A(p_0a^2-b^3)=1. \tag{13_5}$$

Исключая из (13_1) и (13_2) b, получаем $a^2+2ap_2+p_2^2-3(p_1+1)=0$. Если $p_1=-1$, то $a=-p_2$, и из (13_1) получаем $b=-p_2$, но это невозможно, так как $a\neq b$. Поэтому можем считать, что $p_1\neq-1$. Получаем, используя (13_1), что

$$a=-p_2\pm\sqrt{3(p_1+1)},\qquad b=-p_2\pm(2/3)\sqrt{3(p_1+1)}, \tag{14}$$

где взято одно фиксированное значение $\sqrt{3(p_1+1)}$. Покажем, что только одно значение a (а следовательно, и одно значение b) может удовлетворять уравнению (13_3). Предположим противное. Если в (14) взят $+\ (-)$, то соответствующие значения a и b обозначим через a_1, b_1 (a_2, b_2). Тогда $a_1-a_2=2\sqrt{3(p_1+1)}$, $b_1-b_2=(2/3)(a_1-a_2)$. Подставим в (13_3) сначала $a=a_1$, $b=b_1$, а затем $a=a_2$, $b=b_2$, из первого полученного равенства вычтем второе и сократим на a_1-a_2. Получим

$$-2p_1+p_2(a_1+a_2)=2-(2/3)\{(b_1+b_2)^2-b_1b_2\},$$

$$-2p_1-2p_2^2=2-(2/3)\{4p_2^2-p_2^2+(4/3)(p_1+1)\},$$

последнее же равенство равносильно $p_1=-1$, что противоречит условию. Таким образом, a и b определяются однозначно, а по (13_5) однозначно определяется A.

Пусть теперь $\operatorname{card} E_s(0,P)=3$, $\operatorname{card} E_s(1,P)=0$. Тогда P имеет один нуль второго порядка и 1-точки 2-го и 3-го порядков. Если бы многочлен P имел 1-

точку 5-го порядка, то P' имел бы 5 нулей, что невозможно. Сумма кратностей нулей $P(P-1)$ равна $1+1+2=4$, следовательно, риманова поверхность S, на которую P отображает $\overline{\mathbb{C}}$, имеет алгебраические точки ветвления только над 0, 1 и ∞. Изобразим риманову поверхность S с помощью комплекса отрезков (см. [2], гл. 7, § 4); здесь и всюду, где будут встречаться комплексы отрезков, за базисную кривую будем брать действительную ось. Легко убедиться, что поверхность S изображается комплексом отрезков на рис. 1 и только им. Из комплекса отрезков видно, что он имеет ось симметрии. Пусть $E_s(0,P)=\{z_1,z_2,z_3\}$. Предположим сначала, что точки z_1, z_2, z_3 не являются вершинами некоторого равностороннего треугольника. Тогда если P переводит точку z_j в точку на S, отмеченную на комплексе отрезков 0_j, $j=1,2$, то точка z_3 лежит на прямой, равноудаленной от z_1 и z_2 так же, как 1-точки многочлена P и его нуль второго порядка. Не уменьшая общность, можно считать, что $\{z_1, z_2,\}=\{-1,1\}$. Тогда $z_3=ip$, $p\in\mathbb{R}$. Обозначим через a нуль P второго порядка, через b — 1-точку P 3-го порядка, через c — 1-точку P 2-го порядка. Заданием точек z_1 и z_2 и их образов на S многочлен P определяется однозначно. Возможны два варианта: 1) $z_1=-1$, $z_2=1$; 2) $z_1=1$, $z_2=-1$. Пусть P_1 и P_2 — соответствующие этим вариантам многочлены, которые определяются однозначно. Очевидно, $P_2(-z)=P_1(z)$. Тогда $P_2(-z_3)=P_1(z_3)=0$ и необходимо $-z_3=z_3$, т. е. $z_3=0$. Если $z_3\neq 0$, то условиям теоремы 4 удовлетворяет лишь один из двух многочленов, т. е. многочлен P определяется однозначно. Предположим теперь, что $z_3=0$. Тогда $P(z)=A(z^2-1)z(z-a)^2$, $A\neq 0$, и выполяется

$$A\left\{(z^2-1)z(z-a)^2-(z-b)^3(z-c)^2\right\}=1. \tag{15}$$

Приравнивая коэффициенты при равных степенях z, получаем систему

$$2a=3b+2c, \tag{16_1}$$

$$a^2-1=3b^2+6bc+c^2, \tag{16_2}$$

$$2a=-b^3-6cb^2-3bc^2, \tag{16_3}$$

$$-a^2=2b^3c+3b^2c^2, \tag{16_4}$$

$$A\,b^3c^2=1. \tag{16_5}$$

Из (16_5) следует $b\neq 0$. Подставляя значение a из (16_1) в (16_2), получаем $c=-(3b^2+4)/12b$. Исключая a из (16_1) и (16_3), имеем $3b+2c+b^3+6cb^2+3bc^2=0$, откуда, подставляя значение c, находим $15b^4-48b^2+16=0$. Последнее же равенство невозможно, так как $\operatorname{Re} b=0$. Таким образом, необходимо $z_3\neq 0$.

Если z_1, z_2, z_3 яляются вершинами равностороннего треугольника, то предыдущие рассуждения не применимы. Покажем, что этот случай невозможен. Не уменьшая общность, можно считать, что z_1, z_2, z_3 являются нулями многочлена z^3+1. Тогда вместо (15) получаем тождество

$$A\left\{(z^3+1)(z-a)^2-(z-b)^3(z-c)^2\right\}=1,$$

откуда

$$2a=3b+2c, \tag{17_1}$$

$$a^2 = 3b^2 + 6bc + c^2, \tag{17_2}$$

$$-1 = 3bc^2 + 6b^2c + b^3, \tag{17_3}$$

$$-2a = 3b^2c^2 + 2b^3c. \tag{17_4}$$

Исключая из (17_1) и (17_2) a, получаем $-b^2 = 4bc$. Из (17_3) следует $b \neq 0$, поэтому $c = -b/4$. Из (17_1) $a = 5b/4$. Подставляя эти значения a и c в (17_3) и (17_4), получаем $b^3 = 16/5$ и $b^3 = 8$, что невозможно.

Пусть теперь $\operatorname{card} E_s(0,P) = \operatorname{card} E_s(1,P) = 2$. Не уменьшая общность, считаем $E_s(1,P) = \{-1, 1\}$ и получаем тождество

$$A\left\{(z^2 - pz + q)(z-a)^3 - (z^2-1)(z-b)^3\right\} = 1,$$

где коэффициенты p и q заданы. Приравнивая коэффициенты при z^4 и z^3, имеем $3a + p = 3b$ и $3a^2 + 3ap + q = 3b^2 - 1$. Исключая отсюда b и учитывая, что $p \neq 0$, так как $a \neq b$, находим $a = p/3 - (q+1)/p$, а затем $b = 2p/3 - (q+1)/p$. Число A определяем из $A\,(a^3q + b^3) = -1$. Таким образом, если существует многочлен P с заданными $E_s(0,P)$ и $E_s(1,P)$ (можно показать, что при некоторых p и q он существует), то только один.

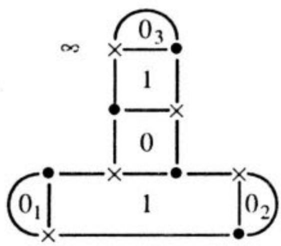

Рис. 1.

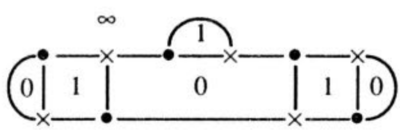

Рис. 2.

Пусть теперь $\operatorname{card} E_s(0,P) = 2$, $\operatorname{card} E_s(1,P) = 1$. Многочлен P имеет один нуль 3-го порядка и или одну 1-точку 4-го порядка, или две 1-точки 2-го порядка. Первый случай исключается, так как тогда сумма кратностей нулей и 1-точек P равнялась бы $2 + 3 = 5$. Во втором случае такая сумма равняется 4 и других кратных A-точек за исключением $A = 0, 1$ нет. Можем считать, что $E_s(0,P) = \{-1, 1\}$, $E_s(1,P) = \{p\}$. Пусть P отображает $\overline{\mathbb{C}}$ на риманову поверхность S. Легко видеть, что комплекс отрезков для S может быть лишь таким, как на рис. 2. Из соображений симметрии заключаем, что $\operatorname{Re} p = 0$, $\operatorname{Re} a = 0$, где a — нуль P 3-го порядка, а 1-точки 2-го порядка b и c симметричны относительно мнимой оси. Рассуждая так же, как в случае $\operatorname{card} E_s(0,P) = 3$, $\operatorname{card} E_s(1,P) = 0$, устанавливаем единственность многочлена P, если $p \neq 0$. Но $p = 0$ невозможно. Действительно, при $p = 0$ получаем тождество $A\left\{(z^2 - 1)(z-a)^3 - z(z^2 - \beta z + \gamma)^2\right\} = 1$. Отсюда $2\beta = 3a$, $\beta^2 + 2\gamma = 3a^2 - 1$, $2\beta\gamma = a^3 - 3a$, $\gamma^2 = -3a^2$. Исключая из первых двух равенств β, получаем $\gamma = 3a^2/8 - 1/2$, а затем из третьего равенства $a^3 = -12a$. Так как $a \neq 0$, то $a^2 = -12$, откуда $\gamma = -5$. Но это не согласуется с $\gamma^2 = -3a^2$.

Рассмотрим последний случай, когда $\operatorname{card} E_s(0,P) = 2$, $\operatorname{card} E_s(1,P) = 0$.

Тогда P имеет один нуль 3-го порядка и или одну 1-точку 5-го порядка, или две 1-точки 2-го и 3-го порядков. Сумма кратностей нулей и 1-точек ≥ 5, что невозможно.

3. Теоремы единственности для алгеброидных функций. Будем считать известными основные определения, теоремы и стандартные обозначения неванлинновской теории для алгеброидных функций [3 – 5]. Пусть $w = w(z)$ — m-значная алгеброидная функция. Множества $E(A, w)$, $E(A, k, w)$, $1 \leq k \leq \infty$, определяются так же, как для алгебраических функций, но, естественно, учитываются A-точки в $\mathbb{C}$. Пусть $D(r) = \{z : |z| \leq r\}$. Тогда $\overline{n}(r, A, w) = \operatorname{card}(E(A, w) \cap D(r))$, $n(r, A, k, w) = \operatorname{card}(E(A, k, w) \cap D(r))$. По $\overline{n}(r, A, w)$ и $n(r, A, k, w)$ стандартным способом строятся функции $\overline{N}(r, A, w)$ и $N(r, A, k, w)$.

Теорема 7. *Пусть w_1 и w_2 — m-значные алгеброидные функции, $w_1 \neq w_2$ и $E(A_j, k_j, w_1) = E(A_j, k_j, w_2)$, $k_j \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $A_j \in \overline{\mathbb{C}}$, $1 \leq j \leq q$, $k = \max\{k_j : 1 \leq j \leq q\}$. Тогда*

$$\sum_{j=1}^{q} \frac{k_j}{k_j + 1} \leq 2m\,\frac{2k+1}{k+1}. \tag{18}$$

Доказательство. Так же, как (4), получаем

$$\overline{n}(r, A_j, w_\nu) \leq \frac{k_j}{k_j + 1}\, n(r, A_j, k_j, w_\nu) + \frac{1}{k_j + 1}\, n(r, A_j, w_\nu).$$

$1 \leq j \leq q$, $\nu = 1, 2$. Такое же соотношение получаем, если n заменить на N, т. е.

$$\overline{N}(r, A_j, w_\nu) \leq \frac{k_j}{k_j + 1}\, N(r, A_j, k_j, w_\nu) + \frac{1}{k_j + 1}\, N(r, A_j, w_\nu),$$

$1 \leq j \leq q$, $\nu = 1, 2$. Из второй основной теоремы для алгеброидных функций и $N(r, A_j, w_\nu) \leq T(r, w_\nu) + O(1)$, $r \to \infty$, при $r \to \infty$, $r \notin E$, $\operatorname{mes} E < \infty$, имеем

$$(q - 2m + o(1))\, T(r, w_\nu) \leq \sum_{j=1}^{q} \overline{N}(r, A_j, w_\nu) \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{q} \frac{k_j}{k_j + 1}\, N(r, A_j, k_j, w_\nu) + \sum_{j=1}^{q} \frac{1}{k_j + 1}\, N(r, A_j, w_\nu) \leq$$

$$\leq \frac{k}{k+1} \sum_{j=1}^{q} N(r, A_j, k_j, w_\nu) + T(r, w_\nu) \sum_{j=1}^{q} \frac{1}{k_j + 1} + O(1),$$

откуда

$$\left(\sum_{j=1}^{q} \frac{k_j}{k_j + 1}\right) T(r, w_\nu) \leq (2m + o(1))\, T(r, w_\nu) + \frac{k}{k+1} \sum_{j=1}^{q} N(r, A_j, k_j, w_\nu), \quad \nu = 1, 2. \tag{19}$$

Из условия теоремы следует (см. [5], неравенство (8))

$$\sum_{j=1}^{q} N(r, A_j, k_j, w_1) = \sum_{j=1}^{q} N(r, A_j, k_j, w_2) \le$$

$$\le m\{T(r, w_1) + T(r, w_2)\} + O(1), \quad r \to \infty. \tag{20}$$

Складывая неравенства (19) при $\nu = 1$ и $\nu = 2$ и используя (20), получаем

$$\left(\sum_{j=1}^{q} \frac{k_j}{k_j + 1}\right)(T(r, w_1) + T(r, w_2)) \le (2m + o(1))(T(r, w_1) + T(r, w_2)) +$$

$$+ \frac{2mk}{k+1}(T(r, w_1) + T(r, w_2)), \quad r \to \infty,$$

откуда следует (18).

Теорема 7 для $m = 1$ доказана в [6].

Следствие 4. *Пусть w_1 и w_2 — m-значные алгеброидные функции, $k \in \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $q_k(m) = 4m + 1 + [2m/k]$. Если $E(A_j, k, w_1) = E(A_j, k, w_2)$, $A_j \in \overline{\mathbb{C}}$, $1 \le j \le q_k(m)$, то $w_1 = w_2$.*

Действительно, при $k_1 = \ldots = k_q = k$ неравенство (18) приобретает вид $q \le \le 4m + [2m/k]$.

При $m = 1$ и $k = \infty$ следствие 4 — классическая теорема Р. Неванлинны (см. [7], §2.7), а при $m = 1$ и $k \in \mathbb{N}$ оно было доказано Сюн Цзинлаем [8] (в более слабой форме) и Ян Лэ [9].

Точность $q_k(1)$ при всех $k \in \mathbb{N}$ показал Уэда [10]. Пусть f_{1k} и f_{2k} — мероморфные функции из примеров Уэды, $k = 1, 2$. Можно указать такую дробно-линейную функцию L, что алгеброидные функции, определяемые из уравнения $w^m - L(f_{\nu k}(z)) = 0$, $\nu = 1, 2$, $m \ge 2$, показывают, что значения $q_1(m) = 6m + 1$ и $q_2(m) = 5m + 1$ не могут быть уточнены. Если $k > 2m$, то $q_k(m) = 4m + 1$, а то, что в качестве $q_k(m)$ в следствии 4 нельзя использовать $4m$, показано в [5, с. 260]. Остается невыясненной точность $q_k(m)$ при $3 \le k \le 2m$.

4. Дополнения. 1. В [1] в теореме 1 доказано, что для того чтобы однозначно определить m-значную алгебраическую функцию, достаточно задать $2m$ мультимножеств (т. е. множеств A_j-точек, в которых элементы повторяются с учетом порядков A_j-точек) $ME(A_j)$, $1 \le j \le 2m$, и одно множество $E(A_{2m+1})$. В [1] (примеры 1 и 2) показано, что если не задавать множество $E(A_{2m+1})$, то это утверждение не всегда верно, однако лишь для четных m. Приведем соответствующий пример, справедливый для любых $m \ge 2$ (для $m = 1$ это тривиально).

Пример 6. Пример с $n = 1$ — это пример 5 (см. выше), в котором надо учесть, что $ME(\infty, w_\nu) = \{\infty\}$, $\nu = 1, 2$. Пусть $n \ge 2$, многочлены P_1 и P_2 такие, как в примере 5, $Q_\nu(z, w) = P_\nu(z^n, w)$, $\nu = 1, 2$, алгебраическая функция w_ν определяется уравнением $Q_\nu(z, w) = 0$. Числа A_k, $0 \le k \le 2m - 2$, определяются так же, как в примере 5. Тогда

$$ME(A_k, w_1) = ME(A_k, w_2) = \{0, \ldots, 0\}, \quad 0 \le k \le m - 1,$$

$$ME(A_k, w_1) = ME(A_k, w_2) = \{\infty, \ldots, \infty\}, \quad m \le k \le 2m - 2,$$

$$ME(\infty, w_1) = ME(\infty, w_2) = \{\infty, \ldots, \infty\}$$

(каждое из указанных мультимножеств состоит из n одинаковых элементов). Неприводимость многочленов $Q_\nu(z, w)$ можно доказать, использовав замечание после примера 4, в котором меняем роли z и w. Заметим, что в примере 6 обе алгебраические функции w_1 и w_2 целые, поэтому этот пример показывает также неулучшаемость первого утверждения теоремы 2 из [1].

2. В [1] доказано следующее утверждение (см. теорему 1 из [1]). Пусть $E(A, w)$ — множество A-точек алгебраической функции w (порядки A-точек не учитываются), $L(m, n) = 4m + 1 + [-2m/n]$. Если w_1 и w_2 — две m-значные алгебраические функции степени n, A_j, $1 \le j \le L(m, n)$, — различные числа из $\overline{\mathbb{C}}$ и $E(A_j, w_1) = E(A_j, w_2)$, $1 \le j \le L(m, n)$, то $w_1 = w_2$.

При $n = 1$ имеем $L(m, 1) = 2m + 1$, что является точной оценкой. Хотя $L(m, 2) = 3m + 1$, в этом утверждении достаточно требовать лишь $E(A_j, w_1) = E(A_j, w_2)$, $1 \le j \le 2m + 1$, чтобы сделать вывод, что $w_1 = w_2$. Это отмечено в [1] (пример 2), а пример 6 из настоящей статьи показывает, что эта оценка числа совпадающих множеств неулучшаема. Покажем, что и при $n = 3$ значение $L(m, 3)$ можно заменить на $3m + 1$, которое меньше $L(m, 3)$ при $m \ge 3$.

Теорема 8. *Пусть алгебраическая функция w_ν определяется уравнением $P_\nu(z, w) = 0$, $\deg_w P_\nu = m$, $\deg_z P_\nu = 3$, $\nu = 1, 2$. Пусть $A_1, \ldots, A_{3m+1} \in \overline{\mathbb{C}}$ — различные комплексные числа. Если $E(A_j, w_1) = E(A_j, w_2)$, $1 \le j \le 3m + 1$, то $w_1 = w_2$.*

Доказательство. Не уменьшая общность, можно считать, что все A_j и все A_j-точки конечны. Предположим, что $w_1 \ne w_2$. Тогда результант $R(P_1, P_2)$ многочленов P_1 и P_2, рассматриваемых как многочлены от w, является многочленом от z степени не выше $6m$, не равным тождественно нулю. Обозначим через N_1, N_2, N_3 количество множеств $E(A_j, w_1)$, состоящих соответственно из одной, двух или трех точек, $N_1 + N_2 + N_3 = 3m + 1$. Если $z_0 \in E(A_j, w_1) = E(A_j, w_2)$, то z_0 является нулем результанта $R(P_1, P_2)$. Но если дополнительно известно, что $E(A_j, w_1)$ (а значит, и $E(A_j, w_2)$) состоит из одной точки то z_0 является нулем 3-го порядка для $P_1(z, A_j)$ и $P_2(z, A_j)$ и, как нетрудно проверить, используя представление результанта в виде симметрической функции ветвей w_1 и w_2, в точке z_0 результант имеет нуль не ниже 3-го порядка Поэтому число разных нулей результанта (без учета порядков) не превышает $6m - 2N_1$. Отсюда $N_1 + 2N_2 + 3N_3 \le 6m - 2N_1$, $3(N_1 + N_2 + N_3) \le 6m + N_2$. Так как $N_1 + N_2 + N_3 = 3m + 1$, то получаем $3(3m + 1) \le 6m + (3m + 1)$, что невозможно.

Следующий пример показывает, что теорема 8 неверна, если брать только $3m$ точек A_j.

Пример 7. Пусть

$$P_1(z, w) = \{20z^3 - (63 + 5\sqrt{3}i)z^2 + 16(3 + i\sqrt{3})z - 8(1 + i\sqrt{3})\}w^m -$$

$$- \{20z^3 - (207 + 5\sqrt{3}i)z^2 + 64(3 + i\sqrt{3})z - 32(1 + i\sqrt{3})\},$$

$$P_2(z, w) = \{80z^3 - 40(3 + i\sqrt{3})z^2 + (30 + 62\sqrt{3}i)z + 16(1 - i\sqrt{3})\}w^m -$$

$$- \{80z^3 - 40(3 + i\sqrt{3})z^2 + (30 + 158\sqrt{3}i)z + 64(1 - i\sqrt{3})\},$$

$$\omega_j = \exp(i\,2\pi j/m).$$

Тогда $E(\omega_j, P_\nu) = \{\infty, (3 + i\sqrt{3})/6\}$, $E(\sqrt[m]{4}\,\omega_j, P_\nu) = \{0, (3 + i\sqrt{3})/4\}$, $E(\sqrt[m]{9}\,\omega_j, P_\nu) = \{1, (1 + i\sqrt{3})/4\}$, $0 \le j \le m-1$, $\nu = 1, 2$. Тут использовано $3m$ точек A_j. Неприводимость многочленов P_1 и P_2 легко показать на основе замечания после примера 4.

3. Попытаемся построить примеры многочленов с теми же свойствами, что и в примере 3, но степени $4(\mu + 1)$, $\mu \in \mathbb{N}$. Эти примеры (исследование которых мы не сумели довести до конца), возможно, представляют интерес не столько сами по себе, сколько потому, что показывают, как построен пример 3.

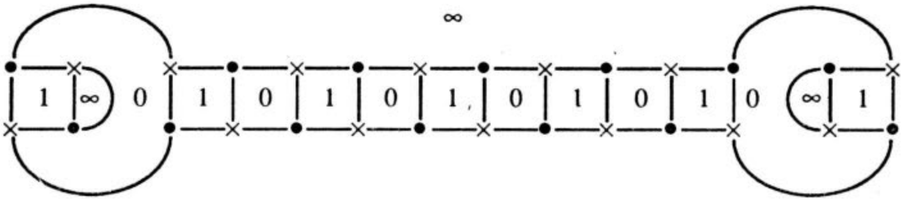

Рис. 3.

Пусть замкнутая риманова поверхность S задана комплексом отрезков, изображенным на рис. 3. Некоторая рациональная функция $w = R(z)$ отображает $\overline{\mathbb{C}}$ на эту риманову поверхность. Из комплекса отрезков видно, что R имеет 2μ нулей второго порядка ($\mu \in \mathbb{N}$) и два нуля третьего порядка, $2\mu + 3$ 1-точек второго порядка, один полюс $(4\mu + 4)$-го порядка и два простых полюса (на рис. 3 — случай $\mu = 2$). Учитывая, что комплекс отрезков имеет две взаимно перпендикулярные оси симметрии, можно нормировать отображающую функцию R таким образом, что R имеет в ∞ полюс $(4\mu + 4)$-го порядка, $R(0) = 1$, все нули $\pm a_1, \dots, \pm a_\mu, \pm a_{\mu+1}$, единицы $0, \pm b_1, \dots, \pm b_\mu, \pm b_{\mu+1}$ и простые полюсы $\pm p$ действительны и $0 < a_1 < b_1 < \dots < a_\mu < b_\mu < a_{\mu+1} < p < b_{\mu+1}$. Тогда

$$R(z) = A(z^2 - a_1^2)^2 \dots (z^2 - a_\mu^2)^2 (z^2 - a_{\mu+1}^2)^3 (z^2 - p^2)^{-1},$$

$$R(z) - 1 = B z^2 (z^2 - b_1^2)^2 \dots (z^2 - b_\mu^2)^2 (z^2 - b_{\mu+1}^2)^2 (z^2 - p^2)^{-1},$$

$A \ne 0$, $B \ne 0$, откуда следует тождество

$$A(z^2 - a_1^2)^2 \dots (z^2 - a_\mu^2)^2 (z^2 - a_{\mu+1}^2)^3 - \\ - B z^2 (z^2 - b_1^2)^2 \dots (z^2 - b_\mu^2)^2 (z^2 - b_{\mu+1}^2)^2 = z^2 - p^2 \tag{21}$$

и $A = B$. Положим

$$p_1(z) = c(z - a_{\mu+1}^2)^3, \quad p_2(z) = cA(z - b_2^2)^2 \dots (z - b_{\mu+1}^2)^2,$$

$$q_1(z) = z(z - b_1^2)^2, \quad q_2(z) = A(z - a_1^2)^2 \dots (z - a_\mu^2)^2,$$

где $c = p^2 (p^2 - b_1^2)^2 / (p^2 - a_{\mu+1}^2)^3$. Из (21) следует

$$p_1(z)\, q_2(z) - q_1(z)\, p_2(z) = c(z - p^2). \tag{22}$$

В силу выбора c $p_1(p^2) = q_1(p^2) \ne 0$. Из (22) вытекает $p_2(p^2) = q_2(p^2)$. Обозначим

$$\omega_2(z) = \frac{q_1(z) - p_1(z)}{c(z - p^2)}, \quad \omega_1(z) = \frac{q_2(z) - p_2(z)}{c(z - p^2)}.$$

Очевидно, ω_1 и ω_2 — многочлены. Подставляя в (22) $q_1(z) = p_1(z) + \omega_2(z)c(z - p^2)$, $q_2(z) = p_2(z) + \omega_1(z)c(z - p^2)$, получаем

$$\omega_1(z)p_1(z) - \omega_2(z)p_2(z) = 1 \tag{23}$$

и аналогично

$$\omega_1(z)q_1(z) - \omega_2(z)q_2(z) = 1. \tag{24}$$

Положим $P_\nu(z) = \omega_\nu(z^2)p_\nu(z^2)$, $Q_\nu(z) = \omega_\nu(z^2)q_\nu(z^2)$, $\nu = 1, 2$.

Все предыдущие рассуждения не были связаны с какими-либо вычислениями, в частности, с нахождением параметров $a_1, \ldots, a_{\mu+1}, b_1, \ldots, b_{\mu+1}, p$. Без таких выкладок, которые мы провели лишь в случае $\mu = 1$ (см. пример 3), мы не сумели доказать следующие факты: 1) $c \neq 1$; 2) ω_ν не имеет общих нулей ни с p_ν, ни с q_ν, $\nu = 1, 2$. Если считать эти факты достоверными, то исследование быстро завершается. Используя факт 2, получаем $E_s(0, P_1) = E_s(0, Q_1) = E_s(0, \omega_1(z^2))$, и с учетом (23) и (24) $E_s(1, P_1) = E_s(0, P_2) = E_s(0, \omega_2(z^2))$, $E_s(1, Q_1) = E_s(0, Q_2) = E_s(0, \omega_2(z^2))$, т. е. $E_s(1, P_1) = E_s(1, Q_1)$. Таким образом, многочлены P_1 и Q_1 имеют нужные свойства. Используя факт 1, находим $\deg \omega_1 = 2\mu - 1$. Тогда $\deg(p_1\omega_1) = \deg(q_1\omega_1) = 2(\mu + 1)$, $\deg P_1 = \deg Q_1 = 4(\mu + 1)$.

1. *Goldberg A. A., Pyana V. A.* The uniqueness theorems for algebraic functions // Entire and subharmonic functions. Advances in Soviet Mathematics. – 1992. – **11**. – P. 119 – 204.
2. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций. – М.: Наука, 1970. – 592 с.
3. *Selberg H.* Über die Wertverteilung der algebroiden Funktionen // Math. Z. – 1930. – **31**, №5. – S. 709 – 729.
4. *Петренко В. П.* Целые кривые. – Харьков: Вища шк., 1984. – 136 с.
5. *He Yuzan, Gao Shi-an.* On algebroid functions taking the same values at the same points // Kodai Math. J. – 1986. – **9**, №2. – P. 256 – 265.
6. *Gopalakrishna H. S., Bhoosnurmath S. S.* Uniqueness theorems for meromorphic functions // Math. scand. – 1976. – **39**, №1. – P. 125 – 130.
7. *Хейман У. К.* Мероморфные функции. – М.: Мир, 1966. – 287 с.
8. *Hiong King-lai.* Un problème d'unicité relatif aux fonctions méromorphes // Sci. sinica. – 1963. – **12**, №6. – P. 743 – 750.
9. *Ян Лэ.* Кратные значения мероморфных функций и их комбинаций // Acta math. sinica. – 1964. – **14**, №3. – P. 428 – 437 (кит.) (Англ. перевод: *Yang Le.* The multiple values of meromorphic functions and of combinations of functions // Chin. Math. – 1964. – **5**, №3. – P. 460 – 470).
10. *Ueda H.* Unicity theorems for meromorphic or entire functions // Kodai Math. J. – 1980. – **3**, №3. – P. 457 – 471.

Получено 29. 07. 93