УДК 517.5

А. А. Нудельман, канд. физ.-мат. наук (Одес. инж.-строит. ин-т)

РАБОТЫ М. Г. КРЕЙНА ПО ПРОБЛЕМЕ МОМЕНТОВ

This is a survey of M. G. Krein's papers devoted to the moment problem.

Наведено огляд праць М. Г. Крейна по проблемі моментів.

В творческом наследии М. Г. Крейна проблема моментов занимает особое место. Будучи большим знатоком и ценителем классических работ математиков Петербургской школы конца XIX века и, в частности, работ П. Л. Чебышева, А. А. Маркова и К. А. Поссе по проблеме моментов, Марк Григорьевич осмысливал эти работы с современных позиций, развивая и обобщая их, находил новые, порой неожиданные трактовки и новые области приложений. Заинтересовавшись проблемой моментов в начале 30-х годов, Марк Григорьевич постоянно возвращался к ней, вплоть до последних своих работ. Его результаты и методы в этой области получили широкий резонанс и признание; одним из проявлений этого признания является проведение Американским математическим обществом симпозиума по проблеме моментов и ее приложениям, посвященного восьмидесятилетию Марка Григорьевича [1].

Но особая роль проблемы моментов в творчестве М. Г. Крейна не только в этом. Пожалуй, важнее то, что ее методы и результаты часто служили ему ориентиром при построении новых теорий в смежных областях (теория расширений эрмитовых операторов, теория целых операторов, спектральная теория неоднородной струны, продолжение эрмитово-положительных функций и др.), в которых Марк Григорьевич получил фундаментальные результаты. В свою очередь, эти теории оказывали обратное влияние на проблему моментов, с их помощью Марк Григорьевич получал новые результаты даже в классической постановке.

1. Хронологически первый цикл работ Марка Григорьевича по проблеме моментов — это совместные с Н. И. Ахиезером работы 1934 – 1938 гг., подытоженные в монографии [2]. Часть из них посвящена задачам о коэффициентах Фурье ограниченной вещественной функции, т. е. о числах c_k, допускающих представление

$$c_k = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} f(t)\,dt, \quad |f(t)| \le L, \quad k = 0, 1, \dots, n; \quad n \le \infty.$$

О последовательности таких чисел говорят, что для нее разрешима тригонометрическая L-проблема моментов. Эти задачи связываются с классической тригонометрической проблемой моментов, т. е. с проблемой существования для заданной последовательности $\{\gamma_k\}_0^n$ представления

$$\gamma_k = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt}\,d\sigma(t), \quad d\sigma(t) \ge 0, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Другая часть посвящена степенным (c, C)-проблемам, т. е. проблемам о представлениях

$$c_k = \int_a^b t^k f(t)\,dt, \quad c \le f(t) \le C, \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

и их связям с классической степенной проблемой моментов

$$s_k = \int_a^b t^k d\sigma(t), \quad d\sigma(t) \geq 0, \quad k = 0, 1, \ldots, n+1.$$

Впервые степенная $(0, L)$-проблема была поставлена и изучена А. А. Марковым в работе [3]. В этой работе А. А. Марков с виртуозностью использовал очень громоздкий аппарат непрерывных дробей. Переосмысливая с современных позиций метод А. А. Маркова, Н. И. Ахиезер и М. Г. Крейн вскрыли его аналитическую подоплеку и тем самым нашли аналитически прозрачный путь, на котором, отказавшись от аппарата непрерывных дробей, можно не только заново получить результаты А. А. Маркова по степенной $(0, L)$-проблеме и значительно их развить, но и исследовать тригонометрическую L-проблему моментов.

Вкратце суть этого подхода состоит в следующем. В основе лежит известное интегральное представление

$$F(z) = \alpha + \beta z + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{t - z} - \frac{t}{1 + t^2} \right) d\sigma(t), \quad \overline{\alpha} = \alpha, \quad \beta \geq 0, \quad d\sigma(t) \geq 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(t)}{1 + t^2} < \infty,$$

так называемых R-функций, т. е. функций $F(z)$, голоморфных в верхней полуплоскости и отображающих ее в себя. Из него достаточно просто получается, что если $F(z)$ допускает представление

$$F(z) = \int_a^b \frac{d\tau(t)}{z - t}, \quad d\tau(t) \geq 0,$$

то она допускает также представление

$$F(z) = \frac{1}{z - a} \exp\left(\gamma + \int_a^b \frac{g(t)\,dt}{z - t} \right), \quad 0 \leq g(t) \leq 0, \quad \exp\gamma = \int_a^b d\tau(t);$$

верно и обратное. Разложив оба последних интеграла по обратным степеням z, получаем

$$\frac{1}{z - a} \exp \frac{1}{L} \left(\frac{c_0}{z} + \frac{c_1}{z^2} + \ldots + \frac{c_n}{z^{n+1}} + \ldots \right) = \frac{s_0}{z} + \frac{s_1}{z^2} + \ldots + \frac{s_{n+1}}{z^{n+2}} + \ldots, \quad s_0 = 1, \tag{1}$$

где

$$c_k = \int_a^b t^k f(t)\,dt, \quad k = 0, 1, \ldots, n, \quad 0 \leq f(t) \leq L \quad (f(t) = L g(t)), \tag{2}$$

$$s_k = \int_a^b t^k d\sigma(t), \quad d\sigma(t) \geq 0, \quad k = 0, 1, \ldots, n+1, \quad s_0 = 1 \quad (d\sigma(t) = \exp(-\gamma)\, d\tau(t)). \tag{3}$$

Отсюда делается вывод, что степенная $(0, L)$-проблема моментов на $[a, b]$ для последовательности $\{c_k\}_0^{\infty}$ разрешима тогда и только тогда, когда разрешима классическая степенная проблема моментов на $[a, b]$ для последовательности $\{s_k\}_0^{n+1}$, определенной из (1). Более того, благодаря (1) можно находить простейшие решения проблемы (2), отправляясь от простейших решений проблемы (3).

Аналогично тригонометрическую L-проблему можно свести к классической тригонометрической проблеме, используя тот факт, что если

$$F(z) = i\,\mathrm{Im}F(0) + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z}\, d\sigma(t), \quad d\sigma(t) \geq 0,$$

то также

$$F(z) = |F(0)| \exp\left\{ \frac{i}{4} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z}\, g(t)\,dt \right\}, \quad |g(t)| \leq 1.$$

Наименьшее L, для которого разрешима степенная (тригонометрическая) L-проблема, оказывается корнем алгебраического уравнения, получающегося приравниванием нулю некоторого ганкелевого (теплицевого) определителя, составленного по числам c_k. Задача о нахождении такого L тесно связана с экстремальной задачей типа задачи Коркина – Золотарева о минимизации в метрике $L_1(a, b)$ нормы алгебраического (тригонометрического) многочлена с заданным линейным ограничением на коэффициенты.

Изложение этих исследований составляет основное содержание первой (совместной) статьи сборника [2]. В этой статье последовательно развернута теория степенной и тригонометрической проблем моментов на основе теоретико-функционального подхода. Развитая здесь теория канонических (простейших) решений L-проблемы позволила, в частности, полностью исследовать вопрос о существовании квадратурных формул типа Чебышева [4] и типа Маркова [3], т. е. формул, имеющих вид

$$\int_{-1}^{1} f(t) g(t)\, dt = L \sum_{j=1}^{m} \left(f(\eta_j) - f(\xi_j) \right),$$

где $\int_{-1}^{1} q(t)\, dt = 0$, $\left\{ \xi_j \right\}_1^m$, $\left\{ \eta_j \right\}_1^m$ — последовательности перемежающихся чисел, принадлежащих $[-1, 1]$. Эти формулы должны быть точными для многочленов степени $\leq 2m$ (формула типа Маркова) или степени $\leq 2m + 1$ (формула типа Чебышева). Такие формулы существуют не всегда, и в статье факты из теории степенной $(0, L)$-проблемы использованы для получения критериев их существования и способов построения.

В другой статье из сборника [2] (статья VI) Марк Григорьевич излагает операторный подход к степенной проблеме моментов, использует его при получении критериев существования решения с предписанными предельными точками множества точек роста и затем разного рода факты из степенной проблемы моментов использует при нахождении критериев существования некоторых аддитивных или мультипликативных представлений мероморфных или целых функций, а также локализационных теорем о корнях целых функций. Попутно он получает ряд вспомогательных утверждений о целых и мероморфных функциях, представляющих самостоятельный интерес (одно из них, например, впоследствии позволило получить один из основных результатов в [5]).

Остальные статьи Марка Григорьевича из сборника [2] относятся к другому направлению, и о них будет сказано ниже.

2. Одновременно с этим циклом Марк Григорьевич проводил исследования по проблеме моментов в другом направлении. Отправляясь от методов М. Риса, Ф. Риса и Каратеодори, он усовершенствовал и развил исследования А. А. Маркова по теории канонических решений и „предельных величин" интегралов, придал им простоту и ясность благодаря использованию современных геометрических и теоретико-функциональных методов и значительно расширил сферу применения этих теорий. Первое сообщение об этом подходе Марк Григорьевич сделал в докладе на 2-м Всесоюзном математическом съезде [6] в 1934 г.; часть результатов, относящаяся к критерию разрешимости, вошла в статью [7] и в ее расширенный вариант, включенный в сборник [2] (статья II). Речь идет о критериях следующего типа. Пусть задана система непрерывных на $[a, b]$ функций $\left\{ u_k(t) \right\}_0^n$ такая, что среди обобщенных многочленов $P(t) = \sum_0^n \alpha_k u_k(t)$ существует строго положительный на $[a, b]$ многочлен. На множестве $\mathfrak{P}$ обобщенных многочленов последовательность $\left\{ c_k \right\}_0^n$ задает функционал $\mathfrak{S}$ посредством формулы

$$\mathfrak{S}\left\{ \sum_{0}^{n} \alpha_k u_k(t) \right\} = \sum_{0}^{n} \alpha_k c_k.$$

Последовательность $\{c_k\}_0^n$ называется позитивной, если из $P(t) \geq 0$ на $[a, b]$ вытекает, что $\mathfrak{S}\{P\} \geq 0$. Для того чтобы последовательность $\{c_k\}_0^n$ была моментной, т. е. чтобы имело место представление

$$c_k = \int_a^b u_k(t) d\sigma(t), \quad d\sigma(t) \geq 0, \quad k = 0, 1, \ldots, n,$$

необходимо и достаточно, чтобы она была позитивной. В существенном этот критерий принадлежит М. Рису (у М. Риса $u_0(t) \equiv 1$) и М. Г. Крейн распространил его на более общие ситуации (интервал $[a, b]$ может не быть конечным, функции $u_k(t)$ могут иметь точки разрыва и т. п.). Это позволило расширить круг задач, сводящихся к проблеме моментов. Так, стало возможным на этом пути получить критерий разрешимости проблемы Неванлинны – Пика, т. е. критерий существования R-функции, принимающей заданные значения в данных точках открытой верхней полуплоскости (их может быть несчетное множество; допускается совпадение нескольких точек; в этом случае, как обычно, задаются значения производных соответствующих порядков); критерий разрешимости граничной задачи Неванлинны – Пика (т. е. задачи отыскания R-функции $F(z)$, удовлетворяющей условиям $F(x_\alpha) = w_\alpha$, $F'(x_\alpha) \leq w'_\alpha$, $\alpha \in M$, где x_α, w_α, w'_α — заданные вещественные числа); критерий представимости функции $f(x)$ в виде

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{xt} d\sigma(t), \quad d\sigma(t) \geq 0, \quad a < x < b,$$

и др.

Примечательно, что М. Г. Крейн пришел к понятию линейного нормированного пространства, полуупорядоченного посредством конуса, и к понятию позитивного функционала (линейного функционала, неотрицательного на конусе), обобщая приведенное выше понятие позитивной последовательности [7] (см. также [2], статья III).

Большая обзорная статья с подробным изложением результатов, анонсированных в докладе на 2-м Всесоюзном съезде, была подготовлена к печати еще до войны, но во время войны она затерялась. Статья была восстановлена уже после войны при редакционном участии ученицы М. Г. Крейна Полины Григорьевны Рехтман и опубликована в 1951 г. [8]. В ходе восстановления возник новый подход: если в первоначальном варианте теория канонических решений строилась с помощью геометрических соображений, основанных на некоторых дополнительных предположениях (как впоследствии оказалось, несущественных), то в востановленном варианте впервые появился „метод максимальной массы", позволивший строить теорию без этих дополнительных предположений.

В статье рассматриваются обобщения задач Петербургской школы о предельных величинах интегралов и проявляются их связи с достаточно обширным кругом вопросов геометрии и анализа. Частично методически улучшенная, эта статья вошла как существенная часть в фундаментальную монографию американских математиков С. Карлина и В. Стаддена [9] (1966 г.), в которой широко освещены связи с задачами из других областей (теории вероятностей, статистики, планирования эксперимента, теории сплайнов и др.).

Эта же статья, а также другая известная статья М. Г. Крейна (статья IV из сборника [2]) легли в основу монографии М. Г. Крейна и А. А. Нудельмана [10] (1973 г.), в которой учтен опыт американских авторов, использованы работы русских и советских математиков, не отмеченные ими, и содержатся результаты, полученные при написании книги. Поэтому ряд вопросов в [10] освещен с большей полнотой. В частности, впервые, по-видимому, разъясняются некоторые работы П. Л. Чебышева и А. А. Маркова, которые до тех пор из-за сложного изложения не были оценены в должной степени.

3. Изложим вкратце содержание книги. Одна из основных задач, рассматриваемых в „теории предельных величин интегралов", состоит в следующем. Пусть на отрезке $[a, b]$ задана система непрерывных функций $\{u_k(t)\}_0^n$ и пусть последовательность $\{c_k\}_0^n$ позитивна относительно этой системы. Обозначим через $V(c)$ совокупность всех функций распределения $\sigma(t)$, для которых

$$\int_a^b u_k(t)\,d\sigma(t) = c_k, \quad k = 0, 1, \ldots, n, \tag{4}$$

т. е. совокупность всех решений проблемы моментов (4). Для заданной функции $\Omega(t)$ требуется найти наибольшее и наименьшее значения интеграла

$$\int_a^b \Omega(t)\,d\sigma(t) \tag{5}$$

или интеграла

$$\int_a^\xi \Omega(t)\,d\sigma(t), \quad a < \xi < b, \tag{6}$$

при условии, что $\sigma(t)$ пробегает $V(c)$. При достаточно общих предположениях для обеих задач можно указать решения, которые, оказывается, имеют простую структуру.

Среди решений проблемы моментов (4) имеются дискретные, которым отвечают представления вида

$$c_k = \sum_{j=1}^m \rho_j\, u_k(\xi_j), \quad \rho_j > 0, \quad \xi_j \in [a, b], \quad k = 0, 1, \ldots, n. \tag{7}$$

Для характеристики таких представлений вводится понятие индекса представления. Положим $\varepsilon(t) = 2$ при $a < t < b$ и $\varepsilon(a) = \varepsilon(b) = 1$. Индексом представления (7) называется сумма $\sum_{j=1}^m \varepsilon(\xi_j)$. Предположим, что $\{u_k(t)\}_0^n$ — T-система на $[a, b]$, причем без ограничения общности ее можно считать T_+-системой, т. е. что $\det \| u_{k-1}(t) \|_{j,k=1}^{n+1} > 0$ при $a \le t_1 < t_2 < \ldots < t_{n+1} \le b$. Далее, будем считать, что проблема моментов имеет бесчисленное множество решений (для этого необходима и достаточно строгая позитивность последовательности $\{c_k\}_0^n$): из $P(t) \ge 0$, $P(t) \not\equiv 0$, $P(t) \in \mathfrak{P}$ следует $\mathfrak{S}\{P\} > 0$. Тогда существует одно и только одно представление (7) с индексом $n + 1$, имеющее массу (скачок решения $\sigma(t)$) в точке b, и одно и только одно представление с индексом $n + 1$, не имеющее массы в точке b. Они называются соответственно верхним и нижним главным представлением. Наконец, предположим, что $\Omega(t)$ есть T_+-продолжение системы $\{u_k(t)\}_0^n$, т. е. что система $\{u_k(t)\}_0^{n+1}$, где

$u_{n+1} = \Omega$, также есть T_+-система. При этих условиях справедлива теорема Маркова – Крейна: наибольшее (наименьшее) значение интеграла (5), когда σ пробегает $V(c)$, достигается на распределении σ, задающем верхнее (соответственно нижнее) главное представление.

Представления (7) с индексом $\leq n+2$ называются каноническими. Каждая строго позитивная последовательность $\{c_k\}_0^n$ имеет одно и только одно каноническое представление с массой в предписанной точке ξ, $a \leq \xi \leq b$. Эта масса $\rho(\xi)$ — максимальная в том смысле, что

$$\rho(\xi) = \max\{\sigma(\xi+0) - \sigma(\xi-0) \mid \sigma \in V(c)\}.$$

Ее можно находить, исходя из двойственного соотношения

$$\rho(\xi) = \{\mathfrak{S}\{P\} \mid P(t) \geq 0 \ (a \leq t \leq b), \ P(\xi) = 1, \ P \in \mathfrak{P}\}.$$

Обратно, распределение $\sigma_\xi(t)$, имеющее в точке ξ максимальную массу, задает каноническое представление. Каноническое представление с максимальной массой в точке a (точке b) — главное. Если система $\{u_k(t)\}_0^n$ такова, что каждый ее отрезок $\{u_k(t)\}_0^m$, $m = 0, 1, \dots, n$, является T_+–системой и положительная непрерывная функция $\Omega(t)$ есть T_+-продолжение каждого из этих отрезков, то выполняются неравенства Чебышева–Маркова: для всех $\sigma \in V(c)$

$$\int_a^{\xi-0} \Omega(t)\,d\sigma_\xi(t) \leq \int_a^{\xi-0} \Omega(t)\,d\sigma(t) \leq \int_a^{\xi+0} \Omega(t)\,d\sigma(t) \leq \int_a^{\xi+0} \Omega(t)\,d\sigma_\xi(t).$$

Прослежена связь этих задач с экстремальными задачами, возникающими в различных областях анализа, конструктивной теории функций, теории аналитических функций, математического программирования, функционального анализа, а также с задачами геометрии n-мерного пространства. Особое место в приложениях занимает степенная и тригонометрическая проблема моментов — каждый шаг построения теории иллюстрируется эффективными приемами получения критериев разрешимости и определенности, вычисления максимальной массы, построения главных и канонических представлений и связанных с ними квадратурных формул, описания всех решений в неопределенном случае.

Из других приложений упомянем следующее полезное в ряде случаев предложение. Пусть ядро $G(x, t)$ вполне положительно на $[a, b] \times [c, d]$. Это значит, что при любых натуральных m и $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_m \leq b$, $c \leq t_1 < t_2 < \dots < t_m \leq d$ определитель $\det \| G(x_i, t_j) \|_{i,j=1}^m$ положителен. Обозначим через $\mathfrak{G}$ класс функций, допускающих представление

$$f(x) = \int_c^d G(x, t)\,d\sigma(t), \quad d\sigma(t) \geq 0,$$

и зададим две последовательности чисел $\{x_k\}_1^n \subset [a, b]$ и $\{y_k\}_1^n$. Пусть существуют по крайней мере две функции класса $\mathfrak{G}$, удовлетворяющие условиям $f(x_k) = y_k$, $k = 1, 2, \dots, n$. Тогда среди всех функций класса $\mathfrak{G}$, удовлетворяющих этим условиям, имеются две экстремальные $\underline{R}(x)$ и $\overline{R}(x)$, для которых справедливы неравенства

$$(-1)^{n-k}(f(x) - \underline{R}(x)) > 0, \quad (-1)^{n-k}(f(x) - \overline{R}(x)) < 0$$

при $x_k < x < x_{k+1}$, $k = 0, 1, \dots, n$, $x_0 = a$, $x_{n+1} = b$. Экстремальные функции представляют собой конечные линейные комбинации с положительными коэффициентами функций вида $G(\xi, t)$.

В случае $a = c = 0$, $b = d = \infty$, $G(x, t) = (x+t)^{-1}$ получены эффективный критерий разрешимости, описание всех решений и способы нахождения экстремальных решений, в том числе для $n = \infty$. Впоследствии эти исследования были продолжены, установлена связь этой задачи с проблемой моментов Стилтьеса [11]. Спустя еще некоторое время выяснилось, что эта задача имеет важные приложения в теории межмолекулярных взаимодействий [12] (см. также [13]).

Теория экстремальных значений интегралов (5) и (6) распространена на случаи, когда носители масс распределений σ содержатся в полубесконечном интервале, в бесконечном интервале, в произвольном линейном компакте, а также на случай, когда моменты не фиксируются, а меняются в некотором параллелепипеде. В последнем случае найдено, в частности, точное решение задачи П. Л. Чебышева о нахождении для данной последовательности $\{s_k\}_0^n$ степенных моментов в $[0, \infty)$ и данного числа $h > 0$ наименьшего H_0, при котором всякая последовательность $\{S_k\}_0^n$, удовлетворяющая условиям

$$|S_k - s_k| < \frac{h^k}{H_0}, \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

также является последовательностью степенных моментов в $[0, \infty)$. П. Л. Чебышевым в [14] была найдена лишь сильно завышенная оценка снизу для H_0.

Геометрические методы позволяют также построить теорию L-канонических представлений для L-проблемы моментов и даже для более общей (φ, ψ)-проблемы, которая состоит в отыскании функций $\sigma(t)$ ограниченной вариации, для которых справедливы соотношения

$$c_k = \int_a^b u_k(t)\, d\sigma(t), \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

$$d\varphi(t) \le d\sigma(t) \le d\psi(t),$$

где $\{u_k(t)\}_0^n$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ $(d\varphi(t) < d\psi(t))$ — заданные непрерывные на $[a, b]$ функции, $\{c_k\}_0^n$ — заданная последовательность чисел. В этом случае простейшие решения имеют следующую структуру: интервал $[a, b]$ разбивается на конечное число интервалов, в которых попеременно $d\sigma(t) = d\varphi(t)$ и $d\sigma(t) = d\psi(t)$. Количество внутренних точек деления есть индекс представления. Вводятся нижние, верхние и главные представления, канонические представления как представления индекса соответственно $n + 1$ и $\le n + 2$ и аналоги теоремы Маркова – Крейна и неравенств Чебышева – Маркова, устанавливаются связи (φ, ψ)-проблемы с обобщениями классических экстремальных задач типа задач Чебышева, Коркина – Золотарева, Поссе, Стилтьеса, одной из которых является задача о минимизации в метрике L_1 нормы многочлена со старшим коэффициентом, равным единице.

4. Заключительная глава книги представляет собой частично переработанную и дополненную новейшими результатами известную статью М. Г. Крейна „L-проблема в абстрактном линейном нормированном пространстве" из сборника [2] (статья IV), содержание которой было им сообщено еще в 1936 г. в цикле лекций, прочитанных в Научно-исследовательском институте математики и механики при Харьковском университете. В ней излагается предложенный Марком Григорьевичем единый метод исследования ряда экстремальных задач, основанный на совместном изучении некоторой общей экстремальной задачи и двойственной ей задачи. В наше время в таком подходе нет ничего удивительного, но нужно учитывать, что это одна из первых работ, в которой был предложен такой подход и на многих разнообразных ярких приложениях продемонстрирована его плодотворность.

Речь идет о следующих задачах. Пусть в линейном нормированном пространстве B под полем вещественных или комплексных чисел заданы n линейно независимых элементов $\{u_k\}_1^n$ и, кроме того, заданы n чисел $\{c_k\}_1^n$.

I. Найти минимум Λ норм линейных ограниченных функционалов $F(u)$, удовлетворяющих соотношениям

$$F(u_k) = c_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

II. Найти

$$1/\mathrm{M} = \min \| \xi_1 u_1 + \ldots + \xi_n u_n \|$$

при условии $\xi_1 c_1 + \ldots + \xi_n c_n = 1$.

Достаточно просто устанавливается, что $\Lambda = \mathrm{M}$.

С задачей I тесно связана задача, которую можно назвать L-проблемой в пространстве B: найти, при каких условиях существуют линейные функционалы $F(u)$, удовлетворяющие соотношениям

$$F(u_k) = c_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \quad \|F\| \le L.$$

При $B = \mathcal{L}_1(a, b)$ эта проблема сводится к уже упоминавшейся L-проблеме моментов.

Общие свойства решений задач I и II в различных конкретных пространствах B позволяют использовать единый подход к решению достаточно обширного набора задач, в частности, задач о наилучшем приближении функций многочленами в метриках пространств $\mathcal{L}_1(a, b)$, $\mathcal{C}(a, b)$, наилучшего приближенного решения несовместной системы линейных уравнений, о наименее уклоняющейся от нуля почти периодической функции Степанова с заданным конечным набором коэффициентов Фурье и др.

Оказалось, что принцип двойственности переносится и на пространства с несимметричной нормой (в которых вместо свойства $\|tu\| = |t|\,\|u\|$, $t \in \mathbb{R}$, выполняется лишь свойство $\|tu\| = t\|u\|$, $t \ge 0$). Благодаря этому стало возможным рассмотреть с тех же позиций задачи о наилучшем приближении в метрике

$$\|u\| = \int_a^b |u(t)|\, d\mu(t) + \int_a^b u(t)\, d\lambda(t) \quad (d\mu(t) > 0, \ |d\lambda| < d\mu)$$

и в метрике

$$\|u(t)\| = \max_{a \le t \le b} \left\{ \frac{u_+(t)}{\varphi_+(t)} + \frac{u_-(t)}{\varphi_-(t)} \right\}, \tag{8}$$

где $u_\pm(t) = (|u(t)| \pm u(t))/2$, а $\varphi_\pm(t)$ — заданные непрерывные строго положительные функции. Основные положения теории наилучшего приближения в пространстве $\mathcal{C}(a, b)$ переносятся и на случай пространства, снабженного нормой (8). Это позволило, в частности, получить как следствие свойств чебышевского альтернанса известную теорему С. Карлина „об ужах" (это наименование, ныне принятое повсеместно, было предложено Марком Григорьевичем). С. Карлин использовал совсем другие (топологические) соображения.

Особый резонанс статья IV из [2] получила в теории оптимального управления. Н. Н. Красовский был первым, кто обнаружил, что задачи линейного оптимального управления можно свести к абстрактной L-проблеме. Одна из возможных схем такого сведения следующая. Пусть задана система

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t)v(t), \quad x(0) = x_0,$$

где размеры матриц x, A, B, v сответственно $n \times 1$, $n \times n$, $n \times r$, $r \times 1$. За счет управления $v(t)$ нужно перевести $x(t)$ из x_0 в 0 за время T так, чтобы значение заданного функционала качества $J(v)$ было минимальным.

С помощью $(n \times n)$-мерной матрицы-функции $X(t)$, удовлетворяющей соотношениям

$$\frac{dx}{dt} = A(t)X, \quad X(0) = I,$$

задача сводится к отысканию допустимой вектор-функции $v(t)$, удовлетворяющей соотношению

$$\int_0^T C(t)v(t)\,dt = x_0, \tag{9}$$

где $C(t) = -X^{-1}(t)B(t)$. Управление $v(t)$ считается допустимым, если имеет смысл формула (8) и функционал $J(v)$ конечен. Через c_k обозначим k-ю координату точки x_0, через $u_k(t)$ — k-ю строку матрицы $C(t)$. Тогда соотношение (9) покоординатно запишется в виде

$$F(u_k) = c_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

где

$$F(u) = \int_0^T u(t)v(t)\,dt. \tag{10}$$

Если в пространстве r-мерных вектор-строк $u(t)$, содержащем все непрерывные вектор-функции, можно ввести норму так, чтобы норма функционала была равна $\|F\| \leq J(v)$, то рассматриваемая задача сводится к задаче I. Использование двойственной задачи II позволяет описать структуру оптимальных управлений. Достаточно обширный список литературы, посвященной применению L-проблемы в задачах оптимального управления, имеется в [15].

М. Г. Крейн и Н. И. Ахиезер вновь обратились к L-проблеме в статье [16], в которой эффективно решалась задача классического типа о минимизации интеграла

$$\int_{-1}^{1} \{|P(x)| + \theta P(x)\} \frac{dx}{\omega(x)}$$

($|\theta| < 1$, $\omega(x)$ — положительный на $[-1, 1]$ многочлен степени $\leq m$) на множестве многочленов $P(x) = \sum_0^m \xi_k x^k$, удовлетворяющих условию

$$\sum_0^m \psi_k c_k = 1.$$

5. Начиная с 1940 г. Марк Григорьевич приступил к интенсивной разработке континуальных аналогов тригонометрической и степенной проблем моментов, а также спектральной теории операторов в гильбертовом пространстве. Континуальным аналогом тригонометрической проблемы моментов является проблема продолжения с отрезка на всю ось эрмитово-положительной функции. Степенная проблема стимулировала построение замечательной теории — теории целых операторов и метода направляющих функционалов, основанных на глубоких исследованиях Марка Григорьевича по теории симметрических операторов с конечными индексами дефекта. Оказалось, что в рамках этой теории укладываются не только классические проблемы моментов, но и проблемы продолжения эрмитово-положительных функций, продолжения винтовых и унитарных линий, которые имеют важные приложения в проблеме экстраполяции и фильтрации стационарных случайных процессов. Важные приложения теория целых операторов находит в теории краевых задач для дифференциальных операторов; метод направляющих функционалов стал универсальным инструментом для получения интегральных представлений функций тех или иных классов и для получения спектральных разложений в теории дифференциальных операторов.

Выявлению взаимосвязи и взаимопроникновения проблемы моментов и теории расширения эрмитовых операторов посвящена статья М. Г. Крейна и М. А. Красносельского [17]. В ней излагаются основные положения теории расширения полуограниченных эрмитовых операторов, расширения операторов с сохранением спектрального люка, с сохранением нормы и показано, что а) степенная проблема моментов на $(-\infty, \infty)$ вкладывается в теорию расширений эрмитовых операторов; б) степенная проблема на $[0, \infty)$ (проблема моментов Стилтьеса) — в теорию расширения неотрицательных операторов; б) усеченная степенная проблема на $[-1, 1]$ — в теорию расширения эрмитовых операторов с сохранением нормы. Все эти проблемы рассмотрены и в операторном варианте, когда моменты — эрмитовы операторы. Вскоре Марк Григорьевич разрабатывает новый подход к операторной степенной проблеме моментов [18] и получает описание всех ее решений во вполне неопределенном случае. О дальнейшем развитии этого подхода см. [19].

На упомянутые выше исследования М. Г. Крейна по теории операторов безусловное влияние оказала проблема моментов. Например, существование „жестких" и „мягких" неотрицательных расширений неотрицательного оператора, несомненно, было подсказано существованием в проблеме моментов Стилтьеса экстремальных значений интегралов, которые достигаются на главных решениях. Можно указать также работы [20, 21], где неравенства Чебышева – Маркова переносятся на спектральные функции задачи Штурма – Лиувилля и неоднородной струны.

Как уже было отмечено, в работах Марка Григорьевича встречаются примеры обратного влияния теории операторов на теорию моментов. Так, описание всех решений степенной проблемы $\{s_k\}_0^{2n}$ на конечном интервале он сначала, судя по всему, получил из описания всех расширений эрмитовых операторов с сохранением нормы, а затем нашел его чисто „моментными" средствами. Оба эти подхода имеются в его статье [22]. Другой „моментный" подход, позволяющий получить описание и для проблемы $\{s_k\}_0^{2n+1}$, содержится в [10].

Еще один пример. Марк Григорьевич со своими учениками, в основном с И. С. Иохвидовым и Г. К. Лангером, создали спектральную теорию операторов в пространстве с индефинитной метрикой. И здесь развитие событий шло „в обратном направлении": сначала была создана теория целых π-эрмитовых операторов, а затем, в качестве приложения, исследована индефинитная степенная проблема моментов [23, 24].

Поставленная М. Г. Крейном еще в 1945 г. задача о расширении эрмитовых операторов с сохранением нескольких спектральных люков стимулировала исследование степенной проблемы на нескольких интервалах [25, 26]. Новая трактовка этой степенной проблемы появилась в результате решения задачи М. Г. Крейна В. А. Деркачом и М. М. Маламудом [27].

6. Марку Григорьевичу был присущ удивительный дар — он умел обнаруживать родство на первый взгляд далеких друг от друга областей. Один из самых впечатляющих примеров проявления этого дара — механическая интерпретация исследования Стилтьеса [28] о непрерывных дробях и проблеме моментов.

Началось с того, что Марк Григорьевич обнаружил следующий факт. Пусть невесомая нить, на которую нанизаны бусинки, натянута единичной силой между двумя точками. Оказалось, что амплитудные функции колебаний этой системы удовлетворяют тем же рекуррентным соотношениям, что числители и знаменатели подходящих дробей непрерывной дроби

$$\cfrac{1}{m_1 z + \cfrac{1}{l_1 + \cfrac{1}{m_2 z + \cfrac{1}{l_2 + \ldots}}}}, \tag{11}$$

где m_i — масса i-й бусинки, l_i — расстояние между i- и $(i+1)$-й бусинками. Именно такие дроби были предметом исследования Стилтьеса [28].

Как показал Стилтьес, непрерывной дроби (11) взаимно однозначно соответствует последовательность $\{s_k\}_0^\infty$, допускающая представление

$$s_k = \int_0^\infty t^k d\sigma(t), \quad k = 0, 1, \ldots, \quad d\sigma(t) \geq 0.$$

Благодаря механической интерпретации многие тонкие алгебраические и теоретико-функциональные результаты Стилтьеса приобрели непосредственную механическую очевидность.

Впоследствии Марк Григорьевич построил спектральную теорию струны с произвольным распределением масс, в которую исследования Стилтьеса включаются как специальный частный случай. При этом оказывается, что решения $\sigma(t)$ проблемы моментов Стилтьеса являются спектральными функциями „стилтьесовской" струны. Более подробно обо всем этом рассказано в статье И. С. Каца, которая будет опубликована в следующем номере журнала. Отметим лишь, что Марк Григорьевич получил описание всех спектральных функций произвольной регулярной струны, которое в случае стилтьесовской струны переходит в описание всех решений проблемы моментов Стилтьеса (не известных до той поры). Более того, формула, дающая описание, также допускает простую механическую трактовку (по этому поводу также см. статью И. С. Каца в следующем номере журнала).

В этой связи уместно заметить, что исследования существования специальных представлений многочленов, положительных на системе замкнутых интервалов, были инициированы одним изящным рассуждением Марка Григорьевича, в котором органично сочетались факты из спектральной теории струны, проблемы моментов Стилтьеса и ее механической интерпретации. Вкратце оно состоит в следующем.

Пусть $P(z)$ — многочлен степени N, положительный на множестве $E = [0, \infty) \setminus \bigcup_{j=1}^{g} (a_j, b_j)$. Обозначим $a(z) = (z - a_1) \ldots (z - a_g)$, $b(z) = (z - b_1) \ldots (z - b_g)$. Функции $\sigma_E(t)$ и $\sigma_{E,P}(t)$, определяемые соотношениями

$$d\sigma_E(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}\sqrt{\dfrac{a(t)}{t\,b(t)}}\,dt, & t \in E, \\ 0, & t \notin E, \end{cases} \qquad d\sigma_{E,P}(t) = \frac{d\sigma_E(t)}{P(t)}, \tag{12}$$

являются спектральными функциями струн, обозначаемых соответственно через S_E, $S_{E,P}$. Так как мера $d\sigma_{E,P}(t)$ имеет конечные моменты s_k, $k = 0, 1, \ldots$

$\ldots, N-1$, то начальный участок S_0 струны $S_{E,P}$ представляет собой невесомую нить длины l с конечным числом бусинок. Возникает вопрос: при каких условиях на $P(z)$ остальная часть S струны $S_{E,P}$ совпадает со струной S_E? Для ответа на него используется связь между главными коэффициентами динамической податливости струны $S_{E,P}$ и струны S соответственно:

$$\Gamma_{E,P}(z) = \frac{\psi^+(l,z)\Gamma(z) + \psi(l,z)}{\varphi^+(l,z)\Gamma(z) + \varphi(l,z)}. \tag{13}$$

Здесь

$$\Gamma_{E,P}(z) = \int_E \frac{d\sigma_{E,P}(t)}{t-z}$$

и если $S = S_E$, то

$$\Gamma(z) = \int_E \frac{d\sigma_E(t)}{t-z} \doteq \sqrt{-\frac{a(z)}{z\,b(z)}}.$$

Используя формулу обращения Стилтьеса и соотношение $\psi^+(l,z)\varphi(l,z) - \varphi^+(l,z)\psi(l,z) = 1$, из (13) получаем для $t \in E$ соотношение

$$d\sigma_{E,P}(t) = \frac{d\sigma_E(t)}{\left(\varphi^+(l,t)\right)^2 \dfrac{a(t)}{t\,b(t)} + \left(\varphi(l,t)\right)^2},$$

так что, учитывая (12), имеем

$$P(t) = \left(\varphi^+(l,t)\right)^2 \frac{a(t)}{t\,b(t)} + \left(\varphi(l,t)\right)^2.$$

Здесь $\varphi^+(l,t)$ и $\varphi(l,t)$ — многочлены, $\varphi^+(l,0) = 0$. Поэтому для совпадения S и S_E необходимо, чтобы выполнялось условие $\varphi(l,b_j)$, $j = 1, 2, \ldots, g$. В этом случае

$$P(z) = A^2(z) + z\,a(z)\,b(z)\,B^2(z), \tag{14}$$

где $A(z) = \varphi(l,z)$ и $B(z) = \varphi^+(l,z)/z\,b(z)$ — многочлены, имеющие определенные аналитические свойства, вытекающие из того, что, как известно, функция $\varphi(l,z)/\varphi^+(l,z)$ принадлежит классу Стилтьеса. Эти же условия оказываются достаточными как для равенства $S = S_E$, так и для существования представления (14) у данного положительного на E многочлена $P(z)$. Так было положено начало совместным с Б. Я. Левиным и А. А. Нудельманом исследованиям о существовании особых представлений различных типов у положительных на E многочленов, которые можно рассматривать как развитие и обобщение результатов А. А. Маркова [29] и Н. И. Ахиезера [30].

В этих исследованиях использованы три подхода: теория спектральных функций струны, теория канонических решений степенной проблемы моментов (классической и $(0, L)$-проблемы) и теория абелевых интегралов. В качестве приложений получены решения ряда экстремальных задач чебышевского типа. Первоначальные результаты освещены в препринте [31], а изложению всех полученных в этом направлении результатов посвящена статья [32]. Эта статья, к сожалению, оказалась последней в списке работ Марка Григорьевича.

1. *Moments* in Mathematics. Proc. of Simposia in Appl. Math. – Henry Landau, Editor, AMS, 1987 – **37**.
2. *Ахиезер Н. И., Крейн М. Г.* О некоторых вопросах теории моментов. – Харьков: ГОНТИ, 1938. – 255 с.
3. *Марков А. А.* Новые приложения непрерывных дробей. – Избр. труды. – М.: Гостехиздат, 1948. – 410 с.
4. *Чебышев П. Л.* Об интерполяции в случае большого числа наблюдений. – М.: Изд-во АН СССР, 1948. – 412 с. – (Полное собр. соч.).
5. *Крейн М. Г., Нудельман А. А.* О представлении целых функций, положительных на вещественной оси или на полуоси, или вне конечного интервала // Мат. исслед. – 1981. – Вып. 61. – С. 40–59.
6. *Крейн М. Г.* Об одном обобщении исследований акад. Маркова о предельных величинах интегралов // Тр. II Всесоюзн. мат. съезда. – 1934. – Т. 2. – С. 152–154.
7. *Крейн М. Г.* Про позитивні адитивні функціонали в лінійних нормованих просторах // Зап. мат. т-ва. – 1937. – **4**, № 14. – С. 227–237.
8. *Крейн М. Г.* Идеи П. Л. Чебышева и А. А. Маркова в теории предельных величин интегралов и их дальнейшее развитие // Успехи мат. наук. – 1951. – **6**, вып. 4. – С. 3–120.
9. *Karlin S., Studden W.* Tchebycheff systems: with application in analysis and statistics. – Interscience Publishers. – 1966.
10. *Крейн М. Г., Нудельман А. А.* Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. – М.: Наука, 1973. – 551 с.
11. *Крейн М. Г., Нудельман А. А.* Об одной интерполяционной проблеме, родственной проблеме моментов Стилтьеса // Докл. АН УССР. – 1977. – № 12. – С. 1068–1072.
12. *Нудельман А. А., Тулуб А. В.* Об экстремальных задачах, возникающих в теории сил Ван-дер-Ваальса // Теорет. и мат. физика. – 1979. – **39**, № 3. – С. 359–366.
13. *Каплан И. Г.* Введение в теорию межмолекулярных воздействий. – М.: Наука, 1982. – 312 с.
14. *Чебышев П. Л.* О разложении в непрерывную дробь рядов, расположенных по нисходящим степеням переменной.– М.: Изд-во АН СССР, 1948.– С. 387–469.– (Полное собр. соч. Т. 3).
15. *Васильев Ф. П., Ишмухамедов А. З., Потапов М. М.* Обобщенный метод моментов в задачах оптимального управления. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989. – 320 с.
16. *Ахиезер Н. И., Крейн М. Г.* Одна экстремум-проблема относительно многочленов // Ann. Univ. Sci. Budapest. Sec. Math. – 1960 / 61. – **3 / 4**. – С. 9–14.
17. *Крейн М. Г., Красносельский М. А.* Основные теоремы о расширении эрмитовых операторов и некоторые их приложения к теории ортогональных полиномов и проблеме моментов // Успехи мат. наук. – 1947. – **2**, вып. 3. – С. 60–106.
18. *Крейн М. Г.* Бесконечные J-матрицы и матричная проблема моментов // Докл. АН СССР. – 1949. – **69**. – С. 125–128.
19. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – Киев: Наук. думка, 1965. – 798 с.
20. *Крейн М. Г.* Аналог неравенств Чебышева–Маркова в одномерной краевой задаче // Докл. АН СССР. – 1953. – **89**, № 1. – С. 5–8.
21. *Крейн М. Г.* Неравенства Чебышева – Маркова в теории спектральной функции струны // Мат. исслед. – 1979. – **5**, № 1. – С. 77–101.
22. *Крейн М. Г.* Описание всех решений усеченной степенной проблемы моментов и некоторые операторные вопросы // Там же. – 1968. – **2**, № 2. – С. 114–132.
23. *Крейн М. Г., Лангер Г. К.* Об индефинитной степенной проблеме моментов // Докл. АН СССР. – 1976. – **226**, № 2. – С. 261–264.
24. *Krein M. G., Langer H.* On some extention problems which are closely connected with the theory of Hermitian operators in a space Π_κ. III // Indefinite analogues of the Hamburger and Stiltjes moment problems. Pt 1. Beitrage zur Analysis. – 1979. – **14**. – P. 25–40.
25. *Фильштинский В. А.* Степенная проблема моментов на всей оси при заданном конечном числе пустых интервалов в спектре // Зап. мех.-мат. фак. Харьк. ун-та и Харьк. мат. о-ва. Сер. 4. – 1964. – **30**. – С. 186–200.
26. *Нудельман А. А.* Канонические решения проблемы моментов на нескольких интервалах // Мат. заметки. – 1967. – **1**, № 4. – С. 435–442.
27. *Деркач В. А., Маламуд М. М.* Резольвентная матрица эрмитова оператора и проблема моментов с лакунами // Докл. АН СССР. – 1990. – **314**, № 2. – С. 273–278.
28. *Стилтьес Т.* Исследования о непрерывных дробях. – М.: ОНТИ, 1936. – 155 с.
29. *Марков А. А.* Лекции о функциях, наименее уклоняющихся от нуля: Избр. тр. – М.: Гостехтеоретиздат, 1948. – С. 244–291.
30. *Ахиезер Н. И.* Об уравнении Лямэ // Зап. Харьк. ун-та и Харьк. мат. о-ва. Сер. 4. – 1962. – **30**. – С. 4–57.
31. *Крейн М. Г., Левин Б. Я., Нудельман А. А.* О специальном представлении многочлена, положительного на системе замкнутых интервалов. – Харьков, 1984. – 48 с. – (Препринт / АН УССР. Физ.-техн. ин-т низких температур; 28-84).
32. *Krein M. G., Levin B. Ya. , Nudel'man A. A.* On a special representations of polynomials that are positive on a system of closed intervals and some applications // Funk. Anal., Optimiz. and Math. Economics. – Ed. by L. Liefman. – Oxford: Univ. press, 1990.

Получено 17. 06. 93