УДК 517.983

**В. А. Якубович,** д-р физ.-мат. наук (С.-Петербург. ун-т)

# О РАБОТАХ М. Г. КРЕЙНА ПО ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ

We present the basic ideas of the theory of linear periodic Hamiltonian systems.

Описано основні ідеї теорії лінійних періодичних гамільтонових систем.

**Введение.** Указанная тематика, по-видимому, находилась на периферии научных интересов Марка Григорьевича. Тем не менее, и здесь, как и в ряде других областей математики, Марк Григорьевич был первым. Другие исследователи шли за ним.

Автор стремился не перечислять все относящиеся к этой теме результаты Марка Григорьевича, а кратко и максимально популярно описать основные идеи, стремясь, по возможности, к связности изложения. В основу положен поэтому не хронологический, а тематический подход. Многие конкретные результаты Марка Григорьевича и его последователей остались не упомянутыми.

Рассматриваемый цикл работ посвящен исследованию линейных гамильтоновых систем

$$\frac{dp_j}{dt} = \frac{d\mathcal{H}}{dq_j}, \quad \frac{dq_j}{dt} = -\frac{d\mathcal{H}}{dp_j}, \quad j = 1, \dots, m, \tag{1}$$

где $\mathcal{H} = \mathcal{H}(t, p, q)$ — квадратичная форма переменных $p = \|p_j\| \in \mathbb{R}^m$, $q = \|q_j\| \in \mathbb{R}^m$ с $T$-периодическими вещественными коэффициентами. Вводя вектор $x$ с компонентами $p_1, \dots, p_m, q_1, \dots, q_m$, перепишем систему (1) в виде векторного уравнения

$$J\frac{dx}{dt} = H(t)x, \tag{2}$$

где $J$ и $H(t)$ — матрицы порядка $2m \times 2m$,

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -I_m \\ I_m & 0 \end{bmatrix}, \quad H(t+T) = H(t) = H(t)^*. \tag{3}$$

(Элементы матрицы $H(t)$ вещественны и принадлежат $L_1(0, T)$.)

На первый взгляд предмет исследования представляется специальным и узким. Это действительно так, однако к изучению этих систем приводят многие задачи техники и физики. В первую очередь следует упомянуть проблемы параметрического резонанса; раскачивание качелей — всем знакомый пример такого резонанса. Приведем некоторые более содержательные примеры. 1. Наглядно очевидно, что подвешенный на шарнире однозвенный пружинный плоский маятник будет совершать вертикальные колебания, если его оттянуть вниз (рис.1). Однако, и это не очевидно, что если его параметры удовлетворяют условию $3mg \approx cl$ ($m$ — масса, $c$ — жесткость пружины, $l$ — длина маятника в ненапряженном состоянии), то вертикальные колебания неустойчивы: они начнут переходить в поперечные и обратно. 2. Аналогичным образом балки и другие конструкции могут терять плоскую форму изгиба при определенных соотношениях на их параметры. 3. Весьма вероятно, что в крушении Такомского висячего моста (США, штат Вашингтон, 1940) повинно явление параметрического резонанса. 4. Наверное многие, наблюдая за работой помпы, выкачивающей воду из колодца, были свидетелями такого явления. В обычных условиях шланг, по которому течет вода, неподвижен. Но при определенной частоте работы помпы он начинает делать некоторые движения и извиваться. 5. Как показал А. М. Ляпунов, лапласово движение в задаче трех тел орбитально устойчиво (в линейном приближении), если их массы $M, m, m'$ удовлетворяют условию

$$0 < \mu < 1/12, \text{ либо } 1/12 < \mu < 1/9, \text{ где } \mu = \frac{3(Mm + Mm' + mm')}{(M + m + m')^2}, \qquad (4)$$

а эксцентриситет $\varepsilon$ движения достаточно мал ($\varepsilon < \varepsilon_0(\mu)$).

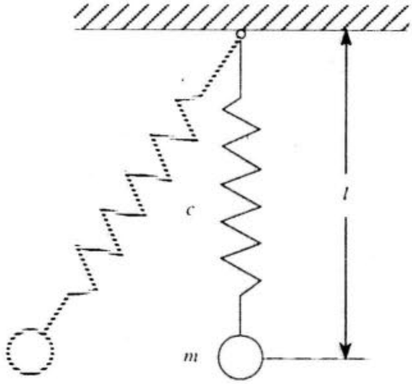


Рис. 1

Эти и другие задачи приводят к математической задаче установления условий устойчивости (ограниченности всех решений для $-\infty < t < +\infty$) или неустойчивости системы (1).

В конце прошлого и в начале этого века уравнения (1) изучались в основном в связи с потребностями небесной механики (Брунс, Хилл, Пуанкаре и др.); разрабатывались в основном методы интегрирования систем с малым параметром, решения отыскивались в виде рядов (обычных и асимптотических). Значение этих методов сейчас несколько потускнело в связи с использованием вычислительной техники. Имея в виду результаты Марка Григорьевича, мы будем интересоваться в основном эффективными условиями устойчивости и неустойчивости, наложенными на коэффициенты системы.

До работ М. Г. Крейна результатов в этой области было мало. Они относились главным образом к уравнению Хилла

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p(t)y = 0 \quad (p(t+T)) = (p(t)), \qquad (5)$$

полученному Хиллом в связи с его исследованием движения луны. Уравнение (5) сводится к (2), если положить

$$x = \begin{bmatrix} y \\ dy/dt \end{bmatrix}, \quad H(t) = \begin{bmatrix} p(t) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \qquad (6)$$

Были известны критерии Ляпунова

$$p(t) \underset{\not\equiv}{\geq} 0, \quad T\int_0^T p(t)\,dt \leq 4 \qquad (7)$$

и критерий Жуковского: для целого $k$ выполнено

$$\frac{k^2\pi^2}{T^2} \underset{\not\equiv}{\leq} p(t) \underset{\not\equiv}{\leq} \frac{(k+1)^2\pi^2}{T^2}. \tag{8}$$

Оба они гарантируют устойчивость уравнения Хилла (а также отсутствие $T$-периодических и $T$-полупериодических $(y(t+T) = -y(t))$ решений). Были известны и другие похожие критерии, в ряде случаев фигурирующие в них постоянные оказались неточными. (Обратим внимание на разный характер этих условий: критерий Ляпунова выделяет одну выпуклую область, а критерий Жуковского — счетное число областей; ниже мы вернемся к этому обстоятельству.) Было хорошо изучено уравнение Матье $(p(t) = \alpha + \beta\cos 2t)$, плоскость $\{\alpha, \beta\}$ оказалась разбитой на счетное число областей устойчивости и неустойчивости; был известен ряд тонких результатов Ляпунова и Хаупта, относящихся к уравнениям Хилла с параметром. Несмотря на важность изучения систем (1) с $m > 1$ ($m$ — число степеней свободы соответствующей механической системы) до работ М. Г. Крейна результатов в этой области практически не было.

**1. Критерий устойчивости линейного периодического гамильтонова уравнения.** Прежде чем перейти к изложению результатов Марка Григорьевича, полезно напомнить необходимую терминологию. Пусть $X(t)$ — эволюционная $2m \times 2m$-мерная матрица уравнения (2) и

$$\det[X(T) - \rho I] = 0 \tag{9}$$

— его характеристическое уравнение. Корни уравнения (9) называются мультипликаторами, каждому мультипликатору отвечает (вообще, комплексное) решение $x(t)$ уравнения $J\dot{x} = H(t)x$ со свойством $x(t+T) = \rho x(t)$. Матрица $X(t)$ — симплектическая для любого $t > 0$. Обозначим через $\mathfrak{S} = \mathrm{Sp}_{2m}(\mathbb{R})$ группу симплектических матриц $(X \in \mathfrak{S} \Leftrightarrow X^* J X = J)$. Собственные значения матриц $X \in \mathfrak{S}$ (с учетом набора элементарных делителей) располагаются симметрично относительно вещественной оси и относительно единичной окружности. Это же верно в отношении мультипликаторов (теорема Пуанкаре). Уравнение $J\dot{x} = H(t)x$ устойчиво (все решения ограничены на $(-\infty, +\infty)$), если все его мультипликаторы лежат на окружности $|\rho| = 1$ и кратным отвечают простые элементарные делители; в противном случае оно неустойчиво.

Марк Григорьевич пишет [1, с. 415], что прогресс в теории уравнений $J\dot{x} = H(t)x$ с $m > 1$ удалось осуществить после того, как был выделен класс уравнений *положительного типа*, характеризующихся тем, что

$$H(t) \geq 0, \qquad H_{\text{ср}} = \frac{1}{T}\int_0^T H(t)\,dt > 0. \tag{10}$$

Поясним в общих чертах идею [1, 2] Марка Григорьевича относительно установления условий устойчивости уравнения $J\dot{x} = H(t)x$ положительного типа. Наряду с исходным уравнением рассматривается краевая задача

$$J\frac{dx}{dt} = \lambda H(t)x, \tag{11}$$

$$x(T) = \rho_0 x(0) \qquad (|\rho_0| = 1). \tag{12}$$

Легко устанавливается, что ее собственные значения вещественны. При малых $\lambda > 0$ мультипликаторы $\rho_j(\lambda)$ уравнения (11) лежат на окружности $|\rho| = 1$. Докажем это для случая, когда все собственные значения $i\omega_k$ матрицы $J^{-1}H_{\text{ср}}$

различны. (Они, очевидно, чисто мнимые.) Из равенства $X(T, \lambda) = I_{2m} + J^{-1} H_{\text{ср}} T\lambda + O(\lambda^2)$ легко следует, что $\rho_k(\lambda) = \exp[i(\omega_k + \varepsilon_k(\lambda))\lambda]$, где $\varepsilon_k(\lambda) \to 0$ при $\lambda \to 0$. При малых $\lambda > 0$ все $\varepsilon_k(\lambda)$ вещественны; в противном случае нарушалось бы условие симметрии чисел $\rho_k(\lambda)$ относительно единичной окружности. Итак, при малых $\lambda > 0$ все $\rho_k(\lambda)$ различны и $|\rho_k(\lambda)| = 1$, т. е. уравнение $J\dot{x} = \lambda H(t)$ устойчиво.

Нас интересует, останется ли оно устойчивым при $\lambda = +1$. Марк Григорьевич изучает поведение мультипликаторов при возрастании $\lambda$ от 0 до 1 и вводит важное для дальнейшей теории понятие рода мультипликаторов. Рассмотрим некоторое $\lambda_0 > 0$ и простой мультипликатор $\rho(\lambda_0)$, $|\rho(\lambda_0)| = 1$. При сдвиге $\lambda_0$ в область $\operatorname{Re}\lambda > 0$ этот мультипликатор сойдет с единичной окружности, иначе краевая задача (11), (12) при $\rho_0 = \rho(\lambda)$, $|\rho(\lambda)| = 1$ имела бы невещественное собственное значение $\lambda$. Мультипликатор $\rho(\lambda_0)$ называется мультипликатором *первого рода*, если $|\rho(\lambda)| < 1$, и *второго рода*, если $|\rho(\lambda)| > 1$. Пусть $\rho_0 = \rho(\lambda_0)$, $|\rho_0| = 1$, — мультипликатор кратности $r > 1$; говорят, что в точке $\rho_0 = \rho(\lambda_0)$ совпало $r_1$ мультипликаторов первого и $r_2$ мультипликаторов второго рода, если при сдвиге $\lambda_0$ в область $\operatorname{Re}\lambda > 0$ уравнение имеет $r_1$ мультипликаторов в области $|\rho| < 1$ и $r_2$ — в области $|\rho| > 1$, $r_1 + r_2 = r$. Можно дать эквивалентное определение рода мультипликаторов, пригодное для любой симплектической матрицы. Пусть $\rho_0$, $|\rho_0| = 1$ — простое собственное значение симплектической матрицы $X$, $Xa = \rho_0 a$, $a \neq 0$. Оно имеет первый род, если $i^{-1}(Ja, a) > 0$, и второй род, если $i^{-1}(Ja, a) < 0$. (Доказывается, что $(Ja, a) \neq 0$.) В случае кратного собственного значения $\rho_0$, $|\rho_0| = 1$, аналогично по числу положительных и отрицательных собственных значений матрицы Грама корневого подпространства определяется число совпавших в точке $\rho_0$ собственных значений первого и второго рода. Полезно, дополняя определение Марка Григорьевича, считать, что собственные значения $\rho_k$ имеют первый род, если $|\rho_k| < 1$, и второй, если $|\rho_k| > 1$. Тогда симплектическая $(2m \times 2m)$-мерная матрица $X$ имеет $m$ собственных значений $\rho_k^+$ первого рода и $m$ собственных значений $\rho_k^-$ второго рода, причем $\rho_k^+$ (а значит, и $\rho_k^-$) непрерывно зависит от $X$. (Последний факт особенно важен; он следует из формул Риса для проектора и из $J$-ортогональности корневых пространств $\mathfrak{L}_{\rho_1}$ и $\mathfrak{L}_{\rho_2}$ симплектической матрицы, отвечающих собственным значениям $\rho_1$ и $\rho_2$, $\rho_1\bar{\rho}_2 \neq 1$.) Легко доказывается, что собственные значения $e^{i\omega_0}$, $e^{-i\omega_0}$ имеют противоположный род и кратному собственному значению одного рода (соответствующая матрица Грама дефинитна) отвечают простые элементарные делители.

Вернемся к рассмотрению движения мультипликаторов уравнения $J\dot{x} = \lambda H(t)x$ при возрастании $\lambda$ от 0 до 1. (Условия (10), по-прежнему, выполнены.) Мы показали, что для простого мультипликатора первого рода отображение $\rho = \rho^+(\lambda)$ переводит полуокрестность $\operatorname{Re}\lambda > 0$ точки $\lambda_0 \in (0, 1)$ в полуокрестность $|\rho| < 1$ точки $\rho_0 = \rho^+(\lambda_0)$, $|\rho_0| > 1$. Поэтому при возрастании $\lambda \in (0, 1)$ мультипликатор первого рода перемещается по единичной окружности с возрастанием аргумента. Аналогично мультипликатор второго рода движется с убыванием аргумента. Это важное правило, выведенное без вычислений, многократно использовалось во многих дальнейших работах. (Можно было бы получить его и посредством вычислений.)

При $\lambda = 0$ у уравнения $J\dot{x} = \lambda H(t)x$ все мультипликаторы первого и второго рода совпадают в точке $\rho = 1$. Мы видели, что при малых $\lambda > 0$ все они лежат на единичной окружности. Отсюда легко следует, что при малых $\lambda > 0$ все мультипликаторы первого рода располагаются на верхней полуокружности, а мультипликаторы второго рода — симметрично им на нижней полуокружности. При встрече мультипликаторов одного рода на верхней (и на нижней) открытой полуокружности они не могут сойти в область $|\rho| \neq 1$ — их род при этом изменился бы. Притом совпавшим мультипликаторам одного рода отвечают простые элементарные делители. Итак, при возрастании $\lambda$ от $0$ мультипликаторы первого рода двигаются по единичной окружности с возрастанием аргумента (второго рода — с убыванием аргумента) до тех пор, пока не произойдет встреча мультипликаторов разного рода. Пока такой встречи нет, уравнение $J dx/dt = \lambda H(t)x$ устойчиво. Сойти с единичной окружности мультипликаторы могут лишь после встречи мультипликаторов разного рода, а такая встреча может произойти лишь в точке $\rho = -1$. Пусть $\lambda = \Lambda_+ > 0$ — соответствующее значение $\lambda$. При $\lambda = \Lambda_+$ уравнение может стать неустойчивым (за счет наличия непростых элементарных делителей), а при $\lambda$, близких к $\Lambda_1$, $\lambda > \Lambda_1$, оно может стать экспоненциально неустойчивым (если мультипликаторы сойдут с единичной окружности). Итак, исходное уравнение $J dx/dt = H(t)x$ устойчиво, если $\Lambda_+ > 1$. Число $\Lambda_+$ — наименьшее положительное собственное значение краевой задачи (11), (12) с $\rho_0 = -1$. Таким образом Марк Григорьевич свел исходную новую задачу к относительно стандартной задаче оценки снизу собственного значения $\Lambda_+$.

Грубую оценку получить очень просто. Пусть $x(t)$ — решение задачи (11), (12) с $\rho_0 = -1$, $\lambda = \Lambda_1$, $x(t+T) = x(t)$ и пусть $|x(t_0)| = \max\limits_{[0,T]}|x(t)|$. Тогда

$$2|x(t_0)| = |x(t_0+T) - x(t_0)| \le \int_{t_0}^{t_0+T} |\dot{x}|\,dt = \int_{t_0}^{t_0+T} |J\dot{x}|\,dt =$$

$$= \Lambda_+ \int_{t_0}^{t_0+T} |Hx|\,dt \le \Lambda_+ \int_{t_0}^{t_0+T} |H|\,dt\,|x(t_0)| = \Lambda_+ \int_0^T |H|\,dt\,|x(t_0)|.$$

Поэтому [2, с. 447] $\Lambda_+ \ge 2\left(\int_0^T |H|\,dt\right)^{-1}$. Следовательно, уравнение $J\dot{x} = H(t)x$ положительного типа устойчиво, если

$$\int_0^T |H(t)|\,dt < 2. \tag{13}$$

Аналогично легко получить [2] (теорема 4) как критерий Ляпунова (4), так и его распространение на векторное уравнение Хилла

$$\frac{d^2y}{dt^2} + P(t)y = 0 \tag{14}$$

(где $y(t) \in \mathbb{R}^m$, $P(t+T) = P(t) = P(t) \geq 0$, $P_{\text{ср}} > 0$ ). Это уравнение устойчиво [2, с. 488], если $T\int_0^T |P(t)|\,dt \leq 4$. Заметим, что, как и в скалярном случае, постоянную 4 в последнем неравенстве нельзя уменьшить. (Тем не менее последний критерий можно в разных отношениях улучшить, что и делает Марк Григорьевич.)

Более тонкие способы оценки снизу числа $\Lambda_+$ (один из них изложен в следующем пункте) приводят к более содержательным критериям устойчивости уравнения $J\dot{x} = H(t)x$ [1] (§ 7); эти критерии можно рассматривать как обобщение в разных направлениях критерия Ляпунова (4).

В работе [3] наряду с другими результатами изложен отличный от [1] метод оценки числа $\Lambda_+$; он приводит к таким удобным в вычислительном отношении критериям: *уравнение $J\dot{x} = H(t)x$ положительного типа устойчиво при*

$$T^2\,\mathrm{Sp}\,(JH_{\text{ср}})^2 < 4, \tag{15}$$

*а если $H(t) = H(-t)$, то при*

$$T^2\,\mathrm{Sp}\,(JH_{\text{ср}})^2 < 8. \tag{16}$$

В последнем случае оценка точная — число 8 нельзя заменить меньшим числом.

В книге И. И. Гохберга и М. Г. Крейна [4] изложена созданная ими теория трансформаторов вольтерровых операторов; в качестве одного из применений рассмотрена описанная выше задача. С использованием правила движения мультипликаторов и ряда новых найденных авторами фактов теории несамосопряженных операторов получен такой результат: *рассматриваемое уравнение устойчиво, если*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\omega_j}{2j-1} < \frac{\pi}{2}, \tag{17}$$

*где $\pm i\omega_j$ — чисто мнимые собственные значения матрицы $JH_{\text{ср}}$ (и $\omega_j > 0$).* Этот критерий точный: при любых фиксированных $n$ и $\omega_j$ постоянную $\pi/2$ в (17) нельзя заменить меньшим числом.

Выше было показано, что уравнение $J\dot{x} = \lambda H(t)x$ устойчиво при $0 < \lambda < \Lambda_+$. Аналогично устанавливается, что оно устойчиво при $\Lambda_- < \lambda < 0$, где $\Lambda_- < 0$ — наибольшее по модулю отрицательное собственное значение краевой задачи (11), (12) с $\rho_0 = -1$. Более того, для $\Lambda_- < \lambda < \Lambda_+$, $\lambda \neq 0$ имеет место „сильная" устойчивость: уравнение $J\dot{x} = H(t)x$ называется *сильно устойчивым*, если оно устойчиво и если это свойство сохраняется при малых (в $L$-норме) деформациях гамильтониана $H(t)$. Марк Григорьевич показал, что для сильной устойчивости достаточно, чтобы уравнение не имело кратных мультипликаторов разного рода. (Это факт — следствие непрерывной зависимости собственных значений $\rho_j^{\pm}(X)$ с учетом их рода, $X \in \mathfrak{S}$.) Несколько позже И. М. Гельфанд и В. Б. Лидский [5] установили, что указанное условие и необходимо. Все приведенные выше критерии — это критерии сильной устойчивости.

Описанные критерии устойчивости гарантируют оценку $\Lambda_+ > 1$; у соответствующего уравнения все мультипликаторы первого рода лежат на верхней полуплоскости единичной окружности (а второго рода — симметрично на нижней полуокружности). Между тем существуют сильно устойчивые уравнения с произвольным расположением мультипликаторов на единичной окружности.

Используя введенное И. М. Гельфандом и В. Б. Лидским [5] понятие области устойчивости (см. п. 4), можно показать, что критерий указанного типа, обеспечивающий оценку $\Lambda_+ > 1$, вырезает гамильтонианы из одной „центральной" области устойчивости, в то время как имеется счетное число областей устойчивости. В этом смысле все критерии этого типа аналогичны критерию Ляпунова (4), но не критерию Жуковского (5). Понимая это обстоятельство, Марк Григорьевич указывает в [3] (§ 3)преобразования, позволяющие из критериев для центральной области устойчивости получить критерии для любой области устойчивости.

**2. Исследование краевой задачи (11), (12).** В связи с обнаруженной связью рассматриваемой проблемы с самосопряженной краевой задачей (11), (12) с $\rho_0 = -1$ Марк Григорьевич детально исследует эту и более общую самосопряженную задачу. При этом применяются разнообразные аналитические средства.

Опишем, например, тот неожиданный набор средств комплексного анализа, с помощью которого устанавливается [1] (теорема 6.2) существование собственных значений $\Lambda_+ > 0$, $\Lambda_- < 0$ в указанной задаче. (Если отбросить условие $H_{\text{ср}} > 0$, то их может и не быть.)

Собственные значения $\lambda_k$ задачи (11), (12) с $\rho_0 = -1$ суть полюсы матрицы-функции $[\,X(T,\lambda) + I_m\,]^{-1}$, где $X(T,\lambda)$ — матрица монодромии уравнения $J\dot{x} = \lambda H(t)x$. Пусть $\ldots \le \lambda_{-2} \le \lambda_{-1} < 0 < \lambda_1 \le \lambda_2 < \ldots$. Используя теорему Чеботарева о разложении Миттаг-Леффлера функций $f(\lambda)$ со свойством $J_m f(\lambda) > 0$ при $J_m \lambda > 0$, Марк Григорьевич показывает [1] (теорема 3.5), что справедливо абсолютно сходящееся разложение [1, с. 460]*:

$$2\,[\,X(T,\lambda) + I_m\,]^{-1} = I_{3n} + J\left\{-\lambda A_1 + \lambda \sum_{j=0} \frac{B_j}{\lambda_j(\lambda_j \lambda)}\right\}, \tag{18}$$

где $A_j$, $B_j$ — эрмитовы матрицы, причем $A_1 \ge 0$, $B_j \ge 0$ и $\sum |B_j| \left(\lambda_j^2\right)^{-1} < \infty$.

Пусть, например, отсутствуют числа $\lambda_j < 0$ (т. е. $\Lambda_- = -\infty$). Тогда, как показано выше, при любом $\lambda < 0$ все $|\,\rho_j^{\pm}(\lambda)\,| = 1$. Так как $\Delta(\lambda) = \det[X(T, \lambda) + I_{2m}] = \Pi\,[-1 - \rho_j^{\pm}(\lambda)]$, то $|\,\Delta(\lambda)\,| \le \text{const}$ при $\lambda < 0$.

С другой стороны, из (18) для $\lambda_j = \zeta_j^2$ следует

$$2\,[\,X(T,\lambda^2) + I\,]^{-1} = I_{2m} - JA_1\lambda^2 + \frac{\lambda^2}{2} \sum_{j=0} \frac{JB_j}{\zeta_j}\left(\frac{1}{\zeta_j - \lambda} + \frac{1}{\zeta_j + \lambda}\right). \tag{19}$$

Однако ранее в статье [6] Марк Григорьевич показал, что целая матрица-функция $W(\lambda)$, допускающая разложение

$$W(\lambda)^{-1} = \sum_{j=0}^{p} A_j \lambda^j + \lambda^p \sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_k}{\lambda - \mu_k}, \quad \text{где} \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|\,c_k\,|}{|\mu_k|} < \infty \tag{20}$$

и все $\mu_k$ вещественны, имеет не более чем экспоненциальный тип, т. е. $|W(\lambda)| \le$ $\le \alpha\, e^{\beta|\lambda|}$, где $\alpha > 0$, $\beta > 0$ и при этом

* В [1] рассмотрена и более общая краевая задача: вместо $(-I_{2m})$ взята произвольная $J$-унитарная матрица $\varepsilon$. Для простоты изложения мы ограничились задачей (11), (12) и привели это разложение для указанного случая.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log^+|F(\lambda)|}{1+\lambda^2}\, d\lambda < \infty. \tag{21}$$

Применяя это предположение к функции $W(\lambda) = X(T, \lambda^2) + I_{2m}$, в силу (19) получаем

$$|\Delta(\lambda)| \le \alpha_1 e^{\beta_1 \sqrt{|\lambda|}}, \quad \alpha_1 > 0, \quad \beta_1 > 0.$$

По теореме Адамара

$$\Delta(\lambda) = 2^{2m} \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_j}\right).$$

Так как все числа $\lambda_j > 0$, то $\Delta(\lambda) \to +\infty$ при $\lambda \to -\infty$. Притиворечие показывает, что имеется хотя бы одно собственное значение $\lambda_j < 0$.

Те же соображения приводят к утверждению [4] (теорема 2): если $H(t) \ge 0$, $H_{\text{ср}} > 0$, то матрица монодромии $X(T, \lambda)$ уравнения $J\dot{x} = \lambda H(t)x$ удовлетворяет условиям

$$h(\varphi) = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\log\left|X\left(T, re^{i\varphi}\right)\right|}{r} < \infty, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log^+|X(T,\lambda)|}{1+\lambda^2} d\lambda < \infty.$$

Используя эти соотношения, Марк Григорьевич доказывает [4, с. 170], что краевая задача (11), (12) имеет бесконечную последовательность собственных значений $\ldots \le \lambda_{-2} \le \lambda_{-1} < \lambda_0 \le \lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots$ и

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\lambda_k}{k} = \lim_{k\to\infty} \frac{|\lambda_{-k}|}{k} = 2\pi\left[h\left(\frac{\pi}{2}\right) + h\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]^{-1}.$$

В [6] указано также на связи теории матриц монодромии уравнений $J\dot{x} = \lambda H(t)x$ с построенной им теорией целых эрмитовых операторов (см., например, [7, 8]) и с проблемой продолжения эрмитово положительных функций (см., например, [9]).

В работе [10] установлено наличие неожиданно простых свойств разложений мультипликаторов $\rho_j(\lambda)$ уравнения (11) положительного типа в ряд по дробным степеням:

$$\rho_j(\lambda) = \rho_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_{kj}(\lambda - \lambda_0)^{k/q}. \tag{22}$$

Именно, пусть $\kappa$ — кратность мультипликатора $\rho_0$ и $d$ — число ветвей (22), $q_1 + q_2 + \ldots + q_d = \kappa$. Тогда [6] (теорема 1) числа $q_1, \ldots, q_d$ совпадают с порядками жордановых клеток, отвечающих собственному числу $\rho_0$ в жордановой форме матрицы $X(T, \lambda_0)$, и все $c_{1j} \ne 0$.

Важные результаты, относящиеся к краевой задаче (11), (12) с $\rho_0 = -1$, получены в [3]. Именно, показано, что

$$\lim_{r\to\infty} \sum_{|\lambda_j|<r} \frac{1}{\lambda_j} = 0, \quad \sum_j \frac{1}{\lambda_j^2} = \frac{T^2}{4}\,\mathrm{Sp}\,(JH_{\text{ср}})^2. \tag{23}$$

Из условия $H_{\text{ср}} > 0$ следует $\operatorname{Sp}(JH_{\text{ср}})^2 > 0$. Тем самым в [3] получено второе (существенно более простое, чем в [1]) доказательство существования чисел $\lambda_1 = \Lambda_+$, $\lambda_{-1} = \Lambda_-$. Из второй формулы (23) („формулы следов") следует оценка $\Lambda_+^2 > ((T^2/4)\operatorname{Sp}(JH_{\text{ср}})^2)^{-1}$ и критерий (15), (16).

**3. Параметрический резонанс.** Рассмотрим устойчивое гамильтоново уравнение

$$J\frac{dx}{dt} = H_0 x \tag{24}$$

с постоянным гамильтонианом (все решения (24) ограничены) и „возмущенное" гамильтоново уравнение

$$J\frac{dx}{dt} = H(\theta t)x, \tag{25}$$

где $H(t+2\pi) = H(t)$. Частота $\theta$ называется критической для системы (24), если для любого $\delta > 0$ найдется такой гамильтониан $H(t)$, $\|H(t) - H_0\| < \delta$, что уравнение (25) неустойчиво (имеются неограниченные решения). Явление возникновения неограниченно растущих колебаний при сколь угодно малом периодическом возмущении параметров системы называется параметрическим резонансом. Пусть $i\omega_k$, $k = 1, \dots, m$ — собственные значения первого рода матрицы $J^{-1}H_0$, тогда $(-i\omega_k)$ — ее собственные значения второго рода. (Их род определяется аналогично роду собственных значений симплектической матрицы; род числа $(\pm i\omega_k)$ совпадает с родом собственного значения $\exp(\pm i\omega_k)$ матрицы $\exp(J^{-1}H_0) \in \mathfrak{S}$.) Предположим, что все $\omega_j + \omega_k \neq 0$. (Это заведомо так, если $H_0 > 0$, тогда все $\omega_k > 0$.) Из результатов М. Г. Крейна, дополненных И. М. Гельфандом и В. Б. Лидским [5], следует, что критическими являются частоты

$$\theta = (\omega_j + \omega_k)/N, \quad j, k = 1, \dots, m, \quad N = \pm 1, \pm 2, \dots, \tag{26}$$

и только они. Частоты $\theta = 2\omega_k/N$ называются частотами основного, а частоты $\theta = (\omega_j + \omega_k)/N$ с $j \neq k$ — частотами комбинационного резонанса. В приложениях обычно в (25) $H(t) = H_0 + \varepsilon H_1(t) + \varepsilon^2 H_2(t) + \dots$, $\varepsilon$ — малый параметр. Области на плоскости $\{\varepsilon, \theta\}$, отвечающие неограниченным решениям, называются областями динамической неустойчивости, в обычных случаях они имеют вид **клинышков** с вершинами в точках $(0, (\omega_j + \omega_k)/N)$. Несмотря на важность для приложений явления параметрического резонанса (см., например, [11]), до публикации результатов М. Г. Крейна в многочисленных прикладных работах не учитывалось явление комбинационного резонанса, хотя последующие исследования показали, что во многих рассмотренных задачах основную роль играет именно комбинационный резонанс. (Ширина области комбинационного резонанса имела порядок $\varepsilon$, а основного — порядок $\varepsilon^p$, $p \geq 2$.) Это было связано с тем, что в системах с одной степенью свободы $(m = 1)$ комбинационный резонанс отсутствует, границы области динамической неустойчивости вычисляются из условия наличия $2\pi/\theta$-периодических или $2\pi/\theta$-антипериодических решений. Для систем с $m > 1$ числом степеней свободы инженеры проводили аналогичные вычисления, но поскольку указаное свойство справедливо лишь для границ областей основного резонанса, то области комбинационного резонанса пропускались. Результаты Марка Григорьевича послужили толчком к разработке методов вычисления границ областей динамической неустойчивости комбинационного резонанса. Выяснилось также, что для основных числовых характеристик, описывающих явление параметрического резонанса, которыми интересуются в приложениях, могут быть получены простые формулы, позволяющие непосредственно по коэффициентам системы (25) судить о возникающих явлениях (см., например, [12 – 14]). Были получены новые формулы для критических частот для более узких классов возмущений [14].

В работе [3] Марк Григорьевич рассматривает явление высокочастотной стабилизации — явление, в некотором смысле обратное параметрическому резонансу. Простейший пример этого явления хорошо известен: неустойчивое верхнее положение маятника становится устойчивым, если точка подвеса (шарнир) начинает вибрировать с достаточно большой частотой. Оказывается, аналогичным образом возможна высокочастотная стабилизация практически любой механической системы. Именно, пусть $P(t)$ и $R(t)$ — вещественные симметричные, $2\pi$-периодические матрицы-функции, $P(t) \geq 0$, $P_{\text{ср}} > 0$ и

$$\frac{d^2y}{dt^2} + [R(\theta t) + \varepsilon\theta^2 P(\theta t)]\, y = 0 \tag{27}$$

— уравнение Лагранжа рассматриваемой системы. (При $\varepsilon = 0$ система может быть неустойчивой.) Тогда [3, с. 679] существует такое $\varepsilon_0 > 0$ и функция $\Theta(\varepsilon)$, заданная на $(0, \varepsilon_0)$, что при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, $\theta > \Theta(\varepsilon)$ уравнение (27) устойчиво.

**4. Другие работы М. Г. Крейна по гамильтоновым уравнениям.** Почти все описанные выше результаты перенесены М. Г. Крейном на случай бесконечномерного (банахова и гильбертова) пространства состояний (см., например, [4], гл. 5, [15], гл. 6, [16]). Теория линейных гамильтоновых уравнений тесно переплетена с теорией операторов в пространстве с индефинитной метрикой (см., например, [15 – 17]). Она связана с обратной задачей Штурма–Лиувилля [18 – 20], с теорией волноводов [21], с квадратными операторными уравнениями и демпфированными колебаниями бесконечномерных систем [22].

По-видимому, стимулирующую роль для Марка Григорьевича сыграли работы Ляпунова по линейным периодическим системам. Все наиболее глубокие результаты Ляпунова в этой области были передоказаны заново Марком Григорьевичем с использованием совсем иных соображений. Доказательства Ляпунова основаны на виртуозных вычислениях, Марк Григорьевич применял современный аппарат теории операторов, интегральных уравнений, теории функций [1 – 3, 6, 23 – 29]. При этом во многих случаях результаты Ляпунова уточнялись, а доказательства становились много короче и прозрачнее. Что касается критериев устойчивости для уравнения Хилла, полученных Ляпуновым, то некоторые из них существенно усилены [23] и все они распространены М. Г. Крейном на многомерный и бесконечномерный случаи [24]. (Часто таких обобщений несколько.)

В работе [23] рассмотрены задачи на максимум и минимум для характеристических чисел — границ зон устойчивости уравнения Хилла. (Тем самым получены разнообразные критерии устойчивости уравнения Хилла, аналогичные критерию Жуковского (5), но существенно более сильные.) В современной трактовке это специальные задачи оптимального управления с равномерными ограничениями на управление, они решаются с применением „принципа максимума" Понтрягина. Однако в то время принципа максимума не было, он появился спустя 5 лет после публикации работы [23]. Но и с применением принципа максимума решение подобных задач очень не просто (см., например, решение Ю. Ф. Казаринова аналогичной задачи в [30], приложение).

**5. Влияние идей и результатов М. Г. Крейна на дальнейшее развитие теории линейных гамильтоновых систем.** Введенное Марком Григорьевичем понятие рода мультипликаторов было существенно использовано И. М. Гельфандом и В. Б. Лидским [5] для установления структуры множества гамильтонианов устойчивых систем. Поясним основную идею работы [5] и дальнейших работ в этом направлении. Пусть $L = \{H(\cdot)\}$ — банахово пространство гамильтонианов (3) с $L_1$-нормой, О — множество гамильтонианов сильно устойчивых уравнений. Пусть $X \in \mathfrak{S}$ — симплектическая матрица, все собственные значения которой лежат на окружности $|\rho| = 1$ и среди них нет совпавших разного рода. (По теореме Крейна – Гельфанда – Лидского это свойство имеют матрицы монодромии и уравнения с $H(\cdot) \in$ О.) Передвигаясь по верхней полуокружности единичной окружности от точки $(+1)$ к точке $(-1)$, будем выписывать последовательно плюсы или минусы соответственно тому, встречаются ли при этом движении собственные значения первого или второго рода. (Для $r$-кратного собственного значения будем выписывать $r$ плюсов или минусов.) Полученный символ $\mu = (+, +, -, \ldots, -)$ из $m$ плюсов и $m$ минусов назовем спектральным типом матрицы X. Всего, очевидно, будет $2^m$ различных спектральных типов для $H(\cdot) \in$ О. Пусть $\mathrm{O}^{(\mu)}$ — множество всех гамильтонианов $H(\cdot) \in$ О с матрицей монодромии спектрального типа $\mu$. Очевидно, что два гамильтониана из О с разными спектральными типами нельзя соединить непрерывной кривой в О — при такой деформации встретились бы мультипликаторы разного рода. Но и каждое из множеств $\mathrm{O}^{(\mu)}$, оказывается, распадается на непересекающиеся области. Поясним, почему это происходит, и укажем, чем различаются гамильтонианы из разных областей.

Гамильтониану $H(\cdot) \in L$ однозначно соответствует эволюционный оператор $X(t)$, $0 \le t \le T$, — кривая в группе $\mathfrak{S}$ с началом $X(0) = I_{2m}$. Известно [5], что группа $\mathfrak{S}$ гомеоморфна топологическому произведению некоторого связного и односвязного топологического пространства $\mathfrak{S}_0$ на окружности $\mathbb{T}$. Гомеоморфизм $\mathfrak{S} \sim \mathfrak{S}_0 \times \mathbb{T}$ порождает соответствие $X \to e^{i\varphi}$ (где $X \in \mathfrak{S}$, $e^{i\varphi} \in \mathbb{T}$) и многозначную функцию $\varphi = \operatorname{Arg} X$. Для непрерывной кривой $X(\cdot)\big|_0^T$ в $\mathfrak{S}$ приращение $\Delta \operatorname{Arg} X(\cdot)\big|_0^T$ определяется однозначно, а если $X(\cdot)\big|_0^T$ — замкнутая кривая, то $\Delta \operatorname{Arg} X(\cdot)\big|_0^T = 2\pi n$, где $n$ — целое, называемое индексом кривой ($n = \operatorname{ind} X(\cdot)$). Кривые индекса 0 и только они стягиваются в $\mathfrak{S}$ в точку.

Разным гомеоморфизмам $\mathfrak{S} \sim \mathfrak{S}_0 \times \mathbb{T}$ отвечают разные аргументы $\operatorname{Arg} X$. Полезно иметь явные формулы для аргументов на $\mathfrak{S}$. Оказывается [31], в качестве аргументов на $\mathfrak{S}$ могут быть приняты такие функции:

$$\operatorname{Arg}_* X = \sum_{X=1}^{m} \operatorname{Arg} \rho_k^+(X), \tag{28}$$

где $\rho_k^+(X)$ — собственное значение первого рода матрицы $X \in \mathfrak{S}$, также

$$\operatorname{Arg}_j X = \operatorname{Arg} \det [U_j - i V_j], \quad j = 1, 2, \quad \text{где} \quad X = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \\ V_1 & V_2 \end{bmatrix}. \tag{29}$$

Здесь $U_j$, $V_j$ — матрицы порядка $m \times m$. Известны и другие явные формулы для аргументов на $\mathfrak{S}$ [31]. Аргументы (28), (29) и [31] эквивалентны в том смысле, что для замкнутых кривых приращения аргументов совпадают, а для любых незамкнутых кривых различаются не более чем на некоторую фиксированную постоянную.

Пусть $\tilde{\mathfrak{m}} \subset \mathfrak{S}$ — некоторое связное и односвязное в $\mathfrak{S}$ множество. (Последнее означает, что любая замкнутая кривая в $\tilde{\mathfrak{m}}$ имеет индекс 0.) Пусть $\mathfrak{m} \subset L$ — множество всех гамильтонианов с матрицами монодромии из $\tilde{\mathfrak{m}}$. Множество $\mathfrak{m}$ можно отождествить с множеством соответствующих эволюционных операторов, — кривых $\mathrm{X}(\cdot)\big|_0^T$ в $\mathfrak{S}$, таких, что $\mathrm{X}(0) = I_{2m}$, $\mathrm{X}(T) \in \tilde{\mathfrak{m}}$. Будем говорить, что кривые $\mathrm{X}_1(\cdot)$, $\mathrm{X}_2(\cdot)$ (где $\mathrm{X}_1(0) = \mathrm{X}_2(0) = I_{2m}$, $\mathrm{X}_1(T) \in \tilde{\mathfrak{m}}$, $\mathrm{X}_2(T) \in \tilde{\mathfrak{m}}$) гомотопны по модулю $\tilde{\mathfrak{m}}$ (писать $\mathrm{X}_1(\cdot) \sim \mathrm{X}_2(\cdot) \bmod \tilde{\mathfrak{m}}$), если одну кривую можно непрерывно деформировать в другую, не выводя конца из $\tilde{\mathfrak{m}}$. Это условие, очевидно, эквивалентно существованию в $\mathfrak{m} \subset L$ непрерывной кривой, соединяющей соответствующие гамильтонианы $H_1(\cdot) \in \mathfrak{m}$ и $H_2(\cdot) \in \mathfrak{m}$. Кривым $\mathrm{X}_1(\cdot)$ и $\mathrm{X}_2(\cdot)$, не гомотопным по модулю $\tilde{\mathfrak{m}}$, отвечают гамильтонианы из разных компонент связности множества $\mathfrak{m}$ (рис.2). Итак, $\mathfrak{m} \subset L$ распадается на сумму непересекающихся связных подмножеств $\mathfrak{m}_n$, $n = 0, \pm 1, \ldots$, отвечающих гомотопным по модулю $\tilde{\mathfrak{m}}$ кривым. Пусть $\mathrm{X}_* \in \tilde{\mathfrak{m}}$ и $\mathrm{X}_*(\cdot)$ — произвольная фиксированная кривая с началом $\mathrm{X}_*$ и с концом $I_{2m}$. Кривой $\mathrm{X}(\cdot)$ с концом $\mathrm{X}(T) \in \tilde{\mathfrak{m}}$ сопоставим „дополненную кривую" $\hat{\mathrm{X}}(\cdot)$, составленную последовательно из кривой $\mathrm{X}(\cdot)$, кривой $Y(\cdot)$, соединяющей (произвольно) в $\tilde{\mathfrak{m}}$ матрицу $\mathrm{X}(T)$ с $\mathrm{X}_*$ и кривой $\mathrm{X}_*(\cdot)$, (На рис. 2 изображены дополненные кривые для $\mathrm{X}_1(\cdot)$ и $\mathrm{X}_2(\cdot)$.) Так как $\hat{\mathrm{X}}(\cdot)$ — замкнутая кривая, то

$$\Delta \operatorname{Arg} \hat{\mathrm{X}}(\cdot) = 2n\pi. \tag{30}$$

Поскольку $\tilde{\mathfrak{m}}$ односвязно в $\mathfrak{S}$, то целое число $n$ не зависит от выбора кривой $Y(\cdot)$, оно определяется лишь кривой $\mathrm{X}(\cdot)$ (и фиксированной кривой $\mathrm{X}_*(\cdot)$). Очевидно, что множество $\mathfrak{m}_n$ можно определить как множество всех гамильтонианов, эволюционный оператор которых удовлетворят условиям: $\mathrm{X}(T) \in \tilde{\mathfrak{m}}$ и выполнено (30).

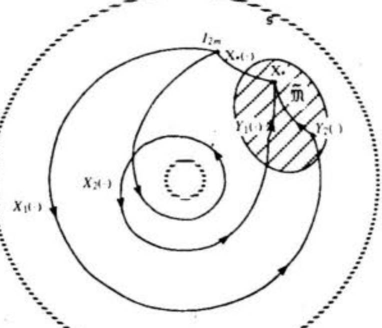


Рис. 2

Все изложенное справедливо и в случае, когда матрица $X_*$ взята на границе множества $\tilde{\mathfrak{m}}$, если только множество $\tilde{\mathfrak{m}} \cup X_*$ односвязно в $\mathfrak{S}$.

Возьмем теперь в качестве $\tilde{\mathfrak{m}}$ множество $\tilde{\mathfrak{m}} = \tilde{O}^{(\mu)}$ всех симплектических матриц указанного выше вида со спектральным типом $\mu$. Легко показать, что $\tilde{O}^{(\mu)}$ — связное множество. Очевидно, что для замкнутой кривой $Y(T) \in \tilde{O}^{(\mu)}$ выполнено $\Delta \operatorname{Arg}_* Y(\cdot) = 0$, т. е. $\operatorname{ind} Y(\cdot) = 0$. Действительно, собственные значения первого рода $\rho_j^+(Y(t))$, расположенные на верхней (на нижней) полуокружности $|\rho| = 1$, перемещаются лишь по ней, и начальное положение от конечного отличается лишь их перестановкой. (Точки $(+1)$ и $(-1)$ запрещены, так как в них происходит совпадение мультипликаторов разного рода.) Итак, $\tilde{O}^{(\mu)}$ односвязно в $\mathfrak{S}$. Это же верно для $\tilde{O}^{(\mu)} \cup I_{2n}$, поэтому в качестве $X_*$ можно взять $X_* = I_{2m}$. Тогда $X_*(t) \equiv I_{2m}$. Согласно изложенному выше соответствующее множество гамильтонианов распадается на области $O_n^{(\mu)}$; для $H(\cdot) \in O_n^{(\mu)}$ выполнено (30). Пусть

$$\theta_k = \arg \rho_k^+ [X(T)] \quad (-\pi < \theta_k < +\pi) \tag{31}$$

— аргументы мультипликаторов первого рода уравнения с $H(\cdot) \in O_n^{(\mu)}$. Пусть $Y(\cdot)$ — кривая, соединяющая в $\tilde{O}^{(\mu)}$ матрицу $X(T)$ с $I_{2m}$. Тогда $\Delta \operatorname{Arg}_* Y(\cdot) = -\sum_k \theta_k$. Поэтому для $\operatorname{Arg} = \operatorname{Arg}_*$ формула (30) принимает вид

$$\sum_{k=1}^{m} \Delta \operatorname{Arg} \rho_j^+ [X(t)]\Big|_0^T - \sum_{k=1}^{m} \theta_k = 2\pi n. \tag{32}$$

Уточняя приведенные рассуждения, получаем такой результат [5]: *множество* O *гамильтонианов* $H(\cdot)$ *сильно устойчивых уравнений* $J\dot{x} = H(t)x$ *состоит из счетного числа непересекающихся областей* $O_n^{(\mu)}$ ($\mu = \mu_1, \ldots, \mu_{2^k}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$), *каждая из которых является множеством всех гамильтонианов со спектральным типом* $\mu$ *и таких, что выполнено* (32).

Используя другие аргументы, можно получить другие формулы для индекса $n$. (В частности, в [5] приведена несколько иная формула.) Легко также показать, что области $O^{(\mu)}$ с одинаковым $\mu$ аффинно гомеоморфны.

Сравнительно недавно стало известно, что к исследованию гамильтоновых уравнений $J\dot{x} = H(t)x$ приводят некоторые линейно-квадратичные задачи оптимального управления и задачи абсолютной устойчивости нелинейных систем. В этой проблематике возникает необходимость изучения структуры множества $\mathcal{H}$ гамильтонианов полностью неустойчивых уравнений. (Полная неустойчивость означает, что нет мультипликаторов на единичной окружности.) Из рассуждений, аналогичных приведенным выше, следует вывод [33], что $\mathcal{H}$ состоит из счетного числа аффинно гомеоморфных областей $\mathcal{H}_n$, $n = 0, \pm 1, \ldots$, причем $H(\cdot) \in \mathcal{H}_n$, если помимо полной неустойчивости выполнено

$$\sum_{j=1}^{m} \Delta \operatorname{Arg}_* \rho_j^+ [X(t)]\Big|_0^T = n\pi. \tag{33}$$

Используя аргумент (29) (например, для $j = 1$), получаем эквивалентное условие [33]

$$\Delta \operatorname{Arg} \det [U(t) - iV(t)] \Big|_0^T = n\pi, \tag{34}$$

где столбцы матрицы $\begin{bmatrix} U(t) \\ V(t) \end{bmatrix}$ — базис в устойчивом подпространстве $\Lambda(t)$ уравнения с $H(\cdot) \in \mathfrak{H}$. (Подпространство $\Lambda(t)$, очевидно, лагранжево). Так как $U(t+T) = U(t)K$, $V(t+T) = V(t)K$, то $\Lambda_+(t)$ замкнутая кривая в лагранжевом грассманиане; формула (34) показывает, что $n$ — ее индекс Маслова.

Аналогично, индекс Гельфанда и Лидского области устойчивости $O_n^{(\mu)}$ в формуле (32) (и в формуле (6.6) из [5]) можно трактовать как индекс Маслова некоторой кривой в лагранжевом грассманиане. (Индексы Маслова, как известно, появились совсем в иной проблематике (см., например, [34]).)

Описание [5] структуры множества O прояснило и упорядочило деятельность по установлению критериев устойчивости. Легко показать, что критерий, гарантирующий оценку $\Lambda_+ > 1$, доставляет гамильтонианы $H(\cdot) \in O_n^{(\mu)}$, где $\mu = (+, +, \ldots, +)$, $n = 0$. (Это уточняет изложение.) Разные преобразования [3], [30] (гл. 3, §6) позволили распространить эти критерии на области с любыми $\mu$ и $n$. Разработаны приемы, позволяющие любой критерий для систем с $m = 1$ преобразовать в разного типа критерии для $m > 1$ и для любой области $O_n^{(\mu)}$.

Укажем на один из способов, позволяющий это делать. Множество $\mathfrak{m} \subset L$ называется *направленно широким*, если для любых $H_1(t)$, $H_2(t)$ и $H(t)$ из $L$, таких, что $H_1(t) \le H(t) \le H_2(t)$ из условия

$$H(t, s) = sH_1(t) + (1-s)H_2(t) \in \mathfrak{m} \quad (\forall s \in [0, 1]),$$

следует, что $H(t) \in \mathfrak{m}$. Теорема [30] (гл. 3, § 6.2): *все области* $O_n^{(\mu)}$ *направленно широкие.* Взяв в качестве $H_1(t)$ и $H_2(t)$ гамильтонианы уравнений, распадающихся на уравнения с $m = 1$, получим возможность перенесения критериев с $m = 1$ на случай $m > 1$. При этом получаем критерии для любой области $O_n^{(\mu)}$. В качестве $H_1(t)$ и $H_2(t)$ можно брать постоянные гамильтонианы.

Приведем еще один пример применения этой теоремы. Во введении упоминалась задача об условиях орбитальной устойчивости периодических лапласовых движений. Сформулированный во введении результат Ляпунова [32] (а его доказательство в [32] занимает 65 страниц содержит формулировку „... если эксцентриситет достаточно мал").* Применение теории о направленной выпуклости для постоянных $H_1(t)$ и $H_2(t)$ дает возможность получить [33] после простых вычислений явную оценку для $\varepsilon$ и $\mu$: устойчивость имеет место при выполнении одного из условий: $4\varepsilon/3 + 4\varepsilon^2/3 < \mu < 1/12 - \varepsilon/2 + 5\varepsilon^2/12$ или $1/12 + \varepsilon/2 + 5\varepsilon^2/12 < \mu < 1/9 - 8\varepsilon/9 + 16\varepsilon^2/9$. (Усложняя рассуждения [35], эти области можно было бы несколько расширить; при $\mu > 1/9$ и достаточно малых $\varepsilon$ имеет место неустойчивость [35].)

Интересно заметить, что сам результат Ляпунова [32], сформулированый во введении (см. формулу (9)), следует почти без вычислений из формулы Крейна для критических частот: $\theta = (\omega_1 + \omega_k)/N$. Это один из многих, но таинственных примеров того, как разработанная теория иногда очень просто приводит к

* Для простоты мы ограничимся изложением лишь случая ньютоновского притяжения. Аналогичные утверждения справедливы и для общего случая.

результату, получаемому ранее с помощью сложнейших и виртуозных выкладок. Другой аналогичный пример: важное неравенство $(n-1)A_n^2 > nA_{n-1}A_{n-1}$ для коэффициентов, разложения характеристической функции $A(\lambda) = 1 - A_1\lambda + A_2\lambda^2 - \ldots$ уравнения Хилла $\ddot{y} + \lambda p(t)y = 0$, $p(t) \geq 0$ А. М. Ляпунов устанавливает в [36] посредством прямых и очень сложных выкладок [36, с. 421 – 435]. На этом неравенстве основан метод А. М. Ляпунова [36] исследования уравнения Хилла $\ddot{y} + p(t)y = 0$ с $p(t) \geq 0$. Марк Григорьевич в работе [23] приводит удивительно простое доказательство этого неравенства, использующее теорему Адамара и указанную выше связь с самосопряженной краевой задачей. Способ М. Г. Крейна дал возможность распространить метод Ляпунова на случай знакопеременного коэффициента $p(t)$ в уравнении Хилла [30] (гл., 7, § 2) и на другие случаи.

В работе [36] опять таки с помощью прямых сложных вычислений А. М. Ляпунов доказывает для $n = 2, 3$ оценку $A_n \leq (1/(2n)!)(T^2P_{\text{ср}})$ при $p(t) \geq 0$. А. М. Ляпунов высказывает предположение [35, с. 419] о справедливости и точности этой оценки для всех $n$ и пишет : „но нам не удалось доказать это". Марк Григорьевич нашел [26] неожиданное и простое доказательство справедливости этой гипотезы Ляпунова, — он показал, что она следует из одной общей, установленной им теоремы о ядерных операторах в гильбертовом пространстве.

Вернемся снова к критериям Ляпунова (7) и Жуковского (8). Критерий Жуковского выделяет гамильтонианы из всех областей устойчивости (которым может принадлежать гамильтониан (6)). Критерий Ляпунова — лишь из области $O_0^{(+)}$. Разнообразные признаки устойчивости, усиливающие критерий Ляпунова (7) и распространяющие его на другие области устойчивости, читатель может найти в [30] (гл. 8, § 4). Укажем на критерий Нейгауза и Лидского [37]

$$p(t) \geq \frac{k^2\pi^2}{T^2}, \quad \int_0^T \left|\sin\frac{k\pi t}{T}\right| \left[p(t-\tau) - \frac{k^2\pi^2}{T^2}\right] dt < \frac{2k\pi}{T} \tag{35}$$

($k$ — целое), на критерии Борга [38], Комленко [39].

Эти и другие критерии для скалярного уравнения Хилла с помощью теоремы о направленной выпуклости областей устойчивости распространяются на векторные уравнения $\ddot{y} + P(t)y = 0$, $y(t) \in \mathbb{R}^m$, $P(t+T) = P(t) = P(t)^*$.

В работах [40, 41] изучена структура областей устойчивости комплексных гамильтоновых уравнений $\tilde{J}\dot{x} = \tilde{H}(t)x$, где $\tilde{H}(t+T) = \tilde{H}(t) = \tilde{H}(t)^*$, $\tilde{J}^* = -\tilde{J}$ — комплексные матрицы, $\det\tilde{J} \neq 0$. (В обеих работах имеются незначительные неточности.)

Структура множества устойчивости для уравнений более общего вида $Q(t)dx/dt = (S(t) - (1/2)\dot{Q}(t))x$, где $Q(t+T) = Q(t) = -Q(t)^*$, $\det Q(t) \neq 0$, $S(t+T) = S(t) = S(t)^*$, изучались В. Б. Лидским П. Б. Фроловым [42]. Неожиданно оказалось, что как в комплексном, так и в вещественном случае имеется лишь конечное число областей устойчивости; выяснены их характеристики.

Многие из изложенных выше результатов М. Г. Крейна перенесены на бесконечномерные гамильтоновы уравнения [4, 15, 16, 43, 44]. Первые результаты в этом направлении принадлежат В. И. Дергузову и, как отмечает Марк Григорьевич в [16, с. 47], именно они стимулировали его исследования по бесконечномерным системам.

Имеются разнообразные связи результатов рассматриваемого направления с другими разделами математики — вариационным исчислением, теорией операторов, симплектической геометрией, теорией абсолютной устойчивости, теорией адаптивных систем. Некоторые из них описаны в работе [45].

В заключение отметим следующее. Читатель, изучающий работы Марка Григорьевича, наглядно видит, насколько широким арсеналом аналитических средств он обладал. И создается впечатление, что иногда Марк Григорьевич выбирал то или иное оружие случайно, как первое, попавшее под руку. В ряде случаев он сам удивлялся тому, что пришлось использовать столь сильные средства анализа [1, с. 462], и, применяя совсем иные соображения и иной математический аппарат, находил в других работах более простые доказательства. Иногда читатель сам может более элементарно доказать какое-либо промежуточное утверждение. Но именно разнообразие и неожиданность используемых подходов и средств способствует прояснению глубоких связей между совсем разными на первый взгляд разделами математики и придает удивительное очарование математическому творчеству Марка Григорьевича.


1. *Крейн М. Г.* Основные положения теории $\lambda$-зон устойчивости канонической системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами // Сб. памяти А. А. Андронова – М.: Изд-во АН СССР, 1955. – С. 413 – 498.
2. *Крейн М. Г.* Обобщение некоторых исследований А. М. Ляпунова о линейных дифференциальных уравнениях с периодическими коэффициентами // Докл. АН СССР. – 1950. – **23**, №3. – С. 445 – 448.
3. *Крейн М. Г.* О признаках устойчивой ограниченности решений периодических канонических систем // Прикл. математика и механика. – 1955. – **19**, вып. 6. – С. 641 – 680.
4. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения. –М.: Наука, 1967. – 508 с.
5. *Гельфанд И. М., Лидский В. Б.* О структуре областей устойчивости линейных канонических систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами // Успехи мат. наук. – 1955. – **10**, вып. 1 (63). – С. 3 – 40.
6. *Крейн М. Г.* К теории целых матриц-функций экспоненциального типа // Укр. мат. журн. – 1951. – **3**, №2. – С. 164 – 173.
7. *Крейн М. Г.* Основные положения теории представления эрмитовых операторов с индексом дефекта $(m, m)$ // Там же. – 1949. – **1**, №2. – С. 1 – 65.
8. *Крейн М. Г.* О применении одного алгебраического предложения в теории матриц монодромии // Успехи мат. наук. – 1951. – **6**, вып. 1. – С. 171 – 177.
9. *Крейн М. Г.* О проблеме продолжения эрмитово положительных функций // Докл. АН СССР. –1940. – **26**, №1. – С. 17 – 22.
10. *Крейн М. Г., Любарский Г. Я.* Об аналитических свойствах мультипликаторов периодических канонических дифференциальных систем положительного типа // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1962. – **26**. – С. 549 – 572.
11. *Болотин В. В.* Динамическая устойчивость упругих систем. – М.: Гостехтеоретиздат, 1956. – 600 с.
12. *Крейн М. Г., Якубович В. А.* Гамильтоновы системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами // Тр. междунар. симп. по нелинейн. колебаниям. – 1963. – Т. 1. – С. 277 – 305. (Более подробное изложение: Киев: Ин-т математики АН УССР, 1961. – С. 1 – 54.)
13. *Якубович В. А.* О динамической устойчивости упругих систем // Докл. АН СССР. – 1958. – **121**, №4. – С. 602 – 605.
14. *Якубович В. А., Старжинский В. М.* Параметрический резонанс в линейных системах. – М.: Наука, 1987. – 328 с.
15. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1970. – 534 с.
16. *Крейн М. Г.* Введение в геометрию индефинитных $J$-пространств и теорию операторов в этих пространствах. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1956. – С. 15 – 92.
17. *Иохвидов И. С., Крейн М. Г.* Спектральная теория операторов в пространствах с индефинитной метрикой // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1956. – **5**. – С. 367 – 432.
18. *Крейн М. Г.* Решение обратной задачи Штурма–Лиувилля // Докл. АН СССР. – 1951. – **26**, №1. – С. 21 – 24.
19. *Крейн М. Г., Овчаренко И. Э.* К теории обратных задач канонического дифференциального уравнения // Докл. АН СССР. Сер. А. – 1982. – №2. – С. 14 – 18.
20. *Крейн М. Г.* Об обратных задачах теории фильтров и $\lambda$-зон устойчивости // Докл. АН СССР. – 1953. – **93**, №5. – С. 767 – 770.
21. *Крейн М. Г., Любарский Г. Я.* К теории полос пропускания периодических волноводов // Прикл. математика и механика. – 1961. – **25**, вып. 1. – С. 24 – 37.
22. *Krein M. G., Langer H.* On some mathematical principles in the linear theory of damped oscillations of continua, I, II // Integr. Equat. and Oper. Theory. – 1978. – **1**, №3; 4.

23. *Крейн М. Г.* О некоторых задачах на максимум и минимум для характеристических чисел и о ляпуновских зонах устойчивости. // Прикл. математика и механика. – 1951. – **15**, вып. 3. – С. 323 – 348.
24. *Крейн М. Г.* Лекции по теории устойчивости решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.-Киев: Ин-т математики АН УССР, 1964. – 186 с.
25. *Коваленко К. Р., Крейн М. Г.* О некоторых исследованиях А. М. Ляпунова по дифференциальным уравнениям с периодическими коэффициентами // Докл. АН СССР. – 1950. – **25**, №4. – С. 495 – 498.
26. *Крейн М. Г.* Об одном предположении А. М. Ляпунова // Функцион. анализ и его прил. – 1973. – **7**, вып. 3. – С. 45 – 54.
27. *Крейн М. Г.* О некоторых вопросах, связанных с кругом идей Ляпунова, и теории устойчивости // Успехи мат. наук. – 1948. – **3**, №3. – С. 166 – 169.
28. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* О влиянии некоторых трансформаций ядер интегральных уравнений на спектры этих уравнений // Укр. мат. журн. – 1961. – **13**, №3. – С. 12 – 38.
29. *Крейн М. Г.* О характеристической функции линейной канонической системы дифференциальных уравнений второго порядка с периодическими коэффициентами // Прикл. математика и механика. – 1957. – **21**, вып. 3. – С. 320 – 329.
30. *Якубович В. А., Старжинский В. М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. – М.: Наука, 1972. – 718 с.
31. *Якубович В. А.* Строение группы симплектических матриц и структура множества неустойчивых канонических систем с периодическими коэффициентами // Мат. сб. – 1958. – **44(86)**, №3. – С. 313 – 352.
32. *Ляпунов А. М.* Об устойчивости движения в одном частном случае задачи о трех телах. – Собр. соч. – М.; Л: Изд-во АН СССР, 1954. – Т. 1. – С. 327 – 401.
33. *Якубович В. А.* Линейно-квадратичная задача оптимизации и частотная теорема для периодических систем. II // Сиб. мат. журн. – 1990. – **31**, №6. – С. 176 – 191.
34. *Арнольд В. И.* О характеристическом классе, входящем в условия квантования // Функцион. анализ и его прил. – 1967. – **1**, вып. 1 – С. 1 –14.
35. *Полунин И. А., Якубович В. А.* Орбитальная устойчивость периодических лапласовых движений // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. 1. – 1988. – Вып. 3. – С. 106 – 108.
36. *Ляпунов А. М* Об одном ряде, встречающемся в теории линейных дифференциальных уравнений второго порядка с периодическими коэффициентами. – Собр. соч. – М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1956. – Т. 2. – С. 410 – 472.
37. *Нейгауз М. Г., Лидский В. Б.* Об ограниченности решений линейных систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами // Докл. АН СССР. – 1951. – **77**, №1. – С. 25 – 28.
38. *Borg G.* Über die Stabilität gewisser Klassen von linearen Differentialgleichungen // Arch. Mat., Astr. och Fys. – 1944. – **31A**, №1. – P. 1 –30.
39. *Комленко Ю. В.* О некоторых критериях неосцилляции и ограниченности решений линейных дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР. – 1965. – **164**, №2. – С. 270 – 272.
40. *Coppel W. A., Howe A.* On the stability of linear canonical Systems with periodic coefficients // J. Austral. Math. Soc. – 1965. – **5**, pt 2. – P. 169 – 195.
41. *Якубович В. А.* Строение функционального пространства комплексных канонических уравнений с периодическими коэффициентами // Докл. АН СССР. – 1961. – **139**, №1. – С. 54 – 57.
42. *Лидский В. Б., Фролов В. А.* Структура областей устойчивости самосопряженных систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами // Мат. сб. – 1966. – **71(113)**, вып. 1. – С. 48 – 64.
43. *Дергузов В. И.* Об устойчивости решений гамильтоновых уравнений Гамильтона с неограниченными операторными коэффициентами // Там же. – 1964. – **66(105)**, вып. 4. – С. 591 – 619.
44. *Фомин В. Н.* Математическая теория параметрического резонанса в линейных распределенных системах. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1972. – 240 с.
45. *Якубович В. А.* Неосцилляторность линейных периодических гамильтоновых уравнений и смежные вопросы // Алгебра и анализ. – 1991. – **3**, №5.


Получено 17. 06. 93