УДК 517.5

В.Ф. Бабенко, А.А. Лигун, доктора физ.-мат. наук (Днепропетр. ун-т)

НЕРАВЕНСТВА ТИПА БЕРНШТЕЙНА ДЛЯ $\mathcal{L}$-СПЛАЙНОВ

Доказаны новые неравенства типа неравенств Бернштейна для 2π-периодических $\mathcal{L}$-сплайнов, соответствующих дифференциальному оператору $\mathcal{L}_r(D)$ порядка r с постоянными вещественными коэффициентами.

Доведені нові нерівності типу нерівностей Бернштейна для 2π-періодичних $\mathcal{L}$-сплайнів, що відповідають диференціальному оператору $\mathcal{L}_r(D)$ порядку r з постійними дійсними коефіцієнтами.

1. Пусть C и L_p, $1 \le p \le \infty$, — пространства вещественных 2π–периодических функций с соответствующими нормами; $\|\cdot\|_{L_p} = \|\cdot\|_p$; C^r, $r \in \mathbb{N}$, — множество функций $f \in C$ таких, что $f^{(r)} \in C$; $C^0 = C$; L_p^r — множество функций $f \in C$ таких, что $f^{(r-1)}$ локально абсолютно непрерывна и $\|f^{(r)}\|_p < \infty$; $L_p^0 = L_p$; L_V^r — множество функций $f \in C$ таких, что $f^{(r-1)}$ локально абсолютно непрерывна и $\bigvee_0^{2\pi}(f^{(r)}) < \infty$; $\mathcal{T}_{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}$,—множество тригонометрических полиномов порядка не выше n; $S_{2n,r}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, — множество 2π–периодических полиномиальных сплайнов порядка r, дефекта 1, с узлами $l\pi/n$, $l \in \mathbb{Z}$.

В теории приближений важную роль играет неравенство С. Н. Бернштейна [1] для тригонометрических полиномов $\tau \in \mathcal{T}_{2n+1}$:

$$\|\tau^{(k)}\|_\infty \le n^k \|\tau\|_\infty, \tag{1}$$

которое обращается в равенство для полиномов вида $\tau(x) = a\cos n(x - x_0)$, a, $x_0 \in \mathbb{R}$. Это неравенство обобщалось в различных направлениях. Так, А. Зигмунд [2] при $p = q \in [1, \infty)$, Л. В. Тайков [3] при $p \in [1, \infty)$, $q = \infty$, и А. А. Лигун [4] при $p = 1$, $q \in (1, \infty)$ доказали, что для $\tau \in \mathcal{T}_{2n+1}$ справедливо неулучшаемое неравенство

$$\frac{\|\tau^{(k)}\|_p}{\|\cos(\cdot)\|_p} \le n^k \frac{\|\tau\|_q}{\|\cos(\cdot)\|_q}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Известны и другие обобщения и уточнения неравенств (1) и (2). Не останавливаясь на этом подробно, отметим лишь, что большинство из них можно найти в работах [5 – 9].

Известны также аналоги неравенств (1) и (2) для сплайнов. Обозначим через $\varphi_{n,r}$ r-й периодический интеграл с нулевым средним значением на периоде от функции $\varphi_{n,0}(x) = \operatorname{sgn}\sin nx$. В.М. Тихомиров [10] при $p = q = \infty$, Ю.Н. Субботин [11] при $p = q = 1$, А.А. Лигун [4, 12] при $p \in [1, \infty)$, $q = \infty$ и $p = 1$, $q \in (1, \infty)$, В. Ф. Бабенко и С. А. Пичугов [13] при $p = q = 2$ доказали, что для $s \in S_{2n,r}$, $n, r \in \mathbb{N}$, справедливо неулучшаемое неравенство

$$\frac{\|s^{(k)}\|_p}{\|\varphi_{n,r-k}\|_p} \le \frac{\|s\|_q}{\|\varphi_{n,r}\|_q}, \quad k = 1, \ldots, r. \tag{3}$$

По поводу других известных неравенств типа Бернштейна для сплайнов из $S_{2n,r}$ см., например, [9, 14].

В данной работе неравенства (3) обобщены на случай, когда оператор k-кратного дифференцирования заменяется более общим линейным дифференциальным оператором с постоянными коэффициентами (некоторые известные результаты такого типа можно найти в работах [9, 15, 16]). При этом проиллюстрируем возможности общего подхода, основанного на использовании теорем сравнения производных, перестановок и Σ-перестановок. Отметим, что, по-видимому, впервые соображения, связанные со сравнением производных, применил в этом круге вопросов С.Б. Стечкин [5]. По поводу применения при доказательстве неравенств типа Бернштейна теорем сравнения производных и перестановок см. также [8, 14, 17]. В данной статье получено также одно новое неравенство типа неравенства Колмогорова, которое представляет, по мнению авторов, и самостоятельный интерес.

2. Основные результаты. Сначала приведем необходимые определения и обозначения. Пусть $r \in \mathbb{N}$;

$$\mathcal{L}_r(y) = a_0 y^r + a_1 y^{r-1} + \ldots + a_r \tag{4}$$

— произвольный алгебраический полином степени r с вещественными коэффициентами и $\mathcal{L}_r(D) = a_0 D^r + a_1 D^{r-1} + \ldots + a_r$ — соответствующий ему дифференциальный оператор $(D = d/dx)$.

Функцию $s \in C^{r-1}$ назовем периодическим $\mathcal{L}$-сплайном с равноотстоящими узлами $l\pi/n,\ l \in \mathbb{Z}$, соответствующим оператору $\mathcal{L}_r(D)$, если $\mathcal{L}_r(D)s \in S_{2n,\,0}$. Множество всех таких $\mathcal{L}$-сплайнов обозначим через $S_{2n,\,\mathcal{L}_r}$. Ясно, что $S_{2n,(\cdot)^r} = S_{2n,r}$.

Через $\varphi_{n,\mathcal{L}_r}(x)$ обозначим 2π–периодическую и имеющую нулевое среднее значение на периоде функцию такую, что $\mathcal{L}_r(D)\varphi_{n,\mathcal{L}_r} = \varphi_{n,0}$.

Если $f \in L_1$ и $f \geq 0$ почти всюду, то через $P(f, t)$ будем обозначать убывающую перестановку (см., например, [18], § 5.4) сужения f на период. Если еще $g \in L_1$ и $g \geq 0$ почти всюду и для любого $x \in [0, 2\pi]$

$$\int_0^x P(f,t)\,dt \leq \int_0^x P(g,t)\,dt,$$

то будем писать

$$f \prec g. \tag{5}$$

Как известно (см., например, [18, с. 96]), если $f, g \in L_p$, $1 \leq p \leq \infty$, то из справедливости (5) следует $\|f\|_p \leq \|g\|_p$.

Теперь сформулируем основные результаты.

Теорема 1. *Пусть $n, r \in \mathbb{N}$; $\mathcal{L}_r$-полином вида (4) с корнями $y_1, \ldots, y_r$ такой, что*

$$\mathcal{L}_r(y) = \mathcal{L}_k(y)\,\mathcal{L}_{r-k}(y), \tag{6}$$

где $\mathcal{L}_k(y)$ и $\mathcal{L}_{r-k}(y)$ — полиномы с вещественными коэффициентами степеней k и $r-k$ соответственно. Если $n > 2\max\{|\mathrm{Im}\, y_k|: k = 1, \ldots, r\}$, то для любого $\mathcal{L}$-сплайна $s \in S_{2n,\,\mathcal{L}_r}$ справедливо неравенство

$$\frac{\|\mathcal{L}_k(D)s\|_p}{\|\varphi_{n,\mathcal{L}_{r-k}}\|_p} \leq \frac{\|s\|_p}{\|\varphi_{n,\mathcal{L}_r}\|_p},\quad p = 1, 2, \infty. \tag{7}$$

В частности,

$$(2\pi)^{-1/p} \| \mathcal{L}_r(D)s \|_p \le \frac{\| s \|_p}{\left\| \varphi_{n,\mathcal{L}_r} \right\|_p}. \tag{8}$$

Если, дополнительно, $\mathcal{L}_k(y)$ *в* (6) *таков, что* $\mathcal{L}_k(0) = 0$, *то для любого* $s \in$ $\in S_{2n,\mathcal{L}_r}$ *и любого* $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\left| \mathcal{L}_k(D)s - \lambda \right| \prec \left| \frac{\| s \|_\infty}{\left\| \varphi_{n,\mathcal{L}_r} \right\|_\infty} \varphi_{n,\mathcal{L}_{r-k}} - \lambda \right|, \tag{9}$$

и, следовательно, для любого $p \in [1, \infty]$

$$\frac{\left\| \mathcal{L}_k(D)s \right\|_p}{\left\| \varphi_{n,\mathcal{L}_{r-k}} \right\|_p} \le \frac{\| s \|_\infty}{\left\| \varphi_{n,\mathcal{L}_r} \right\|_\infty}. \tag{10}$$

Если полином $\mathcal{L}_r$ *вида* (6) *имеет только вещественные корни, то для любого* $s \in S_{2n,\mathcal{L}_r}$ *и любого* $q \in [1, \infty]$

$$\frac{\bigvee\limits_0^{2\pi}(\mathcal{L}_k(D)s)}{\bigvee\limits_0^{2\pi}(\varphi_{n,\mathcal{L}_{r-k}})} \le \frac{\| s \|_q}{\left\| \varphi_{n,\mathcal{L}_r} \right\|_q}, \tag{11}$$

и, следовательно, если $\mathcal{L}_k(0) = 0$, *то*

$$\frac{\left\| \mathcal{L}_k(D)s \right\|_1}{\left\| \varphi_{n,\mathcal{L}_{r-k}} \right\|_1} \le \frac{\| s \|_q}{\left\| \varphi_{n,\mathcal{L}_r} \right\|_q}. \tag{12}$$

Неравенства (9) и (10) анонсированы в [9].

Аналоги неравенств (6) — (12) верны также для тригонометрических полиномов. Их нетрудно вывести из результатов работ [3, 4, 9], или доказать подобно тому, как ниже будет доказана теорема 1 (доказательство при этом только упростится). Для полноты изложения приведем эти неравенства.

Теорема 2. *Пусть* $n, r \in \mathbb{N}$; $\mathcal{L}_r$ — *многочлен вида* (4) *с корнями* $y_1, \ldots, y_r$ *и* $\tau \in \mathcal{T}_{2n+1}$. *Если* $n > 2 \max\{|\operatorname{Im} y_k| : k = 1, \ldots, r\}$, *то* $| \mathcal{L}_r(D)\tau | \prec | \mathcal{L}_r(in) | \, |\tau|$, *и, следовательно, для любого* $p \in [1, \infty]$ $\| \mathcal{L}_r(D)\tau \|_p \le | \mathcal{L}_r(in) | \, \| \tau \|_p$.

Если, дополнительно, $\mathcal{L}_r(0) = 0$, *то для любого* $\lambda \in \mathbb{R}$

$$| \mathcal{L}_r(D)\tau - \lambda | \prec | \, \| \tau \|_\infty | \mathcal{L}_r(in) | \cos(\cdot) - \lambda \, |$$

и

$$\| \mathcal{L}_r(D)\tau \|_1 \, |\cos(\cdot)| \prec 4 \cdot | \mathcal{L}_r(in) | \, | \tau(\cdot) |,$$

и, следовательно, для любых $p, q \in [1, \infty]$

$$\frac{\left\| \mathcal{L}_r(D)\tau \right\|_p}{\| \cos(\cdot) \|_p} \le \left| \mathcal{L}_r(in) \right| \| \tau \|_\infty$$

и

$$\frac{\left\| \mathcal{L}_k(D)\tau \right\|_1}{4 \left| \mathcal{L}_r(in) \right|} \le \frac{\| \tau \|_q}{\| \cos(\cdot) \|_q}.$$

3. Приведем результаты, которые будут играть основную роль при доказательстве теоремы 1. Следующая теорема обобщает теорему А. Н Колмогорова о сравнении производных (см., [19], § 5, 6) и содержится, например, в [8] (предложение 3. 2. 2).

Теорема 3. *Пусть функции f и φ непрерывно дифференцируемы на всей числовой оси; функция φ имеет период $2l$ и на интервале $(a, a+2l)$, где a — точка абсолютного экстремума функции φ, найдется точка c такая, что φ строго монотонна на каждом из интервалов (a, c) и $(c, a+2l)$. Пусть, кроме того, при любом y на каждом промежутке монотонности φ разность $\varphi(\cdot) - \varphi(\cdot - y)$ или не меняет знак или меняет его ровно один раз (с "+" на "–" там, где φ убывает, и с "–" на "+" там, где φ возрастает) и $\min_t \varphi(t) \le f(x) \le \max_t \varphi(t)$. Тогда если точки x и y таковы, что $\varphi(x) = f(y)$ и $\varphi'(x)f'(y) \ge 0$, то $|f'(y)| \le |\varphi'(x)|$.*

Следующая теорема (см., например, [8], предложение 3. 2. 7) является обобщением теоремы Н.П. Корнейчука [19] (теорема 6. 8. 1).

Теорема 4. *Пусть функции f и φ удовлетворяют условиям теоремы 3 при $l = 2\pi/n$, $n \in \mathbb{N}$, и функция f имеет период 2π. Пусть, кроме того, f' и φ' также удовлетворяют условиям теоремы 3 при $l = 2\pi/n$. Тогда для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ $|f' - \lambda| \prec |\varphi' - \lambda|$.*

Обозначим через $\nu(q)$ число перемен знака на периоде 2π–периодической функции q. Если функция f дифференцируема в точке x и $a \in \mathbb{R}$, то $\varphi'(x) + af(x) = e^{-ax}(f(x)e^{ax})'$. Отсюда и из теоремы Ролля следует, что для любой кусочно-непрерывно дифференцируемой 2π-периодической функции f и любого $a \in \mathbb{R}$

$$\nu(f' + af) \ge \nu(f). \tag{13}$$

Далее для любой функции $f \in C^2$ справедливо тождество (см., например, [15])

$$(D^2 - 2\gamma D + \gamma^2 + \alpha^2)f(x) =$$
$$= \frac{e^{\gamma(x-a)}}{\sin\alpha(x-a)} D\Big(\sin^2\alpha(x-a) D\big(e^{-\gamma(x-a)}\sin^{-1}\alpha(x-a)f(x)\big)\Big).$$

Из этого тождества следует, что если $f \in C^1$, f'' кусочно-непрерывна, $f(b) = f(a) = 0$, $b - a < \pi/\alpha$ и $f(x) \not\equiv 0$ на (a, b), то найдется точка $\xi \in (a, b)$, такая, что $\mathcal{L}(D)f(x)\operatorname{sgn} f(\xi) < 0$, где $\mathcal{L}(D) = D^2 - 2\gamma D + \gamma^2 + \alpha^2$. Таким образом, если длина максимального промежутка знакопостоянства f не превышает π/α, то

$$\nu(\mathcal{L}(D)f) \ge \nu(f). \tag{14}$$

Пусть $\varphi_{\lambda,0}(x) = \operatorname{sgn}\sin\lambda x$, $\lambda > 0$, и $\varphi_{\lambda,\mathcal{L}_r}(x)$ есть $2\pi/\lambda$-периодическое решение уравнения $\mathcal{L}_r(D)f(x) = \varphi_{\lambda,0}(x)$, а $g_{\lambda,\mathcal{L}_r}(x) = (4\lambda)^{-1}\varphi_{\lambda,\mathcal{L}_r}(x)$. Ясно, что $\varphi_{\lambda,\mathcal{L}_r}(x + \pi/\lambda) = -\varphi_{\lambda,\mathcal{L}_r}(x)$ для любого x. Учитывая (13) и (14), нетрудно проверить, что если $\lambda > 2\max\{|\operatorname{Im} y_k| : k = 1, \ldots, r\}$ (y_k — корни полинома $\mathcal{L}_r$) и x_0 — точка абсолютного минимума функции $\varphi_{\lambda,\mathcal{L}_r}$, то на интервале $(x_0, x_0 + 2\pi/\lambda)$ найдется точка y_0 такая, что $\varphi_{\lambda,\mathcal{L}_r}(x)$ строго возрастает, если $x \in (x_0, y_0)$, и строго убывает, если $x \in (y_0, x_0 + 2\pi/\lambda)$.

Через $\Pi(f; x)_{[0, 2\pi/\lambda]}$ будем обозначать Σ-перестановку Н.П. Корнейчука сужения на период $2\pi/\lambda$-периодической функции f (определение и свойства

Σ-перестановок можно найти в [19] (§ 6. 4). При $\lambda = 1$ вместо $\Pi(f; x)_{[0, 2\pi]}$ будем писать $\Pi(f; x)$. Положим при $\lambda > 0$

$$\Phi_{\lambda, \mathcal{L}_r}(x) = \begin{cases} \lambda\Pi(g_{\lambda, \mathcal{L}_r}; x)_{[0, 2\pi/\lambda]}, & 0 \le x \le \pi / \lambda; \\ 0, & x \ge \pi / \lambda. \end{cases}$$

Следующее утверждение при $\mathcal{L}_r(y) = y^r$ есть хорошо известная теорема Н. П. Корнейчука (см. [19], § 6. 7) о сравнении Σ-перестановок.

Теорема 5. *Пусть* $f \in L_V^r$, $r \in \mathbb{N}$, $\bigvee\limits_0^{2\pi}(\mathcal{L}_r f) \le 1$,

$$\lambda > 2 \max\{|\operatorname{Im} y_k|: k = 1, \ldots, r\} \tag{15}$$

и таково, что

$$\bigvee_0^{2\pi}(f) \le 2\Phi_{\lambda, \mathcal{L}_r}(0). \tag{16}$$

Если для заданного $x \in (0, 2\pi)$

$$\Pi(f, x) = \Phi_{\lambda, \mathcal{L}_r}(x) \tag{17}$$

и существует $\Pi'(f, x)$, *то*

$$|\Pi'(f, x)| \le |\Phi'_{\lambda, \mathcal{L}_r}(x)|. \tag{18}$$

При $\lambda = n$ это утверждение доказано в [20].

Доказательство. Предположим сначала, что $\lambda = m / n$, $m, n \in \mathbb{N}$. Условие (16) означает, что

$$\bigvee_0^{2\pi n}(f) \le \bigvee_0^{2\pi n}(g_{m/n, \mathcal{L}_r}). \tag{19}$$

Пусть $f = a + \sum_k f_k$ — разложение сужения на $[b, b + 2\pi n]$ (b — точка абсолютного минимума, равного $|a|$, функции $|f|$) функции f на простые (см., например, [19], § 6.3), $[\alpha_k, \beta_k]$ — носитель f_k и $[\alpha'_k, \beta'_k] = \{t \in [\alpha_k, \beta_k]: |f_k(t)| = \max\limits_u |f_k(u)|\}$. Обозначим через $A(x)$ множество индексов k таких, что $\beta'_k - \alpha'_k \le x \le \beta_k - \alpha_k$. Если $k \in A(x)$, то через t_k и τ_k обозначим такие точки из $[\alpha_k, \beta_k]$, что $\tau_k - t_k = x$ и $f_k(t_k) = f_k(\tau_k)$ (и, следовательно, $f(t_k) = f(\tau_k)$).

Будем считать, что интервалы (t_k, τ_k), $k = 1, \ldots, l$, перенумерованы слева направо, и пусть $t_{l+1} = t_1 + 2\pi n$, $\tau_{l+1} = \tau_1 + 2\pi n$. Если $\operatorname{sgn} f(t_k) = \operatorname{sgn} f(t_{k+1})$ при некотором k и на отрезке $[\tau_k, t_{k+1}]$ функция f не меняет знак, то через ξ'_k и ξ''_k обозначим точку абсолютного минимума $|f(t)|$ на $[\tau_k, t_{k+1}]$. Если же $\operatorname{sgn} f(t_k) = \operatorname{sgn} f(t_{k+1})$ и f меняет знак на отрезке $[\tau_k, t_{k+1}]$, то через ξ'_k обозначим такую точку из $[\tau_k, t_{k+1}]$, что $f(\xi'_k) = 0$ и $\operatorname{sgn} f(t) = -\operatorname{sgn} f(t_k)$ для всех $t > \xi'_k$ и достаточно близких к ξ'_k, а через ξ''_k — такую точку из $[\tau_k, t_{k+1}]$, что $f(\xi''_k) = 0$ и $\operatorname{sgn} f(t) = -\operatorname{sgn} f(t_k)$ для всех $t < \xi''_k$ и достаточно близких к ξ''_k.

Пусть $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_{2j}$ — перенумерованные в неубывающем порядке точки t_k и ξ'_k, а $y_1 \le y_2 \le \ldots \le y_{2j}$ — перенумерованные в неубывающем порядке точки τ_k и ξ''_k. Положим $f_*(t) = 2\sum_{k=1}^{2j}(-1)^k f(t + x_k - x_1)$. Тогда

$$f_*(t) = 2\sum_{k=1}^{2j}(-1)^k (f(t + x_k - x_1) - f(t + x_{k+1} - x_1))$$

($x_{2j+1} = x_1 + 2\pi n$), и с учетом (19) получаем

$$\| f_* \|_\infty \le \bigvee_0^{2\pi n}(f) \le \bigvee_0^{2\pi n}(g_{m/n,\mathcal{L}_r}) = n \| \varphi_{m/n,\mathcal{L}_r} \|_\infty. \tag{20}$$

Кроме того,

$$\| \mathcal{L}_r(D) f_* \|_\infty \le \bigvee_0^{2\pi n}(\mathcal{L}_r(D) f) \le n = n \| \mathcal{L}_r(D)\, \varphi_{m/n,\mathcal{L}_r} \|_\infty. \tag{21}$$

В силу (20), (21) с учетом (13) — (15) для любого $c \in \mathbb{R}$

$$\nu\,(f_*(\cdot + c) - n\varphi_{m/n,\mathcal{L}_r}(\cdot)) \le 2m$$

(здесь $\nu(f)$ — число перемен знака f на $[0, 2\pi n]$). Отсюда и из теоремы 3 следует, что если

$$f_*(t_*) = n\varphi_{m/n,\mathcal{L}_r}(\tau_*) \tag{22}$$

и

$$f_*'(t_*)\, \varphi_{m/n,\mathcal{L}_r}'(\tau_*) \ge 0, \tag{23}$$

то

$$| f_*'(t_*) | \le n | \varphi_{m/n,\mathcal{L}_r}'(\tau_*) |. \tag{24}$$

Пусть $t_* = x_1$ и τ_* выбрано из условий (22) и (23). Тогда выполняется (24) и, кроме того,

$$| f_*'(x_1) | \le 2\sum_{k=1}^{2j} | f'(x_k) |. \tag{25}$$

Учитывая определение функции f_* и условие (17), имеем

$$f_*(t_*) = f_*(x_1) = 2\Pi(f, x) = 2\Phi_{m/n,\mathcal{L}_r}(x) = n\varphi_{m/n,\mathcal{L}_r}(\tau_*).$$

Следовательно, в силу (24) и (25)

$$\sum_{k=1}^{2j} | f'(x_k) | \le \tfrac{1}{2} | n\varphi_{m/n,\mathcal{L}_r}'(\tau_*) |. \tag{26}$$

На том интервале знакопостоянства $\varphi_{m/n,\mathcal{L}_r}$, на котором лежит τ_*, имеется единственная точка τ_{**} такая, что

$$\varphi_{m/n,\mathcal{L}_r}(\tau_{**}) = \varphi_{m/n,\mathcal{L}_r}(\tau_*),$$

$$\varphi_{m/n,\mathcal{L}_r}'(\tau_*)\varphi_{m/n,\mathcal{L}_r}'(\tau_{**}) < 0,\ | \tau_{**} - \tau_* | = x,$$

$$n | \varphi_{m/n,\mathcal{L}_r}(\tau_*) | = n | \varphi_{m/n,\mathcal{L}_r}(\tau_{**}) | = 2\Phi_{m/n,\mathcal{L}_r}(x).$$

Аналогично (26), но используя вместо функции $f_*(t)$ функцик

$$f_{**}(t) = 2\sum_{k=1}^{2j}(-1)^k (f(t + y_k - y_1),$$

устанавливаем, что

$$\sum_{k=1}^{2j} | f'(y_k) | \le \tfrac{1}{2} | n\varphi_{m/n,\mathcal{L}_r}'(\tau_{**}) |. \tag{27}$$

Так как [18] (теорема 7. 2. 1)

$$| \Pi'(f, x) | = \sum_{k \in A(x)} \left(\frac{1}{|f'(t_k)|} + \frac{1}{|f'(\tau_k)|} \right)^{-1} \le \sum_{k=1}^{2j} \left(\frac{1}{|f'(x_k)|} + \frac{1}{|f'(y_k)|} \right)^{-1}$$

и для любых $a_k, b_k > 0$

$$\sum_k \left(\frac{1}{a_k}+\frac{1}{b_k}\right)^{-1} \le \left(\left(\sum_k a_k\right)^{-1}+\left(\sum_k b_k\right)^{-1}\right)^{-1},$$

то

$$|\Pi'(f,x)| \le \left(\left(\sum_{k=1}^{2j}\left|f'(x_k)\right|\right)^{-1}+\left(\sum_{k=1}^{2j}\left|f'(y_k)\right|\right)^{-1}\right)^{-1}.$$

Отсюда и из неравенств (26) и (27) получаем

$$|\Pi'(f,x)| \le \tfrac{1}{2n}(|\varphi_{m/n,\mathcal{L}_r}(\tau_*)|^{-1}+|\varphi'_{m/n,\mathcal{L}_r}(\tau_{**})|^{-1})^{-1} = \left|\Phi'_{m/n,\mathcal{L}_r}(x)\right|.$$

Пусть теперь λ — произвольное число, удовлетворяющее условию (15). Предположим, что условия (16), (17) выполнены, а (18) превращается в неравенство противоположного смысла. Тогда найдется $\lambda_0 = m/n < \lambda$ (и, следовательно, такое, что $\Phi_{\lambda_0,\mathcal{L}_r}(0) > \Phi_{\lambda,\mathcal{L}_r}(0)$) и достаточно близкое к λ, а также точка x_0 такие, что

$$\Pi(f;x_0) = \Phi_{\lambda_0,\mathcal{L}_r}(x_0),\ |\Pi'(f,x_0)| > \left|\Phi'_{\lambda_0,\mathcal{L}_r}(x_0)\right|,$$

что противоречит предыдущему. Теорема доказана.

4. Доказательство неравенств (7) – (10). Не ограничивая общности рассуждений, можем считать, что полиномы $\mathcal{L}_r(y)$ и $\mathcal{L}_k(y)$ имеют соответственно вид

$$\mathcal{L}_r(y) = \prod_{l=1}^{m}(y^2-2\gamma_l y+\gamma_l^2+\alpha_l^2)\prod_{l=1}^{r-2m}(x-\beta_l)$$

и

$$\mathcal{L}_k(y) = \prod_{l=1}^{m_1}(y^2-2\gamma_l y+\gamma_l^2+\alpha_l^2)\prod_{l=1}^{k-2m_1}(y-\beta_l),$$

где β_l — вещественные нули полинома $\mathcal{L}_r(y)$, а $\gamma_l + i\alpha_l$ — его комплексные нули.

Определим полиномы $\mathcal{L}_{j,r}$, $j = 1, 2,\ldots, r-k$, равенствами

$$\mathcal{L}_{j,r}(y) = y^2-2\gamma_j y+\gamma_j^2+\alpha_j^2,\ \ j = 1, 2,\ldots, m_1,$$

$$\mathcal{L}_{j,r}(y) = y-\beta_{j-m_1},\ \ j = m_1+1, 2,\ldots, k-m_1,$$

$$\mathcal{L}_{j,r}(y) = y^2-2\gamma_{j-k+2m_1}y+\gamma_{j-k+2m_1}^2+\alpha_{j-k+2m_1}^2,\ \ j = k-m_1+1,\ldots, k+m-2m_1,$$

$$\mathcal{L}_{j,r}(y) = y-\beta_{j-m},\ \ j = k+m-2m_1+1,\ldots, r-m,$$

и положим $f_0 = s$, $\varphi_0 = \left(\|s\|_\infty\|\varphi_{n,\mathcal{L}_r}\|_\infty^{-1}\right)\varphi_{n,\mathcal{L}_r}$, и по индукции для $j = 1, 2,\ldots, r-m$ $f_j = \mathcal{L}_{j,r}(D)f_{j-1}$ и $\varphi_j = \mathcal{L}_{j,r}(D)\varphi_{j-1}$. Если $\lambda_j = \|f_j\|_\infty\|\varphi_j\|_\infty^{-1}$, то для доказательства (7) при $p \leqslant \infty$ достаточно показать, что

$$\lambda_j = 1,\ \ j = 0, 1,\ldots, r-m. \tag{28}$$

Из определения функций f_0 и φ_0 следует, что $\lambda_0 = 1$. Предположим, что для некоторого $j \ge 1$ неравенство (28) не выполняется.

Пусть $j_0 = \min\{j: j \geq 1, \lambda_j > 1\}$. Докажем, что в этом случае найдутся числа $\lambda^*_{j_0}, \lambda^*_{j_0+1}, \ldots, \lambda^*_{r-m-1}$ и числа $\tau_{j_0}, \tau_{j_0+1}, \ldots, \tau_{r-m-1}$ такие, что при $j_0 \leq j \leq r - m - 1$ будут выполняться неравенства $\nu(\varphi_j(\cdot) - \lambda^*_j f_j(\cdot - \tau_j)) \geq 2n + 2$ и $\| \lambda^*_j f_j \|_\infty < \| \varphi_j \|_\infty$.

Будем использовать индукцию по j. Сначала убедимся в существовании нужных λ^*_j и τ_j при $j = j_0$. В силу выбора j_0 имеем $\lambda_{j_0-1} < 1$. Так как

$$\varphi_{n, \mathcal{L}_{j,m}}\left(x + \frac{l\pi}{n}\right) = (-1)^l \varphi_{n, \mathcal{L}_{j,m}}(x), \quad l \in \mathbb{Z}, \tag{29}$$

то при любых $\lambda(|\lambda| < 1)$ и τ

$$\nu(\varphi_{j_0-1}(\cdot) - \lambda f_{j_0-1}(\cdot - \tau_j)) \geq 2n,$$

и длина максимального промежутка знакопостоянства функции $\varphi_{j_0-1}(\cdot) - \lambda f_{j_0-1}(\cdot - \tau)$ будет не больше, чем $2\pi / n$. Отсюда и из (13) или (14) следует $\nu(\varphi_{j_0}(\cdot) - \lambda f_{j_0}(\cdot - \tau)) \geq 2n$.

Пусть $\varphi_{j_0}(y_0) = \| \varphi_{j_0} \|_\infty$ и $| f_{j_0}(x_0) | = \| f_{j_0} \|_\infty$. Тогда при подходящих $\delta_1, \delta_2 \geq 0$ будет

$$\begin{gathered}\nu(\varphi_{j_0}(\cdot) - (\lambda^{-1}_{j_0} - \delta_1) f_{j_0}(\cdot - y_0 + x_0 - \delta_2)) \geq 2n + 2, \quad \text{если } \varphi_{j_0}(y_0) f_{j_0}(x_0) > 0, \\ \nu(\varphi_{j_0}(\cdot) + (\lambda^{-1}_{j_0} - \delta_1) f_{j_0}(\cdot - y_0 + x_0 - \delta_2)) \geq 2n + 2, \quad \text{если } \varphi_{j_0}(y_0) f_{j_0}(x_0) > 0,\end{gathered} \tag{30}$$

и

$$\| (\lambda^{-1}_{j_0} - \delta_1) f_{j_0} \|_\infty < \| \varphi_{j_0} \|_\infty. \tag{31}$$

Таким образом, для $j = j_0$ утверждение доказано.

Предположим теперь, что нужные λ_j и τ_j найдутся для $j = j_0, \ldots, l$, $l \geq j_0$, и докажем, что они найдутся для $j = l + 1$. По предположению

$$\| \lambda^*_l f_l \|_\infty < \| \varphi_l \|_\infty \tag{32}$$

и

$$\nu(\varphi_l(\cdot) - \lambda^*_l f_l(\cdot - \tau_l)) \geq 2n + 2.$$

В силу (29) и (32) максимальная длина промежутка знакопостоянства разности $\varphi_l(\cdot) - \lambda^*_l f_l(\cdot - \tau_l)$ не более чем $2\pi / n$. Поэтому с помощью (13) или (14) получаем $\nu(\varphi_{l+1}(\cdot) - \lambda^*_l f_{l+1}(\cdot - \tau_l)) \geq 2n + 2$, и если $\| \lambda^*_l f_{l+1}(\cdot - \tau_l) \|_\infty < \| \varphi_{l+1} \|_\infty$, то все доказано. Если же это неравенство неверно, то аналогично доказательству неравенства (30) или (31) устанавливаем существование $\lambda^*_{l+1}(| \lambda^*_{l+1} | < 1)$ и τ_{l+1} таких, что

$$\nu(\varphi_{l+1}(\cdot) - \lambda^*_{l+1} f_{l+1}(\cdot - \tau_{l+1})) \geq 2n + 2$$

и

$$\| \lambda^*_{l+1} f_{l+1} \|_\infty < \| \varphi_{l+1} \|_\infty.$$

Теперь наше утверждение доказано для всех $j = j_0, \ldots, r - m - 1$ и, в частности, доказаны неравенства

$$\nu(\varphi_{r-m-1}(\cdot) - \lambda^*_{r-m-1} f(\cdot - \tau_{r-m-1})) \geq 2n + 2, \tag{33}$$

$$\| \lambda^*_{r-m-1} f_{r-m-1} \|_\infty < \| \varphi_{r-m-1} \|_\infty. \tag{34}$$

Из (35) следует

$$\eta_{r,k} \geq \frac{\bigvee_0^{2\pi}\left(\varphi_{n,\mathcal{L}_{r-k}}\right)}{4\bigvee_0^{2\pi}\left(\varphi_{n,0}\right)} = \frac{1}{4}\|\varphi_{n,\mathcal{L}_{r-k}}\|_\infty = \Psi_{\infty,\mathcal{L}_{r-k}}(n).$$

Отсюда и из (40), учитывая, что функция $x^{-1}\Theta_{p,\mathcal{L}_r;\mathcal{L}_{r-k}}(x)$ возрастает на $[0,+\infty)$, получаем

$$\|s\|_p \geq \frac{1}{4}n^{1/p-1}\frac{\bigvee_0^{2\pi}(\mathcal{L}_k(D)s)}{\Psi_{\infty,\mathcal{L}_{r-k}}(n)}\,\Theta_{p;\mathcal{L}_r,\mathcal{L}_{r-k}}(\Psi_{\infty,\mathcal{L}_{r-k}}(n)).$$

Ввиду определения функции $\Theta_{p,\mathcal{L}_r,\mathcal{L}_{r-k}}$ приходим к соотношениям

$$\|s\|_p \geq \frac{1}{4}n^{1/p-1}\frac{\bigvee_0^{2\pi}(\mathcal{L}_k(D)s)\Psi_{p,\mathcal{L}_r}(n)}{\Psi_{\infty,\mathcal{L}_{r-k}}(n)} = \frac{\bigvee_0^{2\pi}(\mathcal{L}_k(D)s)}{\bigvee_0^{2\pi}(\varphi_{n,\mathcal{L}_{r-k}})}\|\varphi_{n,\mathcal{L}_r}\|_p.$$

Таким образом, неравенство (11) доказано. Неравенство (12) непосредственно следует из (11). Теорема 1 доказана.

1. *Бернштейн С. Н.* О наилучшем приближении непрерывных функций посредством многочленов данной степени. Сочинения. – М.: Изд-во АН СССР, 1952. – Т. 1. — С. 11 – 104.
2. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2-х т. – М.: Мир, 1965. – Т. 1. – 615 с.
3. *Тайков Л. В.* Одно обобщение неравенства С. Н. Бернштейна // Тр. Мат. ин-та АН СССР.– 1965. – **78**. – С. 43 – 47.
4. *Лигун А. А.* О неравенствах между нормами производных периодических функций // Мат. заметки. – 1983. – **33**, № 3. – С. 385 – 391.
5. *Стечкин С. Б.* Обобщение некоторых неравенств С. Н. Бернштейна // Докл. АН СССР. – 1948. – **60**, № 9. – С. 1511 – 1514.
6. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации. – М.: Наука, 1965. – 407 с.
7. *Тиман А. Ф.* Теория приближения функций действительного переменного. – М.: Физматгиз, 1960. – 624 с.
8. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения. – М.: Наука, 1987. – 424 с.
9. *Бабенко В. Ф.* Теоремы сравнения и неравенства типа неравенств Бернштейна // Теория приближений и смежные вопросы анализа и топологии. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1987. – С. 4 – 7.
10. *Тихомиров В. М.* Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений // Успехи мат. наук. – 1960. – **15**, № 13. – С. 81 – 120.
11. *Субботин Ю. Н.* Приближения сплайн-функциями и оценки поперечников // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1971. – **109**. – С. 35 – 60.
12. *Лигун А. А.* Точные неравенства для сплайн-функций и наилучшие квадратурные формулы для некоторых классов функций // Мат. заметки. – 1976. – **19**, № 6. – С. 913 – 926.
13. *Бабенко В. Ф., Пичугов С. А.* Неравенства типа Бернштейна для полиномиальных сплайнов в пространстве L_2 // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 3. – С. 435 – 437.
14. *Бабенко В. Ф.* Точные неравенства для разностей периодических полиномиальных сплайнов в пространстве C // Приближение функций полиномами и сплайнами и суммирование рядов. – Днепропетровск: Изд-во Днепропетр. ун-та. – 1990. – С. 6 – 11.
15. *Шевалдин В. Т.* Некоторые задачи экстремальной интерполяции в среднем для линейных дифференциальных операторов // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1983. – **164**. – С. 203 – 240.
16. *Нгуен Тхи Тхиеу Хоа.* Некоторые экстремальные задачи на классах функций, задаваемых линейными дифференциальными операторами // Мат. сб.– 1989.– **180**, №10.– С.1355 – 1395.
17. *Литвинец П.Д., Фильштинский В. А.* Об одной теореме сравнения и ее применениях // Теория приближения функций и ее прил.– Киев: Ин-т математики АН УССР, 1984.– С.97 – 107.
18. *Корнейчук Н. П., Лигун А. А., Доронин В. Г.* Аппроксимация с ограничениями. – Киев: Наук думка, 1982. – 250 с.
19. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближения. – М.: Наука, 1976. – 320 с.
20. *Бабенко В. Ф.* Экстремальные задачи теории приближения и несимметричные нормы: Дис. … д-ра физ.-мат. наук. – Днепропетровск, 1987. – 280с.
21. *Бабенко В. Ф.* Экстремальные задачи теории приближения и неравенства для перестановок // Докл. АН СССР. – 1986. – **290**, № 5. – С. 1033 – 1036.

Получено 19.04.91