УДК 517.9

В. Г. Самойленко, д-р физ.-мат. наук (Ин-т математики АН Украины, Киев),
У. С. Суяров, канд. физ.-мат. наук (Самарканд. ун-т)

ПОЛНАЯ ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ ОДНОЙ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ НАВЬЕ — СТОКСА ТЕЧЕНИЯ ДВУХМЕРНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Установлена полная интегрируемость одной нелинейной динамической системы, ассоциированной с гидродинамическими уравнениями Навье – Стокса течения идеальной двухмерной жидкости со свободной поверхностью над горизонтальным дном. Показано, что с данной динамической системой естественным образом связано нелинейное кинетическое уравнение Больцмана – Власова для одномерного потока частиц с точечным потенциалом взаимодействия между частицами.

Встановлена повна інтегровність однієї нелінійної динамічної системи, асоційованої з гідродинамічними рівняннями Нав'є – Стокса течії ідеальної двовимірної рідини з вільною поверхнею над горизонтальним дном. Показано, що з даною динамічною системою природним чином пов'язане нелінійне кінетичне рівняння Больцмана – Власова для одновимірної течії частинок з точковим потенціалом взаємодії між частинками.

Как известно, гидродинамические уравнения Навье – Стокса течения идеальной двухмерной жидкости имеют вид [1]

$$\begin{aligned} u_t &= -uu_x - vu_y - p_x/\rho, \\ v_t &= -uv_x - vv_y - p_y/\rho, \\ \rho_t &= -u\rho_x - v\rho_y - \rho\,(u_x + v_y), \end{aligned} \tag{1}$$

где $(u, v)^\tau \in C^{(2)}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$ — вектор двухмерной скорости жидкости в направлении осей Ox и Oy соответственно, $\rho \in C^{(2)}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}_+)$ — плотность жидкости и $p \in C^{(2)}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}_+)$ — давление внутри жидкости, $t \in \mathbb{R}$ — эволюционный параметр. Предполагая далее, что жидкость несжимаема, т. е. $D_t\rho = \rho_t + u\rho_x + v\rho_y = 0$ для всех $t \in \mathbb{R}$, находим условие $u_x + u_y = 0$ для $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ и полагаем, что плотность $\rho \in C^{(2)}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}_+)$ в (1) нормирована единицей, т. е. $\rho = 1$.

Рассмотрим уравнения Навье – Стокса (1) со свободной поверхностью, задаваемой уравнением $y = h(x, t)$, где $h(\cdot, t) \in C^{(2)}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}_+)$ — высота уровня жидкости над горизонтальным дном в момент времени $t \in \mathbb{R}$, $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ (ось Ox направлена в горизонтальном направлении ("дно" потока жидкости), а ось Oy — в вертикальном). Тогда уравнения (1) сводятся к системе уравнений

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} u \\ q \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -uu_x - u_y \int_0^y dy\, u_x - q_x \\ -h_x \\ -\dfrac{\partial}{\partial x} \int_0^h dy\, u \end{pmatrix} = K[u, q, h], \tag{2}$$

где $p(x, y; t) = q(x, t) + \alpha(x, t)$, причем $D_t v = -\alpha_y$, $D_t h = v\,|_{y=h}$, (условия непересекания частицами жидкости свободной поверхности $y = h(x, t)$) и $q_t = -h_x$ — „ветровое" давление единичной мощности в направлении оси Ox.

Система уравнений (2) порождает на бесконечном функциональном многообразии $M_{(u,q,h)} \simeq C^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^2)$ нелинейную динамическую систему, для которой мы изучим вопрос о ее полной интегрируемости по Лаксу [2, 3], т. е. исследуем вопрос о наличии для (2) бесконечной иерархии инволютивных законов сохранения относительно скобки Пуассона, а также специального операторного

© В. Г. САМОЙЛЕНКО, У. С. СУЯРОВ, 1993

представления типа Лакса. Кроме того, будет показано, что с нелинейной динамической системой (2) естественным образом связано нелинейное кинетическое уравнение Больцмана – Власова для одномерного потока частиц с точечным потенциалом взаимодействия между частицами [4]. Последнее свойство уравнений (2) дает возможность проведения физической аналогии между процессами турбулентности в кинетических многочастичных процессах, связанных со стохатизацией траекторий движения частиц, и процессами образования неустойчивости и ударных волн при движении идеальной несжимаемой жидкости со свободной поверхностью над горизонтальным дном. Само же уравнение Больцмана – Власова можно получить из (2) с помощью преобразования

$$y = \int_0^{u(x,y)} dp\, f(x, p; t),$$

где $y \in \mathbb{R}_+$, $f \in C^{(2)}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}_+)$— функция распределения Больцмана – Боголюбова [4] для одномерного кинетического движения системы многих взаимодействующих частиц на оси, причем уравнение свободной поверхности в (2) определяется условием согласованности функции распределения:

$$h(x, t) = \int_{-\infty}^{u(x,y)} dp\, f(x, p; t),\ (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Отметим также, что указанное выше преобразование динамической системы (2) — каноническое [5], т. е. полученное нами таким образом уравнение Больцмана – Власова является, как и (2), гамильтоновой системой со специальной симплектической структурой на функциональном многообразии $M_{(f)} = C^{(2)}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}_+)$.

Итак, рассмотрим дифференциальные уравнения (2) и введем моментные функционалы $a_n(x) = \int_0^{h(x)} dy\, u^n(x, y), x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{Z}_+$. Тогда непосредственным вычислением убеждаемся, что динамическая система (2) эквивалентна следующей бесконечной системе моментных уравнений на функциональном многообразии $M_{(\mathbb{Z}_+)} = \{ a_n \in C^{(2)}(\mathbb{R}; \mathbb{R}) : n \in \mathbb{Z}_+ \}$:

$$\left.\begin{aligned} a_{n,t} &= -n a_{n-1} q_x - a_{n+1,\,x} \\ q_t &= -a_{o,\,x} \end{aligned}\right\} = K[a],\quad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{3}$$

Докажем вначале полную интегрируемость динамической системы на многообразии $M_{(\mathbb{Z}_+)}$. Для этого рассмотрим алгебру Ли $\mathcal{G}_0$ символов [6, 5]

$$l(\xi) = \sum_{j \in \mathbb{Z}_+} a_j(x)\xi^{-(j+1)} + \sum_{j=0}^{m(l)} u_j(x)\xi^j, \tag{4}$$

где $a_j, u_k \in M_{(\mathbb{Z}_+)}, j, k \in \mathbb{Z}_+$, со скобкой $[\cdot,\cdot]_0$, определяемой с помощью формулы $[l_1(\xi), l_2(\xi)]_0 = \dfrac{\partial l_1}{\partial \xi}\dfrac{\partial l_2}{\partial x} - \dfrac{\partial l_2}{\partial \xi}\dfrac{\partial l_1}{\partial x}$ для любых элементов $l_1, l_2 \in \mathcal{G}_0, x \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{C}$. Как показано в [3], скобка $[\cdot,\cdot]_0$ является естественным гидродинамическим пределом стандартной скобки $[\cdot,\cdot]$ на алгебре Ли $\mathcal{G}$ символов псевдодифференциальных операторов на оси $\mathbb{R}$.

Алгебра Ли $\mathcal{G}_0$ имеет естественное разбиение на прямую сумму двух своих подалгебр Ли, т. е. $\mathcal{G}_0 = \mathcal{G}_{0+} \oplus \mathcal{G}_{0-}$ (см. (4)), причем относительно стандартного симметрического невырожденного и инвариантного скалярного произведения на $\mathcal{G}_0$ вида $(l_1, l_2) = \mathrm{Tr}\, l_1 l_2$, где

$$\mathrm{Tr}\, l(\xi) = \int_{\mathbb{R}} dx \operatorname{res} l(\xi), l_1, l_2 \in \mathcal{G}_0,$$

справедливо отождествление в сопряженном к $\mathcal{G}_0$ пространстве $\mathcal{G}_0^*$: $\mathcal{G}_{0+}^* = \mathcal{G}_{0-}$, $\mathcal{G}_{0-}^* = \mathcal{G}_{0+}$ и $\mathcal{G}_0^* = \mathcal{G}_{0+}^* \oplus \mathcal{G}_{0-}^*$.

Определим также отображение градиента $\nabla : \mathcal{D}(\mathcal{G}_0^*) \to \mathcal{G}_0$ с помощью формулы $(\nabla\gamma(l), m) = \frac{d}{d\varepsilon}\gamma(l + \varepsilon m)\Big|_{\varepsilon=0}$, где функционал $\gamma \in \mathcal{D}(\mathcal{G}_0^*)$ принимает значения в $\mathbb{R}$ и является произвольным, элементы $l, m \in \mathcal{G}_0^*$ — любые. Положим $\mathcal{R} = P_+ - P_-$, где $P_\pm : \mathcal{G}_0 \to \mathcal{G}_{0\pm}$ — проекторы на алгебре Ли $\mathcal{G}_0$.

Пусть теперь на многообразии $\mathcal{G}_0^* \simeq M_{(\mathbb{Z}_+)}$ задано векторное поле $K[l(\xi)]$:

$$\frac{dl(\xi)}{dt} = ad^*_{\mathcal{R}\nabla\gamma(l)}\, l(\xi) = K[l(\xi)], \tag{5}$$

т.е. коприсоединенное действие элемента $\mathcal{R}\nabla\gamma(l) \in \mathcal{G}_0$ на сопряженном пространстве $\mathcal{G}_0^*$. В силу изоморфизма $\mathcal{G}_0^* \simeq \mathcal{G}_0$ относительно скалярного произведения $(\cdot,\cdot)$ на $\mathcal{G}_0$ векторное поле (5) можно представить в эквивалентном виде

$$\frac{dl}{dt} = K[l(\xi)] = [l, \mathcal{R}\nabla\gamma(l)], \tag{6}$$

где $l \in \mathcal{G}_0$ произвольно.

Покажем, что динамическая система (6) на многообразии $\mathcal{G}_0^* \simeq M_{(\mathbb{Z}_+)}$ — гамильтонова относительно стандартной симплектической структуры Ли – Пуассона. Действительно, на $\mathcal{G}_0^*$ естественным образом задана [6] скобка Ли – Пуассона

$$\{\gamma, \mu\}_{\mathcal{L}} = (l, [\nabla\gamma(l), \nabla\mu(l)]_0) \ \forall\, \gamma, \mu \in \mathcal{D}(\mathcal{G}_0^*).$$

Тогда, очевидно, в силу свойств скалярного произведения $(\cdot,\cdot)$ на $\mathcal{G}_0$ уравнение (6) эквивалентно системе Гамильтона

$$\frac{dl}{dt} = \{\gamma, l\}_{\mathcal{L}},\ l \in \mathcal{G}_0^*.$$

Положим теперь, по определению,

$$l(a(\xi)) = \xi^2/2 + q + a(\xi), \tag{7}$$

где элемент $a(\xi) = \sum_{j\in\mathbb{Z}_+} a_j(x)\xi^{-(j+1)} \in \mathcal{G}_{0-}$ построен по значениям моментных функций многообразия $M_{(\mathbb{Z}_+)}$. Так как в силу теоремы Константа – Симза [5] все функционалы $\gamma_j = \operatorname{Tr} l^{j/2}, j \in \mathbb{Z}_+$, находятся в инволюции относительно скобки Ли – Пуассона $\{\cdot,\cdot\}$ на $\mathcal{G}_0^*$, то динамическая система вида (6), где $\gamma = H = \operatorname{Tr} l^2/2 \in \mathcal{D}(M_{(\mathbb{Z}_+, q)})$ на расширенном функциональном многообразии $M_{(\mathbb{Z}_+, q)} \simeq M_{(u, q, h)}$ будет вполне интегрируемым гамильтоновым потоком, причем скобка Ли – Пуассона $\{\cdot,\cdot\}$ задается с помощью выражения

$$\{\gamma, \mu\}_{\mathcal{L}} = \int_{\mathbb{R}} dx \langle \operatorname{grad}\gamma, \mathcal{L}(a, q) \operatorname{grad}\mu\rangle. \tag{8}$$

Здесь $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение в пространстве бесконечных последовательностей $l_2(\mathbb{R})$,

$$\mathcal{L}(a, q) = \| \mathcal{L}_{mn}(a) \| \oplus \mathcal{L}(q),\ m, n \in \mathbb{Z}_+,$$

$$\mathcal{L}_{mn}(a) = m a_{m+n-1}\frac{d}{dx} + n\frac{d}{dx} a_{m+n-1},\ \mathcal{L}(q) = \frac{\partial}{\partial x}. \tag{9}$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема. *Моментная динамическая система* (3) *на функциональном много-*

образии $M_{(\mathbb{Z}_+,\, q)}$ *является вполне интегрируемым по Лаксу гамильтоновым потоком со скобкой Ли – Пуассона вида* (8), (9), *функционалом Гамильтона* $H = \mathrm{Tr}\, l^2/20$ *и представлением типа Лакса вида*

$$l_t = [\, l, \mathcal{R}\nabla H(l)\,], \tag{10}$$

где элемент $l \in \mathcal{G}_0$ *задан выражением* (7).

Покажем теперь каноничность отображений многообразия $M_{(\mathbb{Z}_+,\, q)}$ на многообразия $M_{(u,\, q,\, h)}$ и $M_{(f,\, q)}$, введенные ранее. В первом случае несложно заметить, что отображение

$$a_n(x) = \int_0^{h(x)} dy\, u^n(x, y) \in M_{(\mathbb{Z}_+)},\ n \in \mathbb{Z}_+, x \in \mathbb{R},$$

переводит гамильтонову структуру $\{\cdot,\cdot\}_{\mathfrak{L}(a,q)}$ в $\{\cdot,\cdot\}_{\mathfrak{L}(u,q,h)}$, причем

$$(u, q, h)_t^{\tau} = -\mathfrak{L}(u, q, h)\,\mathrm{grad}\, H = K[u, q, h], \tag{11}$$

где $\mathfrak{L}(u, q, h) = \mathrm{antidiag}\,(\partial, \partial, \partial)$, $\partial = \partial/\partial x$ — каноническая структура на многообразии $M_{(u,\, q,\, h)}$. Для того чтобы доказать каноничность отображения $M_{(u,q,h)}$ в M_f с помощью отображения $y = \int_{-\infty}^{u(x,y)} dp\, f(x, p; t)$ при условии, что свободная поверхность жидкости определяется уровнем

$$h(x, t) = \int_{-\infty}^{u(x,h)} dp\, f(x, p; t),\ (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R},$$

рассмотрим пространство $\mathcal{G}$ гладких функций на $T^*\mathbb{R}$ с канонической скобкой Пуассона

$$\{f, g\}(x, p) = \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial x},\ (x, p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R},$$

превращающей его в алгебру Ли. Если ввести на $\mathcal{G}$ дополнительно структуру гильбертового пространства относительно скалярного произведения $(\cdot,\cdot)$, то по теореме Риса можно отождествить $\mathcal{G}^*$ и $\mathcal{G}$, причем скалярное произведение $(\cdot,\cdot)$ на $\mathcal{G}$ таково, что оно симметрично, невырождено и инвариантно относительно скобки Пуассона $\{\cdot,\cdot\}$ на $\mathcal{G}$, т. е. для любых $f, g, h \in \mathcal{G}$ справедливо

$$(f, g) = (g, f) = \int_{\mathbb{R}} dp\, f(x, p)\, g(x, p) \in \mathbb{R},$$

$$(f, \{g, h\}) = (\{f, g\}, h).$$

Если взять теперь функционал $\gamma \in \mathcal{D}(\mathcal{G}^*)$, то можно определить отображение градиента $\nabla\colon \mathcal{D}(\mathcal{G}^*) \to \mathcal{G}$ согласно формуле

$$(\nabla\gamma(f), g) = \frac{d}{d\varepsilon}\gamma(f + \varepsilon g)\Big|_{\varepsilon=0}$$

для произвольных $f, g \in \mathcal{G}^*$. В силу построения $\nabla\gamma(f) = \dfrac{\delta\gamma}{\delta f}$ — обыкновенная вариационная производная Эйлера функционала $\gamma \in \mathcal{D}(\mathcal{G}^*)$ в точке $f \in \mathcal{G}^* \simeq \mathcal{G}$. Определим теперь на $\mathcal{G}^*$ каноническую гамильтонову структуру со скобкой Ли – Пуассона [5]: для произвольных $\gamma, \mu \in \mathcal{D}(\mathcal{G}^*)$ положим $\{\{\gamma, \mu\}\} = (f, \{\nabla\gamma(f), \nabla\mu(f)\})$.

Рассмотрим функционал $H \in \mathcal{D}(\mathcal{G}^*)$ и его градиент $\nabla\mu(f) \in \mathcal{G}$. Тогда на $\mathcal{G}^*$ определено следующее векторное поле, порожденное коприсоединенным действием алгебры Ли на $\mathcal{G}^*$: $\dfrac{df}{dt} = ad^*_{\nabla H(f)} f$, $f \in \mathcal{G}^* \simeq \mathcal{G}$, где $t \in \mathbb{R}$ — эволюционный параметр.

В силу свойств скалярного произведения на $\mathcal{G}$ это векторное поле эквивалентно уравнению типа Лакса

$$\frac{df}{dt} = [f, \nabla H(f)], \tag{12}$$

которое полностью совпадает с уравнением Гамильтона $\frac{df}{dt} = \{\{H, f\}\}$ на многообразии $\mathcal{G}^*$.

Выполним теперь следующее отождествление: $M(\mathbb{Z}_+) \ni a_n(x) = \int_{\mathbb{R}} dp\, p^n f(x, p; t)$, $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, согласованное с введенным выше отображением многообразия $M(\mathbb{Z}_+)$ в $M(f)$. Тогда скобка Ли – Пуассона $\{\{\cdot,\cdot\}\}$ на многообразии $\mathcal{G}^*$ переходит тождественно в скобку Ли – Пуассона (8) на многообразии $\mathcal{G}_0^*$, т. е. отображение $M(\mathbb{Z}_+, q)$ в $M_{(f,q)}$ канонично. Учитывая теперь явное выражение функционала Гамильтона $H = \int_{\mathbb{R}} dx\, (a_2/2 + qa_0)$, находим кинетическое уравнение Больцмана – Власова для функции распределения $f \in M_f$ и функции $q \in M_{(q)}$:

$$f_t = -pf_t + q_x f_p, \; q_t = -\int_{\mathbb{R}} dp\; f_x(x, p; t). \tag{13}$$

Согласованная система эволюционных уравнений (13) представляет собой весьма важный и интересный для приложений в теории "одnометризованных" кинетических процессов объект исследования. Если задана система взаимодействующих частиц на оси с постоянной во времени плотностью $(\rho = 1)$ и с потенциалом двухчастичного взаимодействия $V(x - x')$, $x, x' \in \mathbb{R}$, то функция распределения $f \in M_f$ при условии отсутствия многочастичных корреляций удовлетворяет кинетическому уравнению Больцмана – Власова

$$f_t = -pf_x + f_p \frac{\partial}{\partial x} \int_{\mathbb{R}} dx' \int_{\mathbb{R}} dp'\, V(x - x') f(x', p'; t). \tag{14}$$

Сравнивая уравнения (13) и (14), видим, что справедливо отождествление

$$q(x, t) = \int_{\mathbb{R}} dx' \int_{\mathbb{R}} dp'\, V(x - x') f(x', p'; t), \tag{15}$$

$(x, t) \in \mathbb{R}$, при котором второе уравнение в (13) приводится к определяющему линейному интегральному уравнению вида

$$\int_{\mathbb{R}} dx'\, V(x - x') \int_{\mathbb{R}} dp'\, p' f_{x'}(x', p') = \int_{\mathbb{R}} dp\, f_x(x, p), \; x \in \mathbb{R}, \tag{16}$$

справедливому в силу произвольности значения момента времени $t \in \mathbb{R}$ для всех возможных функций $f \in M_{(f)} = C^{(2)}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}_+)$. Последнее условие определяет эффективный потенциал взаимодействия между частицами, приводящий к гидродинамической системе уравнений Навье – Стокса (2). Характер возможных решений гидродинамической системы уравнений (2) и ассоциированного с ней кинетического уравнения Больцмана – Власова (13) заслуживает более детального исследования.

1. *Ландау Л. Д., Лифшиц И. М.* Гидродинамика. – М.: Наука, 1988. – 736 с.
2. *Теория солитонов*: метод обратной задачи / Под. ред. С. П. Новикова. – М.: Наука, 1980. – 324 с.
3. *Лебедев Д. Р., Манин Ю. И.* Уравнения длинных волн Бенни: представление Лакса и законы сохранения. Краевые задачи математической физики и смежные вопросы.– Л.: Наука, 1980. – С. 169 – 178.
4. *Боголюбов Н. Н., Боголюбов Н. Н. (мл.).* Введение в квантовую статистическую механику. – М.: Наука, 1984. – 390 с.
5. *Прикарпатский А. К., Микитюк И. В.* Алгебраические аспекты интегрируемости нелинейных динамических систем на многообразиях. – Киев: Наук. думка, 1991. – 260 с.
6. *Cavalcante J., Mc Kean H. P.* The classical shallow water equations: symplectic geometry // Physika D. – 1982. – **4**, № 2. – P. 253 – 260.

Получено 08. 05. 91