УДК 519.

А. Я. Дороговцев, д-р физ.-мат. наук (Киев. ун-т)

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ И ОГРАНИЧЕННЫХ РЕШЕНИЯХ ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ РИККАТИ

Приведены достаточные условия существования периодических и ограниченных решений для операторного уравнения Риккати.

Наведено достатні умови існування періодичних та обмежених розв'язків операторного рівняння Ріккаті.

Настоящая статья является первой частью работы, посвященной условиям существования стохастически периодических решений дифференциальных уравнений со случайным периодическим возмущением и нелинейностью, не удовлетворяющей условию Липшица во всем пространстве. На примере уравнения Риккати рассматриваются условия, относящиеся к детерминированному случаю. Отметим, что условия существования периодических решений матричного уравнения Риккати приведены в статье [1]. Условия данной работы как по содержанию, так и по методу доказательства отличны от условий [1].

1. Обозначения. Периодические решения. Пусть $(B, \|\cdot\|)$ — комплексное банахово пространство, $\mathfrak{L}(B)$ — банахово пространство и кольцо всех линейных непрерывных операторов, действующих в B. Операторная норма в $\mathfrak{L}(B)$ обозначается символом $\|\cdot\|$, E — единичный оператор, $\sigma(A)$ и $\rho(A)$ обозначают соответственно спектр и резольвентное множество оператора $A \in \mathfrak{L}(B)$. Для рассматриваемых ниже функций вида $f: \mathbb{R} \to \mathfrak{L}(B)$ непрерывность и производная есть непрерывность и производная относительно операторной нормы в $\mathfrak{L}(B)$. Используемые интегралы — интегралы Римана от сильно непрерывных операторных функций.

Пусть $T > 0$ — фиксированное число, а функции $A_1, A_2, C, Y: \mathbb{R} \to \mathfrak{L}(B)$ удовлетворяют условиям:

1) $\{A_1, A_2, C, Y\} \subset C(\mathbb{R}, \mathfrak{L}(B))$;

2) $\forall t \in \mathbb{R}: A_j(t+T) = A_j(t),\ j = 1, 2;\ C(t+T) = C(t),\ Y(t+T) = Y(t)$.

Определим функции $\{U_1, U_2\} \subset \mathbf{C}^1(\mathbb{R}, \mathfrak{L}(B))$ как единственные обратимозначные на $\mathbb{R}$ решения соответственно следующих задач:

$$\frac{dU_1(t)}{dt} = A_1(t)U_1(t),\ t \in \mathbb{R};\quad U_1(0) = E, \tag{1}$$

и

$$\frac{dU_2(t)}{dt} = U_2(t)A_2(t),\ t \in \mathbb{R};\quad U_2(0) = E. \tag{2}$$

Утверждение о существовании таких решений задач (1) и (2) известно [2], эти решения обладают следующим свойством для всех $t \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{Z}$:

$$U_1(t) = U_1(t - nT)U_1^n(T),$$
$$U_2(t) = U_2^n(T)U_2(t - nT).$$

С помощью функций U_1 и U_2 единственное решение $Z \in \mathbf{C}^1(\mathbb{R}, \mathfrak{L}(B))$ задачи

$$\frac{dZ(t)}{dt} = A_1(t)Z(t) + Z(t)A_2(t) + Y(t),\ t \in \mathbb{R};\ Z(0) \text{ фиксировано}, \tag{3}$$

записывается в виде

$$Z(t) = U_1(t) Z(0) U_2(t) + U_1(t) \int_0^t U_1^{-1}(s) Y(s) U_2^{-1}(s)\, ds\, U_2(t), \ t \in \mathbb{R}.$$

Предположим, что

$$\forall \lambda \in \sigma(U_1(T)) \quad \forall \mu \in \sigma(U_2(T)) : \lambda\mu \neq 1. \tag{4}$$

Легко проверить (аналогично [2]), что условие (4) является необходимым и достаточным для того, чтобы уравнение из (3) для любой T-периодической функции $Y \in \mathbf{C}(\mathbb{R}, \mathfrak{L}(B))$ имело единственное T-периодическое решение $Z \in \mathbf{C}^1(\mathbb{R}, \mathfrak{L}(B))$. Кроме того, согласно [3] при условии (4) операторное относительно W уравнение $W = U_1(T) W U_2(T) + V$ для любого оператора $V \in \mathfrak{L}(B)$ имеет единственное решение $W(V)$, задаваемое формулой

$$W(V) = -\frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{\Gamma_1} \int\limits_{\Gamma_2} \frac{(U_1(T) - \lambda E)^{-1} V (U_2(T) - \mu E)^{-1}}{1 - \lambda\mu}\, d\lambda\, d\mu,$$

где Γ_1 и Γ_2 — контуры, окружающие спектры $\sigma(U_1(T))$ и $\sigma(U_2(T))$ соответственно и лежащие в достаточно малых окрестностях этих спектров. При этом $\| W(V) \| \le k \| V \|$, где

$$k := \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{\Gamma_1} \int\limits_{\Gamma_2} \frac{\left\| (U_1(T) - \lambda E)^{-1} \right\| \cdot \left\| (U_2(T) - \mu E)^{-1} \right\|}{|1 - \lambda\mu|} |d\lambda| \cdot |d\mu|.$$

Отметим, что в случае $A_2 \equiv 0$ — нулевой оператор в $\mathfrak{L}(B)$, величина k равна $k = \|(U_1(T) - E)^{-1}\|$, а условие (4) означает, что $1 \in \rho(U_1(T))$.

Обозначим также

$$e_j := \exp\left(\int_0^T \|(A_j(t)\| \, dt\right), \ j = 1, 2; \ c := \max_{\mathbb{R}} \| C(\cdot) \|, \ \ y := \max_{\mathbb{R}} \| Y(\cdot) \|.$$

Теорема 1. *Предположим, что функции* $A_1, A_2, C, Y : \mathbb{R} \to \mathfrak{L}(B)$ *удовлетворяют условиям* 1 *и* 2; *для отвечающих функциям* A_1 *и* A_2 *решений* U_1 *и* U_2 *задач* (1) *и* (2) *выполнено условие* (4) *и*

$$4\, c\, y\, e_1^2 e_2^2\, T^2 (1 + e_1 e_2 k)^2 \le 1. \tag{5}$$

Тогда уравнение

$$\frac{dX(t)}{dt} = A_1(t) X(t) + X(t) A_2(t) + X(t) C(t) X(t) + Y(t), \ t \in \mathbb{R},$$

имеет T*-периодическое решение* $X \in \mathbf{C}^1(\mathbb{R}, \mathfrak{L}(B))$.

Теорема 2. *Предположим, что выполнены условия теоремы* 1 *за исключением неравенства* (5). *Тогда для всякого* ε *с достаточно малым* $|\varepsilon|$ *уравнение*

$$\frac{dX(t)}{dt} = A_1(t) X(t) + X(t) A_2(t) + \varepsilon X(t) C(t) X(t) + Y(t), \ t \in \mathbb{R},$$

имеет T*-периодическое решение* $X = X_\varepsilon \in \mathbf{C}^1(\mathbb{R}, \mathfrak{L}(B))$.

Заметим, что метод доказательства периодических решений из [4], относящийся к удовлетворяющей во всем пространстве условию Липшица нелинейности, в теоремах 1 и 2 не применим.

2. Доказательства теорем 1 и 2. Рассмотрим следующую последовательность операторных уравнений:

$$X_0'(t) = A_1(t) X_0(t) + X_0(t) A_2(t) + Y(t), \ t \in \mathbb{R}; \tag{6}$$

$$X_n' = A_1(t)X_n(t) + X_n(t)A_2(t) + \sum_{k=0}^{n-1} X_k(t)C(t)X_{n-k-1}(t),\ t \in \mathbb{R};\ n \geq 1. \quad (7)$$

Уравнение (6) есть уравнение типа (3), при условии (4) это уравнение имеет единственное T-периодическое решение $X_0 \in \mathbf{C}^1(\mathbb{R}, \mathfrak{L}(B))$ такое, что для $0 \leq t \leq T$

$$X_0(t) = U_1(t)W\left(U_1(T)\int_0^T U_1^{-1}(s)Y(s)U_2^{-1}(s)\,ds\,U_2(T)\right)U_2(t) +$$

$$+ U_1(t)\int_0^t U_1^{-1}(s)Y(s)U_2^{-1}(s)\,ds\,U_2(t).$$

Отсюда следует, что $\forall t \in \mathbb{R} : \| X_0(t)\| \leq \chi y$, где $\chi := e_1 e_2 T(1 + e_1 e_2 k)$. Для полученного решения X_0 уравнение (7) с $n = 1$ согласно приведенным выше рассуждениям имеет единственное T-периодическое решение $X_1 \in \mathbf{C}^1(\mathbb{R}, \mathfrak{L}(B))$, причем $\forall t \in \mathbb{R} : \| X_1(t)\| \leq \chi^3 y^2 c$. Дальнейшие рассуждения аналогичны. Получив решения $X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}$, определим функцию $X_n \in \mathbf{C}^1(\mathbb{R}, \mathfrak{L}(B))$ как единственное T-периодическое решение (7). Для решения X_n справедлива оценка

$$\forall t \in \mathbb{R} : \| X_n(t)\| \leq \frac{C_{2n}^n}{n+1}\chi^{2n+1}y^{n+1}c^n,\ \ n \geq 0, \quad (8)$$

для получения которой в индуктивном шаге используется известное тождество 11(а) из [5, с. 123]. Для ряда

$$X_\varepsilon(t) := \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n X_n(t),\quad t \in \mathbb{R}, \quad (9)$$

из T-периодических слагаемых класса $\mathbf{C}^1(\mathbb{R}, \mathfrak{L}(B))$ ряд из норм для любого $t \in \mathbb{R}$ допускает оценку

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\varepsilon|^n \| X_n(t)\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_{2n}^n}{n+1}(\chi^2 yc|\varepsilon|)^n \chi y.$$

С учетом соотношения $C_{2n}^n \sim 2^{2n}/\sqrt{\pi n}$, $n \to \infty$, последний ряд сходится при

$$\varepsilon = 1,\ \ 4\chi^2 yc \leq 1, \quad (10)$$

либо при ε таких, что

$$4\chi^2 yc|\varepsilon| \leq 1. \quad (11)$$

Таким образом, при выполнении одного из условий (10) или (11) ряд (9) сходится равномерно на $\mathbb{R}$ по норме, а функция X_ε определена, непрерывна и T-периодична. Кроме того, для ряда из производных

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n X_n'(t) = A_1(t)X_0(t) + X_0(t)A_2(t) + Y(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n (A_1(t)X_n(t) +$$

$$+ X_n(t)A_2(t) + \sum_{k=0}^{n-1} X_k(t)C(t)X_{n-k-1}(t),\ \ t \in \mathbb{R}, \quad (12)$$

имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\varepsilon|^n \, \| X_n'(t) \| \le \left(\max_{\mathbb{R}} \| A_1 \| + \max_{\mathbb{R}} \| A_2 \| \right) \sum_{n=1}^{\infty} |\varepsilon|^n \, \| X_n(t) \| +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} |\varepsilon|^n \, \frac{C_{2n}^n}{n+1} \chi^{2n} y^{n+1} c^n.$$

При условии (10) или (11) ряд из производных (12) сходится по норме равномерно на $\mathbb{R}$. Поэтому $X_\varepsilon \in \mathbf{C}^1(\mathbb{R}, \mathfrak{L}(B))$ и согласно (12)

$$X_\varepsilon'(t) = A_1(t) X_\varepsilon(t) + X_\varepsilon(t) A_2(t) + \varepsilon X_\varepsilon(t) C(t) X_\varepsilon(t) + Y(t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{13}$$

Если выполнено условие (10), то функция X_ε при $\varepsilon = 1$ является решением уравнения из теоремы 1. Если ε таково, что выполнено условие (11), то функция X_ε — решение уравнения из теоремы 2.

3. Об ограниченных решениях. Пусть

$$\mathbf{C}_b(\mathbb{R}, \mathfrak{L}(B)) := \{ f \in \mathbf{C}(\mathbb{R}, \mathfrak{L}(B)) \mid \sup_{\mathbb{R}} \|f\| < +\infty \},$$

$$\mathbf{C}_b^1(\mathbb{R}, \mathfrak{L}(B)) := \mathbf{C}_b(\mathbb{R}, \mathfrak{L}(B)) \cap \mathbf{C}^1(\mathbb{R}, \mathfrak{L}(B)).$$

Для рассматриваемого уравнения Риккати справедливы аналоги теорем 1 и 2 для ограниченных решений. Здесь приведем только аналог теоремы 2, имеющей сравнительно простую формулировку.

Теорема 3. *Предположим, что функции* A_1 *и* A_2 *удовлетворяют условиям* 1 *и* 2; *пусть* U_1 *и* U_2 — *отвечающие функциям* A_1 *и* A_2 *решения задач* (1) (2), $\{C, Y\} \subset \mathbf{C}_b(\mathbb{R}, \mathfrak{L}(B))$ *и выполнено условие*

$$\{ \lambda\mu \mid \lambda \in \sigma(U_1(T)), \ \mu \in \sigma(U_2(T)) \} \cap \{ e^{i\varphi} \mid 0 \le \varphi \le 2\pi \} = \varnothing.$$

Тогда для всякого ε *с достаточно малым* $|\varepsilon|$ *уравнение* (13) *имеет решение* $X_\varepsilon \in \mathbf{C}_b^1(\mathbb{R}, \mathfrak{L}(B))$.

Доказательство теоремы 3 проводится по плану доказательства теорем 1 и 2 со следующими дополнениями. Используется критерий существования ограниченного решения операторного разностного уравнения из [6]

$$Z(n+1) = U_1(T) Z(n) U_2(T) + \Phi(n), \quad n \in \mathbb{Z},$$

для $\{\Phi(n) : n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathfrak{L}(B)$ с $\sup_{n \in \mathbb{Z}} \|\Phi(n)\| < +\infty$ аналогично рассуждениям из [4], а также то, что оператор $X \mapsto U_1(T) X U_2(T)$, действующий в банаховом пространстве $\mathfrak{L}(B)$, имеет спектр $\{ \lambda\mu \mid \lambda \in \sigma(U_1(T)), \ \mu \in \sigma(U_2(T)) \}$.

Последнее утверждение можно получить непосредственно, оно также следует из известных результатов об „элементарных операторах" [7].

1. *Захар-Иткин М. Х.* Матричное дифференциальное уравнение Риккати и полугруппа дробно-линейных преобразований // Успехи мат. наук. – 1973. – **28**, вып. 3. – С. 83 – 120.
2. *Массера Х., Шеффер Х.* Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства. – М. : Мир, 1970. – 456 с.
3. *Крейн М. Г.* Лекции по теории устойчивости решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1954. – 186 с.
4. *Дороговцев А. Я.* Стохастически периодические решения дифференциальных уравнений с операторными коэффициентами // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**. №4. – С. 489 – 496.
5. *Риордан Дж.* Комбинаторные тождества. – М.: Наука, 1982. – 256 с.
6. *Дороговцев А. Я.* Ограниченные и периодические решения некоторых разностных дифференциальных операторных уравнений // Успехи мат. наук. – 1991. – **46**, вып. 6. – С. 149 – 150.
7. *Lumer G., Rosenblum M.* Linear operator equations // Proc. Amer. Math. Soc. – 1959.– **10**, №1.– С. 32 – 41.

Получено 11.02.92