УДК 517. 983

С. А. Плакса, канд. физ.-мат. наук (Ин-т математики АН Украины, Киев)

О ВОЗМУЩЕНИИ ПОЛУНЕТЕРОВЫХ ОПЕРАТОРОВ В НЕПОЛНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ. I

Рассматривается задача о возмущении полунетерового оператора при минимальных предположениях о заданных пространствах.

Розглядається задача про збурення напівнетерового оператора при мінімальних припущеннях про задані простори.

Теория нетеровых операторов возникла как естественное обобщение теории интегральных уравнений Фредгольма и теории сингулярных интегральных уравнений. Классическими результатами теории нетеровых операторов в банаховых пространствах являются теоремы об устойчивости нетеровости (полунетеровости) и индекса замкнутого оператора A при относительно малых и относительно компактных возмущениях [1, 2]. Распространению теории возмущений на более общие пространства посвящена обширная литература (см. [3 – 7], имеющуюся там библиографию и обзор [8]), однако попытки освобождения от условия полноты пространств при доказательстве устойчивости полунетеровости встретили серьезные трудности топологического характера. В то же время при расширении классов заданных объектов в теории сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши обнаружены примеры нетеровых операторов в неполных пространствах [9, 10], причем устойчивых относительно широкого класса возмущений введенных в [10].

В данной работе рассматривается задача о возмущении полунетерового оператора $A : X \to Y$, где X и Y — векторные пространства, оператором $T : X \to Y$. Применяются два подхода к решению указанной задачи. Первый (см. п. 1) использует применявшуюся ранее для доказательства теорем устойчивости методологию [1 – 4], которая в главных чертах восходит к основополагающим работам [11, 12]. Методы, используемые при этом подходе, носят топологический характер, поскольку тесно связаны с топологическими свойствами пространств X, Y и операторов A, T. В п. 1 мы ограничиваемся относительно предкомпактными возмущениями T, не налагая при этом никаких специальных предположений на топологию пространств X и Y (в работах [6, 7] изучались также относительно малые возмущения операторов, действующих в локально выпуклых топологических векторных пространствах, специфика которых существенно использовалась в доказательствах). Отказ от условий полноты пространств X и Y при первом подходе требует для нетеровости или полунетеровости суммы $A + T$ вместо замкнутости A выполнения, вообще говоря, более сильных предположений о нем (существование обобщенно обратного к A оператора A_{-1}, сужение которого на образ оператора A непрерывно и др.), которые, впрочем, в ранее изученных случаях эквивалентны замкнутости A. Аналогичные факты встречались ранее в теоремах об открытом отображении и замкнутом графике [13].

Второй подход к решению указанной задачи (см. п. 2) связан с применением к ней известного из теории сингулярных интегральных уравнений метода регуляризации Карлемана — Векуа [14, 15]. Этот метод носит алгебраический характер, поскольку он по существу нейтрален к топологическим свойствам заданных пространств и операторов.

Отметим, что в классической теории сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши метод Карлемана — Векуа применялся в задаче о возмущении к односторонне обратимому нетеровому оператору A. С исходным уравнением связывалось не сопряженное, а так называемое союзное уравнение, которое по своим свойствам в определенном смысле симметрично исходному. Указанные

© С. А. ПЛАКСА, 1993

свойства оператора A и союзные уравнения существенно использовались при доказательстве теорем Нетера [14, 15].

Нам удалось принципиальную идею метода Карлемана — Векуа применить в более общих случаях, когда отсутствует упомянутая симметрия между исходным и союзным уравнениями [10, 16], а также в случае, когда A — произвольный полунетеровый оператор с конечным дефектом (см. теорему 8 данной работы).

Принципиальное отличие между методами, используемыми при двух упомянутых подходах к решению задачи о возмущении, влечет столь же значительные различия при этих подходах и в условиях на заданные пространства и операторы. При этом результаты, полученные одной группой методов, не включают в себя результаты, полученные другой группой.

Автор признателен проф. П. М. Тамразову за постановку задачи и полезные обсуждения результатов данной работы.

1. Пусть X и Y — векторные пространства (в. п.), $A : D_A \to Y$ — линейный оператор с областью определения $D_A, D_A \subset X$, и со значениями в Y. *Ядром* оператора A называется множество $\operatorname{Ker} A := \{x \in D_A : A x = 0\}$, *образом* оператора A — множество $\operatorname{Im} A \equiv A(D_A) := \{y = A x : x \in D_A\}$, *прообразом* множества Y_0, $Y_0 \subset Y$, при отображении A — множество $A^{-1}(Y_0) := \{x \in X : A x \in Y_0\}$ (в формульных определениях используются знаки „$:=$" и „$=:$", причем двоеточие пишется со стороны вводимого обозначения), *дефектом* оператора A (обозначим $\operatorname{def} A$) — размерность фактор-пространства $Y / \operatorname{Im} A$. Если хотя бы одно из чисел $\dim\operatorname{Ker} A$ (размерность $\operatorname{Ker} A$), $\operatorname{def} A$ конечно, то разность $\dim\operatorname{Ker} A - \operatorname{def} A$ называют *индексом* оператора A и обозначают $\operatorname{Ind} A$. Сужение оператора A на множество $D \subset D_A$ обозначим через $A|_D$.

Пусть X и Y — топологические векторные пространства (т. в. п.). Оператор $A : D_A \to Y$, $D_A \subset X$, называют *замкнутым*, если его график $\{(x, A x) : x \in D_A\}$ замкнут в декартовом произведении $X \times Y$. Очевидно, оператор A замкнут тогда и только тогда, когда из того, что фильтр $\mathcal{F}$ на D_A сходится к $x \in X$ (обозначим $\mathcal{F} \to x$) и $A(\mathcal{F}) \to y \in Y$, следует, что $x \in D_A$ и $A x = y$.

$A : D_A \to Y$ назовем оператором *замкнутого типа*, если из того, что $\mathcal{F}$ — фильтр Коши на D_A и $A(\mathcal{F}) \to y \in Y$, следует, что $\mathcal{F} \to x \in D_A$ и $A x = y$. Чтобы A был оператором замкнутого типа, очевидно, достаточно, чтобы указанное в определении оператора замкнутого типа условие выполнялось для ультрафильтров Коши $\mathcal{F}$.

Некоторые соотношения между непрерывными, замкнутыми операторами и операторами замкнутого типа указаны в следующем легко проверяемом утверждении.

Предложение 1. *Пусть X и Y — т. в. п., $A : D_A \to Y$, $D_A \subset X$. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *если X хаусдорфово и оператор A замкнутого типа, то A замкнут;*
2) *если X полно и A замкнут, то оператор A замкнутого типа;*
3) *если Y хаусдорфово, A непрерывен, и D_A замкнуто в X, то A замкнут;*
4) *если Y хаусдорфово, A непрерывен и D_A — полное множество, то оператор A замкнутого типа*;
5) *если Y полно, A непрерывен и замкнут, то D_A замкнуто в X*;
6) *если Y полно, оператор A непрерывен и замкнутого типа, то D_A — полное множество.*

Справедливо следующее утверждение.

Предложение 2. *Пусть* X *и* Y *— т. в. п.,* $A : D_A \to Y$, $D_A \subset X$, M *— векторное подпространство* Y, $N = A^{-1}(M)$, $\tilde{A} : D_A / N \to Y / M$ *— оператор, определяемый равенством* $\tilde{A}\tilde{x} = k_M(A x)$, *где* $\tilde{x} \in D_A / N$, $x \in \tilde{x}$, k_M *— каноническое отображение* Y *на* Y / M. *Тогда*:

1) *если* $\hat{D}_A / f(N)$ *полно (здесь* $\hat{D}_A$ *— некоторое пополнение* $D_A, f : D_A \to \hat{D}_A$ *— изоморфизм* D_A *на плотное в* $\hat{D}_A$ *множество* $f(D_A)$ *и оператор* A *замкнутого типа, то оператор* $\tilde{A}$ *замкнутого типа*;

2) *если* $M = \{0\}$, *оператор* $\tilde{A}$ *замкнутого типа, и* $\operatorname{Ker} A$ *— замкнутое полное множество в* X, *то оператор* A *замкнутого типа.*

Доказательство. Докажем утверждение 1. Пусть $\tilde{\mathcal{F}}$ — ультрафильтр Коши на D_A / N, $\tilde{A}(\tilde{\mathcal{F}}) \to k_M(y)$. Тогда множества

$$G_{\tilde{F}, W} := (y + W) \cap k_M^{-1}(\tilde{A}(\tilde{F})), \tag{1}$$

где $\tilde{F} \in \tilde{\mathcal{F}}$ и W принадлежит базису окрестностей нуля в Y, образуют базис фильтра $\mathcal{G}$ на $\operatorname{Im} A$ такого, что $\mathcal{G} \to y$.

Множества $\hat{k}_N f\, k_N^{-1}(\tilde{F})$ (здесь $\tilde{F} \in \tilde{\mathcal{F}}$, k_N и $\hat{k}_N$ — канонические отображения соответственно D_A на D_A / N и $\hat{D}_A$ на $\hat{D}_A / f(N)$) образуют базис фильтра Коши $\hat{\mathcal{F}}$ на $\hat{D}_A / f(N)$, при этом $\hat{\mathcal{F}} \to \hat{k}_N(\hat{x})$, где $\hat{x} \in \hat{D}_A$.

Тогда множества $F_{U,W} := A^{-1}(G_{\tilde{F}, W}) \cap f^{-1}(\hat{x} + \overline{f(U)})$ (здесь $\tilde{F} \in \tilde{\mathcal{F}}$, U и W принадлежат соответственно базисам окрестностей нуля в X и Y, $G_{\tilde{F}, W}$ определяются равенством (1)) образуют базис фильтра Коши $\mathcal{F}$ на D_A, для которого $k_N(\mathcal{F}) = \tilde{\mathcal{F}}$ (поскольку $\tilde{\mathcal{F}}$ — ультрафильтр) и $\mathcal{G} \subset A(\mathcal{F})$. Значит, $A(\mathcal{F}) \to y$, и поскольку оператор A замкнутого типа, то $\mathcal{F} \to x$ и $A x = y$. Отсюда получаем $\tilde{\mathcal{F}} \to k_N(x)$ и $\tilde{A}(k_N(x)) = k_M(y)$, а значит, оператор $\tilde{A}$ замкнутого типа. Утверждение 1 доказано.

Докажем теперь утверждение 2. Если $M = \{0\}$, то $N = \operatorname{Ker} A$, $Y / M = Y$, k_M — тождественное отображение в Y. Пусть $\mathcal{F}$ — ультрафильтр Коши на D_A, $A(\mathcal{F}) \to y$. Тогда $k_N(\mathcal{F})$ — фильтр Коши на D_A / N и $\tilde{A}(k_N(\mathcal{F})) \to y$. Поскольку оператор $\tilde{A}$ замкнутого типа, то $k_N(\mathcal{F}) \to k_N(x_0)$ и $\tilde{A}(k_N(x_0)) = y$. Тогда множества

$$F'_U := (x_0 + U) \cap k_N^{-1}(k_N(F)), \tag{2}$$

где F пробегает $\mathcal{F}$ и U пробегает базис окрестностей нуля в X, образуют базис фильтра $\mathcal{F}'$ на D_A такого, что $\mathcal{F}' \to x_0$, $A(\mathcal{F}') \to y$ и $A x_0 = y$.

Множества

$$G_{F,U} := (F - F'_U) \cap \operatorname{Ker} A \tag{3}$$

(здесь F пробегает $\mathcal{F}$, U пробегает базис окрестностей нуля в X, F'_U определяется равенством (2)) образуют базис фильтра Коши $\mathcal{G}$ на $\operatorname{Ker} A$. Поскольку $\operatorname{Ker} A$ — полное и замкнутое множество в X, то $\mathcal{G} \to z \in \operatorname{Ker} A$.

Множества $F \cap (F'_U + G_{F,U})$ (здесь $F \in \mathcal{F}, U$ принадлежит базису окрестностей нуля в X, F'_U и $G_{F,U}$ определяются соответственно равенствами (2) и (3)) образуют базис фильтра Коши $\mathcal{F}_1$ на D_A, сходящегося к $x_0 + z_0$. Поскольку $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}$ — ультрафильтр, то $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}$. Таким образом, $\mathcal{F} \to x_0 + z_0$ и $A(x_0 + z_0) = A x_0 = y$. Предложение 2 доказано.

Пусть $A : D_A \to Y$, $D_A \subset X$. Оператор $A_{-1} : Y \to X$ назовем *обобщенно обратным* к A, если $A A_{-1} A = A$.

В приводимой ниже теореме 3 о возбуждении оператора A одним из основных требований к нему является существование оператора A_{-1}, сужение которого на $\operatorname{Im} A$ непрерывно. В следующем утверждении, обобщающем теорему 1 [17], указываются некоторые связи этого свойства оператора A со свойствами замкнутости A.

Предложение 3. *Пусть X и Y — т. в. п, $A : D_A \to Y$, $D_A \subset X$,* $\operatorname{Im} A$ *замкнут в Y,* $\operatorname{Ker} A$ *— замкнутое (или полное) множество в X и сужение на* $\operatorname{Im} A$ *некоторого обобщенно обратного к A оператора A_{-1} непрерывно. Тогда оператор A замкнут (соответственно замкнутого типа).*

Доказательство. Пусть $\mathcal{F}$ — ультрафильтр Коши на D_A такой, что $A(\mathcal{F}) \to y$. Поскольку $\operatorname{Im} A$ замкнут в Y, $A_{-1}A(\mathcal{F}) \to A_{-1} y \in D_A$. Множества $(F - A_{-1} A(F)) \cap \operatorname{Ker} A$, где $F \in \mathcal{F}$, образуют базис фильтра Коши $\mathcal{G}$ на $\operatorname{Ker} A$. Если $\operatorname{Ker} A$ — полное множество в X, то $\mathcal{G} \to x_0 \in \operatorname{Ker} A$ и тогда, очевидно, $\mathcal{F} \to (A_{-1} y + x_0) \in D_A$ и $A(A_{-1} y + x_0) = y$, а значит, оператор A замкнутого типа. Если же $\operatorname{Ker} A$ замкнуто в X и $\mathcal{F} \to x \in X$, то $\mathcal{G} \to (x - A_{-1} y) \in \operatorname{Ker} A$ и тогда $x \in D_A$, а значит, оператор A замкнут. Доказательство закончено.

Пусть X — в. п., Y — т. в. п. Оператор $A : X \to Y$ называют *полунетеровым*, если $\operatorname{Im} A$ замкнут в Y и хотя бы одно из чисел $\dim \operatorname{Ker} A$, $\operatorname{def} A$ конечно. Полунетеровый оператор конечного индекса называют *нетеровым*, а нетеровый оператор нулевого индекса — *фредгольмовым*.

Пусть X и Y — т. в. п. Оператор $T : X \to Y$ называется *компактным* (*предкомпактным*), если существует окрестность нуля U в X и компактное (соответственно предкомпактное) множество K в Y такие, что $T(U) \subset K$.

Оператор $T : X \to Y$ назовем *обобщенно компактным*, если для всякого ультрафильтра Коши $\mathcal{F}$ на X образ его $A(\mathcal{F})$ сходится в Y.

Очевидно, компактный оператор является предкомпактным и обобщенно компактным.

Пусть $A : D_A \to Y$, $D_A \subset X$. Определим в D_A топологию ξ_A, базис окрестностей нуля в которой образуют множества $W_{U,V} = \{x \in D_A \cap U : A x \in V\}$, где U и V принадлежат соответственно базисам окрестностей нуля в X и Y. Т.в.п. D_A, наделенное топологией ξ_A, обозначим через D_{A,ξ_A}. Очевидно, оператор $A : D_{A,\xi_A} \to Y$ непрерывен.

Оператор $T : D_A \to Y$ будем называть *компактным* (*предкомпактным* или *обобщенно компактным*) *относительно оператора* A, если T компактен (соответственно предкомпактен или обобщенно компактен) из D_{A,ξ_A} в Y.

Если оператор $A : D_A \to Y$ замкнутого типа и $T : D_A \to Y$ — обобщенно компактный оператор, то, очевидно, оператор $A + T$ замкнутого типа.

Справедливы следующие теоремы 1, 2, методология доказательства которых аналогична применявшейся ранее [2, с. 25 ; 3, с. 207], и в главных чертах восходит к идеям работы [11].

Теорема 1. *Пусть X — хаусдорфово т. в. п., Y — т. в. п., $A : D_A \to Y$, $D_A \subset X$, $\operatorname{Ker} A$ конечномерно и сужение на $\operatorname{Im} A$ некоторого обобщенно обратного к A оператора A_{-1} непрерывно. Тогда в X существует окрестность нуля U_0 такая, что всякий ультрафильтр $\mathcal{F}$ на D_A, содержащий $U_0 \cap D_A$, образ которого $A(\mathcal{F})$ является фильтром Коши. Если к тому же $A(\mathcal{F})$ сходится к $y_0 \in \operatorname{Im} A$, то $\mathcal{F}$ сходится в X.*

Доказательство. Пусть V_0 — некоторая окрестность нуля в X и U_0 — окрестность нуля в X такая, что $U_0 + U_0 = V_0$. Пусть $\mathcal{F}$ — ультрафильтр на D_A, содержащий $U_0 \cap D_A$, образ которого $A(\mathcal{F})$ является фильтром Коши. В силу непрерывности сужения A_{-1} на $\operatorname{Im} A$ фильтр $A_{-1}A(\mathcal{F})$ является фильтром Коши. Поэтому он содержит множество малое порядка U_0. Пусть x — некоторая точка указанного множества из $A_{-1}A(\mathcal{F})$. Поскольку U_0 — поглощающее множество, то $x \in \lambda U_0$ при некотором $\lambda > 1$. Очевидно, множества

$$F' := 2\lambda U_0 \cap A_{-1}A(\mathcal{F}), \tag{4}$$

где F пробегает $\mathcal{F}$, образуют базис фильтра Коши $\mathcal{F}'$ на D_A.

Множества $G_F : (F - F') \cap \operatorname{Ker} A$, где F пробегает $\mathcal{F}$, F' определяется равенством (4), образуют базис фильтра $\mathcal{G}$ на $\operatorname{Ker} A$. Поскольку X хаусдорфово, $\operatorname{Ker} A$ конечномерно и $\mathcal{G}$ содержит множество $2\lambda V_0 \cap \operatorname{Ker} A$, то $\mathcal{G}$ мажорируется фильтром $\mathcal{G}'$, сходящимся к $z_0 \in 2\lambda V_0 \cap \operatorname{Ker} A$.

Множества $F \cap (F' + G')$, где F и G' пробегают соответственно $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}'$, а F' определяется равенством (4), образуют на D_A базис фильтра Коши $\mathcal{F}_1$. Поскольку $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}$ — ультрафильтр, то $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1$.

Если в изложенном выше $A(\mathcal{F}) \to y_0 \in \operatorname{Im} A$, то $A_{-1}A(\mathcal{F}) \to A_{-1}y_0$ и $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \to A_{-1}y_0 + z_0$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть X — хаусдорфово т. в. п., Y — т. в. п., оператор $A : D_A \to Y$, $D_A \subset X$, замкнут и в X существует окрестность нуля U_0 такая, что всякий ультрафильтр $\mathcal{F}$ на D_A, содержащий $U_0 \cap D_A$, для которого $A(\mathcal{F})$ сходится в Y, сходится в X. Тогда $\operatorname{Im} A$ замкнут в Y и $\operatorname{Ker} A$ конечномерно.*

Доказательство. При условиях теоремы $\operatorname{Ker} A$ локально компактно и поэтому конечномерно. Замкнутость $\operatorname{Im} A$ доказывается по аналогии с [3, с. 208]. Теорема доказана.

Векторное пространство X называют *прямой суммой* своих векторных подпространств X_1 и X_2 (обозначим $X = X_1 \dot{+} X_2$), если $X = X_1 + X_2$, $X_1 \cap X_2 = \{0\}$.

С помощью теорем 1, 2 доказывается следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть X и Y — т. в. п., $A : D_A \to Y$, $D_A \subset X$, $\operatorname{Ker} A$ конечномерно, $\{0\} \in \operatorname{Ker} A$ и сужение на $\operatorname{Im} A$ некоторого обобщенно обратного к A оператора A_{-1} непрерывно. Пусть оператор $T : D_A \to Y$ предкомпактен (или предкомпактен относительно A) и оператор $A + T$ (соответственно* *оператор* $(A + T) : D_{A,\xi_A} \to Y)$ *замкнутого типа. Тогда* $\operatorname{Im}(A + T)$ *замкнут в* Y *и* $\operatorname{Ker}(A + T)$ *конечномерно.*

Доказательство. Доказательство проведем для случая, когда T предкомпактен и $A + T$ — замкнутого типа (в случае, когда T предкомпактен относительно A и оператор $(A + T) : D_{A,\xi_A} \to Y$ замкнутого типа, доказательство производится аналогичным образом).

Пусть $X = \operatorname{Ker} A \dotplus X_1$, где $\operatorname{Im} A_{-1} \subset X_1$. При условиях теоремы X_1 является хаусдорфовым т.в.п. в индуцированной топологии. Рассмотрим оператор $A_1 : = A|_{\operatorname{Im} A_{-1}}$. По теореме 1 в X_1 существует окрестность нуля U_0 такая, что всякий ультрафильтр $\mathcal{F}$ на $\operatorname{Im} A_{-1}$, содержащий $U_0 \cap \operatorname{Im} A_{-1}$, у которого $A_1(\mathcal{F})$ является фильтром Коши. Кроме того, в силу предкомпактности оператора T в X_1 существует окрестность нуля V такая, что $V_0 \cap \operatorname{Im} A_{-1}$ отображается оператором T в предкомпактное множество из Y. Пусть $W_0 = U_0 \cap V_0$ и $\mathcal{G}$ — произвольный ультрафильтр на $\operatorname{Im} A_{-1}$, содержащий $W_0 \cap \operatorname{Im} A_{-1}$, для которого фильтр $(A_1 + T)(\mathcal{G})$ сходится в Y. В силу предкомпактности $T / T(\mathcal{G})$ является фильтром Коши, а значит, и $A_1(\mathcal{G})$ является фильтром Коши. По теореме 1 $\mathcal{G}$ является фильтром Коши. Поскольку оператор $A_1 + T$ замкнутого типа, то $\mathcal{G}$ сходится в X_1. Теперь по теореме 2 $\operatorname{Im}(A_1 + T)$ замкнут и $\operatorname{Ker}(A_1 + T)$ конечномерно. Далее утверждение теоремы вытекает из того, что оператор $A + T$ является расширением оператора $A_1 + T$ [2, с. 44]. Теорема доказана.

Замечания. 1. При условиях теоремы 3 Y является хаусдорфовым т. в. п.

2. В теореме 3, вообще говоря, не предпологается замкнутость $\operatorname{Im} A$.

3. В теореме 3 установлены достаточные условия устойчивости полунетеровости конечномерности ядра оператора A при возмущении T. В теореме 8, ч. 2, приводятся условия иного (по сравнению с теоремой 3) вида, достаточные для устойчивости нетеровости и индекса оператора A при возмущении T.

Справедливо следующее утверждение о возмущении тождественного оператора I в хаусдорфовом т. в. п. X предкомпактным оператором T.

Теорема 4. *Пусть* X — *хаусдорфово т. в. п. и оператор* $T : X \to X$ *предкомпактен. Тогда*:

1) $-\infty < \operatorname{Ind}(I + T) \le 0$;

2) *для того чтобы оператор* $I + T$ *был фредгольмов, необходимо и достаточно, чтобы он был оператором замкнутого типа.*

Пусть X — в.п. Через $X^\#$ обозначим *алгебраически сопряженное* к X пространство (т. е. совокупность всех линейных функционалов на X). Если X — т.в.п., то через X^* обозначим *топологически сопряженное* к X пространство (т.е. совокупность всех непрерывных линейных функционалов на X).

Пусть $A : X \to Y$. Линейный оператор $A^\# : Y^\# \to X^\#$, определяемый равентвом $A^\# g(x) : g(Ax) \quad \forall g \in Y^\#, \forall x \in X$, назовем *алгебраически сопряженным* к оператору A.

Легко проверяется, что :

1) уравнение $Ax = y$ имеет решение $x \in X$ тогда и только тогда, когда $\psi(y) = 0 \quad \forall \psi \in \operatorname{Ker} A^\#$;

2) уравнение $A^\# f = g$ имеет решение $f \in Y^\#$ тогда и только тогда, когда $g(x) = 0 \quad \forall x \in \operatorname{Ker} A$.

Пусть X — в. п. и Y — т. в. п. Оператор $A : X \to Y$ назовем *нормально разрешимым*, если уравнение $Ax = y$ имеет решение $x \in X$ тогда, когда $\psi(y) = 0 \quad \forall \psi \in Y^* \cap \operatorname{Ker} A^{\#}$.

Справедливо следующее утверждение.

Предложение 4. *Пусть X — в. п. и Y — т. в. п., $A : X \to Y$. Тогда эквивалентны следующие утверждения:*

1) $\operatorname{Im} A$ *замкнут в* Y *и* $\operatorname{def} A < \infty$;

2) *оператор* A *нормально разрешим и* $\dim Y^* \cap \operatorname{Ker} A^{\#} < \infty$;

3) $\operatorname{Ker} A^{\#} \subset Y^*$ *и* $\dim \operatorname{Ker} A^{\#} < \infty$.

Пусть X — т. в. п. Через $\sigma(X, X^*)$ обозначим слабейшую топологию в X, при которой непрерывны все $g \in X^*$, а пространство X, наделенное топологией $\sigma(X, X^*)$, обозначим через X_σ. Обозначим через X^*_σ пространство X^*, наделенное топологией $\sigma(X^*, X)$ равномерной сходимости на множестве всех конечных подмножеств пространства X, X^*_π — пространство X^*, наделенное топологией $\pi(X^*, X)$ равномерной сходимости на множестве всех замкнутых абсолютно выпуклых предкомпактных подмножеств пространства X.

Пусть X и Y — т. в. п., $A : D_A \to Y$, D_A плотно в X. Через D_{A^*} обозначим множество тех $g \in Y^*$, для которых функционал $A^{\#} g$ непрерывен на D_A. Линейный оператор $A^* : D_{A^*} \to X^*$, определяемый равенством $A^* g(x) := A^{\#} g(x) \ \forall g \in D_{A^*} \ \forall x \in D_A$, назовем *топологически сопряженным* к оператору A. Обозначим через $D_{A,\sigma}$ т.в.п. D_A с топологией, индуцированной в нем топологией $\sigma(X, X^*)$. $(\operatorname{Im} A)_\sigma$ — т.в.п. $\operatorname{Im} A$ с топологией, индуцированной в нем топологией $\sigma(Y, Y^*)$. $D_{A^*,\pi}$ — т.в.п. D_{A^*} с топологией, индуцированной в нем топологией $\pi(Y^*, Y)$. $X^*_{\pi(\xi_A)}$ — т.в.п. X^*, наделенное топологией $\pi(\xi_A)$ равномерной сходимости на множестве всех замкнутых абсолютно выпуклых предкомпактных подмножеств пространства D_{A,ξ_A}.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 5. *Пусть X и Y — т. в. п., $A : D_A \to Y$, D_A плотно в X и существует непрерывный обобщенно обратный к A оператор $A_{-1} : Y_\sigma \to X_\sigma$. Тогда $\operatorname{Im} A^*$ замкнут во всех локально выпуклых топологиях в X^*, согласующихся с двойственностью между X^* и X.*

Доказательство теоремы 5 использует замкнутость оператора A^* и следующую лемму.

Лемма. При условиях теоремы 5

$$A^* A^*_{-1} A^* g = A^* g \quad \forall g \in D_{A^*}.$$

Доказательство. Возьмем произвольные $g \in D_{A^*}$ и $x \in D_A$. Тогда $A^* g(x) = g(Ax) = g(A A_{-1} A x) = A^* g(A_{-1} A x) = A^*_{-1} A^* g(Ax) = A^{\#} A^*_{-1} A^* g(x)$. Таким образом, функционал $A^{\#} A^*_{-1} A^* g$ непрерывен на D_A. Поэтому $A^*_{-1} A^* g \in D_{A^*}$ и $A^* g = A^* A^*_{-1} A^* g$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 5. С учетом предложения 8 [3] достаточно доказать замкнутость $\operatorname{Im} A^*$ в X^*_π. Пусть $\mathcal{F}^*$ — фильтр на $\operatorname{Im} A^*$, сходящийся в X^*_π к f. В силу непрерывности оператора $A^*_{-1}: X^*_\pi \to Y^*_\pi$ фильтр $A^*_{-1}\mathcal{F}^*$ сходится в Y^*_π к $A^*_{-1} f = : g$. Кроме того, по лемме $A^* A^*_{-1} \mathcal{F}^* = \mathcal{F}^*$. В силу замкнутости оператора A^* имеем $g \in D_{A^*}$ и $f = A^* g$, т. е. $f \in \operatorname{Im} A^*$. Теорема доказана.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 6. *Пусть X и Y — т. в. п., $A: D_A \to Y$, D_A плотно в X, $\bigcap\limits_{g \in D_{A^*}} \operatorname{Ker} g \subset \operatorname{Im} A$ и $\operatorname{Im} A^*$ замкнут в X^*_σ. Тогда отображение $A_1 : D_{A,\sigma} \to$ $\to (\operatorname{Im} A / (\bigcap\limits_{g \in D_{A^*}} \operatorname{Ker} g))_\sigma$, определяемое равенством $A_1 x := k(Ax)$ $\forall x \in D_A$ (здесь k — каноническое отображение Y на $Y/\bigcap\limits_{g \in D_{A^*}} \operatorname{Ker} g$)), открыто.*

Доказательство. Обозначим $M := \bigcap\limits_{g \in D_{A^*}} \operatorname{Ker} g$, $N : A^{-1}(M)$. Тогда $N = \{x \in D_A : f(x) = 0 \quad \forall f \subset \operatorname{Im} A^*\}$ и $\operatorname{Im} A^* = N^\circ := \{f \in X^* : f(x) = 0$ $\forall x \in N\}$ [4, с. 686].

Пусть $\tilde{A}: D_A / N \to Y/M$ — оператор, определяемый равенством $\tilde{A}\tilde{x} := k(Ax)$, где $\tilde{x} \in D_A/N$, $x \in \tilde{x}$. Справедливы соотношения $D_{A^*} \subset M^\circ := \{g \in Y^* : g(y) = 0 \quad \forall y \in M\}$, $M^\circ = (Y/M)^*$, $g(Ax) = g(\tilde{A}\tilde{x})$ $\forall g \in M^\circ$ $\forall \tilde{x} \in D_A/N$ $\forall x \in \tilde{x}$, в силу которых $D_{\tilde{A}^*} = D_{A^*}$. Тогда $A^* = E\tilde{A}^*$, где E — вложение N° в X^*, и $\operatorname{Im} \tilde{A}^* = N^\circ = (D_A/N)^*$. Теперь так же, как и в [4, с. 707], доказывается, что отображение $\tilde{A}: (D_A/N)_\sigma \to (\operatorname{Im} A/M)_\sigma$ открыто, что равносильно открытости отображения $A_1 : D_{A,\sigma} \to (\operatorname{Im} A/M)_\sigma$. Теорема доказана.

С помощью теорем 3, 5, 6 и перехода к топологически сопряженным операторам доказывается следующее утверждение.

Теорема 7. *Пусть X и Y — т. в. п., $A: D_A \to Y$, D_A плотно в X, $\operatorname{def} A < \infty$ и некоторый обобщенно обратный к A оператор $A_{-1}: Y \to X$ непрерывен. Пусть оператор $T: D_A \to Y$ предкомпактен (или предкомпактен относительно A), $M := \bigcap\limits_{g \in D_{A^*}} \operatorname{Ker} g \subset \operatorname{Im}(A+T)$, операторы $(A^* + T^*)$: $D_{A^*,\pi} \to X^*_\pi$ (соответственно, $(A^*+T^*): D_{A^*,\pi} \to X^*_{\pi(\xi_A)}$) и $(\overline{A+T})$: $(D_A/N)_\sigma \to (Y/M)_\sigma$ замкнутого типа (здесь $N : (A+T)^{-1}(M)$; $(\overline{A+T})\tilde{x} := k_M((A+T)x)$, $\tilde{x} \in D_A/N$, $x \in \tilde{x}$, k_M — каноническое отображение Y на Y/M). Тогда $\operatorname{Im}(A+T)$ замкнут в Y_σ и $\operatorname{def}(A+T) < \infty$.*

Доказательство. Доказательство проведем в случае, когда T предкомпактен и оператор $(A^*+T^*): D_{A^*,\pi} \to X^*_\pi$ — замкнутого типа (в случае, когда T предкомпактен относительно A и оператор $(A^*+T^*): D_{A^*,\pi} \to X^*_{\pi(\xi_A)}$ замкнутого типа, доказательство производится аналогичным образом).

По теореме 5 $\operatorname{Im} A$ замкнут в X^*_π. Кроме того, $\operatorname{Ker} A^*$ конечномерно, оператор $A^*_{-1}: X^*_\pi \to Y^*_\pi$ непрерывен, оператор $T^*: Y^*_\pi \to X^*_\pi$ предкомпактен, а пространство Y_π^* хаусдорфово. В силу теоремы 3 $\mathrm{Im}\ (A^* + T^*)$ замкнут в X_π^* (а значит, и в X_σ^*) и $\mathrm{Ker}\ (A^* + T^*)$ конечномерно.

Докажем теперь замкнутость $\mathrm{Im}\ (A + T)$ в Y_σ. Пусть $\mathcal{G}$ — фильтр на $\mathrm{Im}\ (A + T)$, сходящийся в Y_σ к y. Тогда $k_M(\mathcal{G})$ сходится в $(Y/M)_\sigma$ к $k_M(y)$. Согласно теореме 6 из замкнутости $\mathrm{Im}\ (A^* + T^*)$ в X_σ^* следует открытость отображения $(\widetilde{A+T}) : (D_A/N)_\sigma \to (\mathrm{Im}\ (A + T)/M)_\sigma$. Поэтому фильтр $(\widetilde{A+T})^{-1}(k_M(\mathcal{G}))$ является фильтром Коши. Поскольку оператор $\widetilde{A+T}$ замкнутого типа, то $(\widetilde{A+T})^{-1}(k_M(\mathcal{G}))$ сходится в $(D_A/N)_\sigma$ к $\tilde{x}_0$, при этом $(\widetilde{A+T})\tilde{x}_0 = k_M(y)$. Отсюда очевидным образом следует $y \in \mathrm{Im}\ (A + T)$, а значит, $\mathrm{Im}\ (A + T)$ замкнут в Y_σ, поэтому оператор $A + T$ нормально разрешим и поскольку, кроме того, $\mathrm{Ker}\ (A^* + T^*)$ конечномерно, то $\mathrm{def}\ (A + T) < \infty$. Теорема доказана.

Замечания. 4. Если в условиях теоремы 7 пространство Y_π^* полно, то операторы $(A^* + T^*) : D_{A^*,\pi} \to X_\pi^*$ и $(A^* + T^*) : D_{A^*,\pi} \to X_{\pi(\xi_A)}^*$ замкнутого типа.

5. В теореме 7, вообще говоря, не предполагается замкнутость $\mathrm{Im}\ A$.

6. В теореме 7 установлены достаточные условия устойчивости полунетеровости и конечности дефекта оператора A при возмущении T.

В теореме 8, ч. 2, сформулированы условия иного (по сравнению с теоремой 7) вида, достаточные для устойчивости полунетеровости и конечности дефекта оператора A при возмущении T.

1. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. – М.: Мир, 1972. – 740 с.
2. *Крейн С. Г.* Линейные уравнения в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1971. – 104 с.
3. *Робертсон А., Робертсон В.* Топологические векторные пространства. – М.: Мир, 1967.– 257 с.
4. *Эдвардс Э.* Функциональный анализ. – М.: Мир, 1969. – 1071 с.
5. *Przeworska-Rolewisz D., Rolewisz S.* Equations in linear spaces. – Warszawa, 1968. – 380 p.
6. *Le Quang Chu.* Duality and perturbations of Φ_+ and Φ_--operators // Indiana Univ. Math. J. – 1977. – **26**, № 5. – P. 905 – 914.
7. *Mennicken R., Sagraloff B.* Störungstheoretishe Untershungen über Semi-Fredholmpaare und operatoren in lokal konvexen Vektorräumen, II // J. reine angew. Math.– 1978.– **303 / 304**.– P. 389 – 436.
8. *Крачковский С. Н., Диканский А. С.* Фредгольмовы операторы и их обобщения // Итоги науки. Сер. Мат. анализ, 1968. – М.: ВИНИТИ, 1969. – С. 39 – 71.
9. *Бабаев А. А., Салаев В. В.* Краевые задачи и сингулярные уравнения на спрямляемом контуре // Мат. заметки. – 1982. – **31**, № 4. – С. 571 – 580.
10. *Плакса С. А.* О нетеровости сингулярных интегральных уравнений на спрямляемой кривой // Докл. расшир. заседаний семинара Ин-та прикл. математики им. И. Н. Векуа, Тбилиси, 23 – 26 апр. 1990 г. – Тбилиси : Тбилис. ун-т, 1990. – **5**, № 1. – С. 161 – 164.
11. *Пис Ф. О* линейных функциональных уравнениях // Успехи мат. наук.– 1936.– 1.– С. 175 – 199.
12. *Schauder J.* Uber linear, vollstetige Funktionaloperatoren // Studia Math. – 1930. – **2**. – P. 183 – 196.
13. *Robertson W.* Completions of topological vector spaces // Proc. London. Math. Soc.– 1958.– **8**.– P. 242 – 257.
14. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. – М.: Наука, 1977. – 640 с.
15. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Наука, 1968. – 511 с.
16. *Плакса С. А.* Сингулярные интегральные уравнения на спрямляемой кривой. – Киев, 1989. – 35 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 89. 7).
17. *Гольдман М. А., Крачковский С. Н.* О произведениях, степенях и сужениях гомоморфизмов // Докл. АН СССР. – 1968. – **181**, № 5. – С. 1038 – 1041.

Получено 26. 12.91