УДК 517.9

В. Х. Симоконь, ст. преп. (Киев. политехн. ин-т),
Е. П. Трофимчук, канд. физ.-мат. наук (Киев. политехн. ин-т)

О РЕГУЛЯРНОСТИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ВЫРОЖДЕННОЙ МАТРИЦЕЙ ПРИ ПРОИЗВОДНОЙ

Доказаны новые достаточные условия существования инвариантных многообразий у линейных систем с вырожденной матрицей при производной.

Доведені нові достатні умови існування інваріантних многовидів у лінійних систем з виродженою матрицею при похідній.

1. Введение. Пусть M — компактное гладкое многообразие, на котором определено векторное поле $\dot{\varphi} = a(\varphi)$. Рассмотрим дифференциальную систему с вырождающейся матрицей $B(\varphi)$ при производной

$$B(\varphi)dx/dt = A(\varphi)x + h(\varphi), \quad \dot{\varphi} = a(\varphi). \tag{1}$$

Предполагается, что $\forall\varphi$ задача Коши $\varphi_0(\varphi) = \varphi$ для второго уравнения системы (1) имеет единственное решение $\varphi_t(\varphi): R \to M$; $x \in R^n$; матрицы-функции $B(\varphi)$ и $A(\varphi)$ непрерывны на M и $h(\varphi) \in C(M, R^n)$.

Пусть X, Y — подмножества $C(M, R^n)$. Систему (1) назовем (X, Y)-регулярной, если для каждой функции $h(\varphi) \in X$ существует решение $u(\varphi) \in Y$ системы. Цель нашего исследования — установить достаточные условия регулярности системы (1) (см. также [1, 2]).

Пусть пространство $C'(M, R^n) \subset C(M, R^n)$ состоит из тех вектор-функций, для которых существует производная

$$d/dt\,(U(\varphi_t(\varphi)))\,|_{t=0} = U'(\varphi) \in C(M, R^n);$$

$C'(M, R^n)$ — банахово пространство с нормой $|u(\varphi)| = \max\|u(\varphi)\| + \max\|u'(\varphi)|$. Аналогично определяется пространство $C'(M, M_n(R))$ матриц-функций. Сильным решением (или просто решением) системы (1) назовем функцию $u(\varphi) \in C'(M, R^n)$ такую, что $B(\varphi)u'(\varphi) = A(\varphi)u(\varphi) + h(\varphi)$.

Таким образом, (X, C')-регулярность означает, что для $\forall\, h(\varphi) \in X$ система (1) имеет сильное решение.

2. Допустимые преобразования системы (1). Регулярность системы

$$B(\varphi)dx/dt = A(\varphi)x, \ \dot{\varphi} = a(\varphi) \tag{2}$$

равносильна регулярности системы

$$T(\varphi)B(\varphi)Sdx/dt = T(\varphi)A(\varphi)Sx, \ \dot{\varphi} = a(\varphi)$$

при $T(\varphi) \in C(M, GL(n, R)), S \in GL(n, R)$. Следовательно, при исследовании (2) со строками и столбцами матриц $B(\varphi)$ и $A(\varphi)$ одновременно можно проводить элементарные операции, и поэтому при изучении (2) целесообразно привести пару $(B(\varphi), A(\varphi))$ к простейшему виду.

Предложение 1. *Выполнение неравенств*

$$\operatorname{rang} B(\varphi) + \operatorname{rang}(A(\varphi) + qB(\varphi)) \geq n, \tag{3}$$

$$\operatorname{rang} A(\varphi) + \operatorname{rang}(B(\varphi) + qA(\varphi)) \geq n \tag{4}$$

для каждых $\varphi \in M, q \in R$ необходимо для (C, C')-регулярности (2).

Доказательство. Зафиксируем φ и методом Гаусса приведем матрицу $B(\varphi)$ к диагональному виду $\operatorname{diag}(I_r, O_{n-r})$, где I_r — единичная $r \times r$-матрица, $r = \operatorname{rang} B(\varphi)$. Система (1) при этом в точке φ приводится к виду

$$\begin{aligned} \dot u &= \hat A_{11}(\varphi)u + \hat A_{12}(\varphi)v + h_1, \\ 0 &= \hat A_{21}(\varphi)u + \hat A_{22}(\varphi)v + h_2. \end{aligned} \tag{5}$$

Так как при (C, C')-регулярности (5) второе уравнение этой системы должно быть разрешимо при любом векторе h_2, то $\operatorname{rang}(\hat A_{21}, \hat A_{22}) = \dim v = n - r$, откуда следует (3). Аналогично доказывается (4). Заметим, что (3) и (4) всегда выполнены, если $\det A(\varphi) \neq 0 \ \ \forall \varphi$.

3. Системы с постоянной матрицей *B*. Заметим, если $B(\varphi)$ непостоянна, то (C, C')-регулярность (2) эквивалентна регулярности системы

$$dx/dt = y + h, 0 = Ax - By + f$$

порядка $2n$ с постоянной матрицей $\operatorname{diag}(I_n, O_n)$ при производной.

Предположим теперь, что $\det A(\varphi) \neq 0 \ \ \forall \varphi$, $B(\varphi) \equiv B$, и с помощью процесса Гаусса систему (1) приведем к виду

$$\begin{aligned} \dot u &= C_{11}(\varphi)u + C_{12}(\varphi)v + h_1(\varphi), \\ 0 &= C_{21}(\varphi)u + C_{22}(\varphi)v + h_2(\varphi). \end{aligned} \tag{6}$$

Учитывая невырожденность матрицы $[C_{ij}(\varphi)]$ и разрешая (6) относительно u, находим

$$u = R(\varphi)\dot u + f(\varphi). \tag{7}$$

Из (C', C')-регулярности (7) следует (C', C')-регулярность системы (6) (здесь полагаем, что $[C_{ij}(\varphi)] \in C'(M, M_n(R))$); тем самым снижаем размеры исследуемой системы с n до $\operatorname{rang} B$.

Предложение 2. *Пусть* $B(\varphi) \equiv B$ — постоянная симметрическая матрица, $A(\varphi) \in C'(M, M_n(R))$ *и выполнено одно из следующих неравенств:*

$$\forall \varphi, x \ \ (A(\varphi)x, x) \le -\gamma(x, x), \quad [(A(\varphi)x, x) \ge \gamma(x, x)]. \tag{8}$$

Тогда система (1) (C', C')*-регулярна.*

Доказательство. Так как B — симметрическая матрица, то систему (1) можно привести к виду

$$S\dot u = \hat A_{11}(\varphi)u + \hat A_{12}(\varphi)v + h_1(\varphi), \tag{9}$$

$$0 = \hat A_{21}(\varphi)u + \hat A_{22}(\varphi)v + h_2(\varphi), \tag{10}$$

где матрица $[\hat A_{ij}(\varphi)]$ будет удовлетворять одному из условий (8) (тому же, что и $A(\varphi)$), S — диагональная матрица с ± 1 на диагонали. Далее, в силу (8) $\hat A_{22}(\varphi)$ невырождена, и поэтому из (10) находим

$$v = g(\varphi) - \hat A_{22}^{-1}(\varphi)\hat A_{21}(\varphi)u;$$

подставляя последнее соотношение в (9), получаем

$$S\,du/dt = (\hat A_{11}(\varphi) - \hat A_{12}(\varphi)\hat A_{22}^{-1}(\varphi)\hat A_{21}(\varphi))u + \mu(\varphi).$$

Рассмотрим матрицу $Q(\varphi) = \hat{A}_{11}(\varphi) - \hat{A}_{12}(\varphi)\hat{A}_{22}^{-1}(\varphi)\hat{A}_{21}(\varphi)$ и для определенности предположим, что выполнено первое из неравенств (8). Тогда если в нем положить $x = \mathrm{Colon}\,(u, -\hat{A}_{22}^{-1}(\varphi)\hat{A}_{21}(\varphi)u)$, то непосредственной проверкой можно убедиться в том, что $(Q(\varphi)u, u) \le -\gamma(u, u)$. Теперь несложно доказать (C, C')-регулярность системы

$$Sdu / dt = Q(\varphi)u, \ \dot{\varphi} = a(\varphi) \tag{11}$$

с помощью квадратичных форм Ляпунова (учитывая невырожденность S). Действительно, пусть $V = (Sx, x)$, тогда $\dot{V} = (S\dot{x}, x) + (Sx, \dot{x}) = 2(x, Qx) \le -\gamma(x, x)$, и поэтому система (11) (C, C')-регулярна [1], а вместе с ней (C', C')-регулярна исходная система.

4. Диагональная матрица $B(\varphi)$. Предположим, что исследуемая система имеет вид

$$\dot{\varphi} = \theta(\varphi), \, b_i(\varphi)\dot{x}_i = a_{i1}(\varphi)x_1 + \ldots + a_{in}(\varphi)x_n + h_i(\varphi), \, i = 1, n; \tag{12}$$

где $b_i(\varphi), a_{ij}(\varphi), \ h_i(\varphi) \in C^1(M, R), \theta(\varphi) \in C^1(M)$.

Опишем метод определения достаточных условий (C^1, C^1)-регулярности такой системы, исходя из предположения об экспоненциальной устойчивости (либо неустойчивости) каждого из скалярных линейных расширений

$$\dot{x}_i = a_{ii}(\varphi)x_i, \ \ \dot{\varphi} = \theta^{(i)}(\varphi), \ \ \theta^{(i)}(\varphi) = b_i(\varphi)\theta(\varphi), \ \ i = \overline{1, n}.$$

Для упрощения выкладок будем считать, что $|a_{ii}(\varphi)| > 0 \ \ \forall\varphi$ и M — m-мерный тор. Разделив каждое уравнение (12) на $-a_{ii}(\varphi)$ и вновь обозначив полученные коэффициенты через $b_i(\varphi), a_{ij}(\varphi)$ и $h_i(\varphi)$, получим систему (12), где $a_{ii}(\varphi) \equiv -1$ $\forall i$. Предположим, что $u_j(\varphi) \in C^1(M, R)$, тогда функции

$$v_i(\varphi) = K_i u(\varphi) + H_i(\varphi) \overset{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{0} e^{\tau} \sum_{j \ne i} a_{ij}(\varphi_\tau^{(i)}(\varphi))u_j(\varphi_\tau^{(i)}(\varphi))d\tau + \int_{-\infty}^{0} e^{\tau} h_i(\varphi_\tau^{(i)}(\varphi))d\tau,$$

где $\dot{\varphi}^{(i)} = \theta^{(i)}(\varphi^{(i)})$ корректно определены и непрерывны. Кроме того,

$$v_i'(\varphi) = -v_i(\varphi) + \sum_{j \ne i} a_{ij}(\varphi)u_j(\varphi) + h_i(\varphi); \quad \dot{\varphi} = \theta^{(i)}(\varphi)$$

(заметим, что производная $v_i'(\varphi)$ всегда берется вдоль текущего векторного поля, в данном случае $\dot{\varphi} = \theta^{(i)}(\varphi)$); если дополнительно известно, что $v_i(\varphi) \in C^1(\mathrm{M}, \mathrm{P})$, то $v_i(\varphi)$ определяет гладкий тор линейного расширения

$$b_i(\varphi)v_i'(\varphi) = -v_i(\varphi) + \sum_{j \ne i} a_{ij}(\varphi)u_j(\varphi) + h_i(\varphi); \ \dot{\varphi} = \theta(\varphi)$$

(по этому поводу см. лемму 14.1 из [1]).

Итак, нужно выяснить условия, при которых линейное уравнение

$$Ku + H = u \tag{13}$$

имеет решение $u \in C^1(M, R^n)$; $u(\varphi) = \mathrm{Colon}\,(u_1(\varphi), \ldots, u_n(\varphi))$; $Ku(\varphi) = \mathrm{Colon}\,(K_1 u(\varphi), \ldots, K_n u(\varphi))$, $\ h = \mathrm{Colon}\,(H_1(\varphi), \ldots, H_n(\varphi))$.

В дальнейшем будем рассматривать пространство R^n с нормами $|x| = \max\limits_{i=\overline{1,n}} |x_i|$ и $|x|_\sigma = \sum_{i=1}^n |x_i|$ (при этом $|(x, y)| \le |x| \, |y|_\sigma$); пространства

$C(M, R^n)$ и $C^1(M, R^n)$ соответственно с нормами $|p|_0 = \max_{\varphi\in M} |p(\varphi)|$ и $|p|_1 = \max\{|p(\varphi)|_0, |\partial p(\varphi)/\partial\varphi_i|_0, i=\overline{1,m}\}$.

Предположим, что

$$\mu_i(\varphi) \overset{\text{def}}{=} \min_k \left(\frac{\partial\theta_k^{(i)}(\varphi)}{\partial\varphi_k} - \sum_{j\neq k} \left| \frac{\partial\theta_j^{(i)}(\varphi)}{\partial\varphi_k} \right| \right), \quad 1 + \inf_{\varphi\in M} \mu_i(\varphi) = \delta_i > 0. \tag{14}$$

Функция $\partial\varphi_t^{(i)}/\partial\varphi_j$ есть решение линейной системы в вариациях

$$d\psi/dt = \left[\frac{\partial\theta^{(i)}(\varphi)}{\partial\varphi}\right]\Bigg|_{\varphi=\varphi_\tau^{(i)}(\varphi)} \cdot\psi, \; \partial\varphi_0^{(i)}/\partial\varphi_j = e_j$$

и поэтому согласно результатам §10 из [3] $\forall k$

$$\left|\frac{\partial\varphi_\tau^{(i)}(\varphi)}{\partial\varphi_k}\right|_\sigma \le \exp\left(-\int_\tau^0 \mu_i(\varphi_\tau^{(i)}(\varphi))d\tau\right) \quad \forall\tau\le 0.$$

Пусть $g_i(\varphi) = K_i u(\varphi)$. Тогда

$$|g_i(\varphi)| \le \int_{-\infty}^0 e^\tau \sum_{j\neq i} |a_{ij}(\varphi_\tau^{(i)}(\varphi))|\,|u_j(\varphi_\tau^{(i)}(\varphi))|\,d\tau \le \left|\sum_{j\neq i}|a_{ij}(\varphi_\tau^{(i)}(\varphi))|\right|_0 |u(\varphi)|_0;$$

отсюда

$$|Ku(\varphi)|_0 \le \max_i \left|\sum_{j\neq i}|a_{ij}(\varphi)|\right|_0 |u(\varphi)|_0. \tag{15}$$

Далее, формально

$$\frac{\partial g_i(\varphi)}{\partial\varphi_k} = \int_{-\infty}^0 e^\tau \sum_{j\neq i}\left\{\frac{\partial a_{ij}(\varphi)}{\partial\varphi}\Bigg|_{\varphi_\tau^{(i)}(\varphi)} \cdot \frac{\partial\varphi_\tau^{(i)}(\varphi)}{\partial\varphi_k} u_j(\varphi_\tau^{(i)}(\varphi)) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial u_j(\varphi)}{\partial\varphi}\Bigg|_{\varphi_\tau^{(i)}(\varphi)} \cdot \frac{\partial\varphi_\tau^{(i)}(\varphi)}{\partial\varphi_k} a_{ij}(\varphi_\tau^{(i)}(\varphi))\right\}d\tau.$$

Законность дифференцирования следует из оценок

$$\left|\frac{\partial g_i(\varphi)}{\partial\varphi_k}\right| = \int_{-\infty}^0 e^\tau \sum_{j\neq i}\left\{\left|\frac{\partial a_{ij}(\varphi)}{\partial\varphi}\right| \left|\frac{\partial\varphi_\tau^{(i)}(\varphi)}{\partial\varphi_k}\right|_\sigma \left|u_j(\varphi_\tau^{(i)}(\varphi))\right| + \right.$$

$$\left. + \left|\frac{\partial u_j(\varphi)}{\partial\varphi}\right| \left|\frac{\partial\varphi_\tau^{(i)}(\varphi)}{\partial\varphi_k}\right|_\sigma \left|a_{ij}(\varphi_\tau^{(i)}(\varphi))\right|\right\}d\tau \le$$

$$\le \left|\int_{-\infty}^0 e^{\delta_i\tau} \sum_{j\neq i}\left\{\left|\frac{\partial a_{ij}(\varphi)}{\partial\varphi}\right| + \left|a_{ij}(\varphi_\tau^{(i)}(\varphi))\right|\right\}d\tau\,|u|_1\right| \le$$

$$\le \delta_i^{-1}\left|\sum_{j\neq i}\left\{\left|\frac{\partial a_{ij}(\varphi)}{\partial\varphi}\right| + \left|a_{ij}(\varphi)\right|\right\}\right|_0 |u|_1.$$

Отсюда следует, что $\forall\, k$

$$\left|\frac{\partial Ku}{\partial\varphi_k}\right| \le \max_{i=\overline{1,n}} \delta_i^{-1}\left|\sum_{j\ne i}\left\{\left|\frac{\partial a_{ij}(\varphi)}{\partial\varphi}\right|+\left|a_{ij}(\varphi)\right|\right\}\right|_0 |u|_1,$$

и с учетом (15) получаем, что при выполнении условия (14) K — непрерывный оператор, действующий из $C^1(M, R^n)$ в себя с нормой, меньшей единицы, если справедливы неравенства

$$\sum_{j\ne i}\left\{\left|\frac{\partial a_{ij}(\varphi)}{\partial\varphi}\right|+\left|a_{ij}(\varphi)\right|\right\}<\delta_i,\ \sum_{j\ne i}\left|a_{ij}(\varphi)\right|<1\ \ \forall\,\varphi. \tag{16}$$

Выполнение этих неравенств, очевидно, достаточно и для того, чтобы $H(\varphi)\in C^1(M, R^n)$. Но тогда уравнение (13) имеет решение $u(\varphi)\in C^1(M, R^n)$ в силу теоремы о сжимающих отображениях.

Предложение 3. *Пусть все коэффициенты системы* (12) *— гладкие функции,* $a_{ii}(\varphi)\equiv -1$ *и выполнены неравенства* (14), (16). *Тогда система* (12) *имеет единственное решение* $u(\varphi)\in C^1(M, R^n)$, *и его можно найти, решая уравнение* (13) *методом последовательных приближений.*

5. *Замечание* **1.** Метод интегрального уравнения (13) использовался в [4] для получения достаточных условий экспоненциальной дихотомии (э. д.) линейной системы дифференциальных уравнений

$$dx/dt = A(t)x + f(t),\ t\in R,\ x\in C^n,\ A(t)=[a_{ij}(t)] \tag{17}$$

с выделенной э. д. частью (например, э. д. диагональной системой

$$dx_i/dt = a_{ii}(t)x_i,\ i=\overline{1,n}). \tag{18}$$

В дальнейшем, если решения i-го уравнения системы (18) устойчивы, то положим $R_i \overset{\text{def}}{=} (-\infty, t)$, если неустойчивы, то положим $R_i \overset{\text{def}}{=} (t, +\infty)$; пусть также по определению $w_i(t,u)=\exp\int_u^t a_{ii}(t)ds$.

Из теоремы 3. 1 ([4], гл. 5) можно вывести следующее утверждение.

Лемма. *Если выполнено одно из следующих условий в дополнение к э. д. системы* (17):

$$1)\ \exists\,\delta>0:\ \forall\, i\ \ z_i(t)=\int_{R_i}|\omega_i(t,s)|\sum_{j\ne i}|a_{ij}(s)|\,ds\le\delta<1; \tag{19}$$

$$2)\ \exists\,\delta>0:\ \forall\, i\ \ z_i(t)=\int_{R_i}|\omega_i(t,s)|\sum_{j\ne i}|a_{ji}(s)|\,ds\le\delta<1; \tag{20}$$

то система (17) *экспоненциально дихотомична, причем размерность сепаратрисного многообразия, состоящего из устойчивых ее решений, равна числу скалярных уравнений* (18) *с устойчивыми решениями.*

Из этой леммы можно, в свою очередь, вывести критерий Лейзера э. д. (см. по этому поводу [5]).

Рассмотрим случай почти периодической матриц-функции $A(t)$.

Предложение 4. *Пусть матричная функция* $A(t)$ *почти периодическая и выполнено одно из условий:*

$$1)\ Re\, a_{ii}(t)\ \ge\ \sum_{j\ne i}|a_{ij}(t)|=\lambda_i(t)\ \ \forall\, i=\overline{1,n}; \tag{21}$$

2) $Re\, a_{ii}(t) \ge \sum_{j\ne i} |a_{ji}(t)| \;\forall\, i = \overline{1, n}$;(22)

причем знак $\ge$ *в* (21), (22) *нельзя заменить на знак тождественного равенства* $\equiv$. *Тогда система* (17) *экспоненциально дихотомична, причем размерность сепаратрисного многообразия, состоящего из устойчивых ее решений, равна числу скалярных уравнений* (18) *с устойчивыми решениями. Наконец, система* (17) *почти периодическим преобразованием Ляпунова приводится к блочно-расщепленному виду, согласованному с э. д.*

Доказательство. В принятых условиях функции $z_i(t)$ почти периодичны. Более того, несложно установить, что $z_i(t) < 1 \;\forall\, t, i$. Докажем, что и $\sup_{t\in R} z_i(t) < 1 \;\forall\, i$; тогда предложение 4 будет следовать из леммы. Предположим от противного, что существует такая последовательность $\{s_k\}_{k=1}^{+\infty}$, что $z_i(s_k) \to \to 1$. Из последовательности $\{s_k\}$ можно извлечь такую подпоследовательность $\{s'_k\}$, что также $z_i(t + s'_k) \Rightarrow \tilde z_i(t)$, $\lambda_i(t + s'_k) \Rightarrow \tilde\lambda_i(t)$, $a_{ii}(t + s'_k) \Rightarrow \tilde a_{ii}(t)$. При этом $\tilde\lambda_i(t) \not\equiv \mathrm{Re}\, \tilde a_{ii}(t) \ge \tilde\lambda_i(t)$ и поэтому

$$\tilde z_i(t) = \int_{R_i} \tilde\lambda_i(t) \left\{ \exp \int_s^t |\mathrm{Re}\, \tilde a_{ii}(u)|\, du \right\} ds < 1 \;\; \forall\, t, i,$$

что противоречит равенству $\tilde z_i(0) = 1$. Предложение 4 тем самым доказано.

Отметим, что условия (22), (21) слабее условий Лейзера и позволяют усилить результат [5] для почти периодических линейных систем дифференциальных уравнений. Интересно, что для приведенной в [5] системы

$$\dot x_1 = (-1 - i)x_1 + \exp(-it)\, x_2,$$
$$\dot x_2 = \exp(it)\, x_1 - x_2$$

(имеющей ограниченное решение $x_1(t) = \exp(-it)$, $x_2(t) = 1$) соотношения (22), (21) выполняются со знаком $\equiv$, что подтверждает существенность соответствующего требования предложения 5.

7. rang $B(\varphi) \le 1$. Кроме того, положим: $\det A(\varphi) \ne 0 \;\; \forall\; \varphi$. Тогда вместо системы (1), не ограничивая общности, можно рассматривать систему

$$B(\varphi)\dot y = y + h(\varphi),\; \dot\varphi = a(\varphi), \tag{23}$$

что сокращает выкладки.

Предложение 5. *Пусть* $h(\varphi) \in C'(M, R^n)$, $B(\varphi) \in C'(M, M_n(R))$, *существуют такие функции* $\mu(\varphi), \lambda(\varphi) \in C'(M, R^n)$ *и такой ортопроектор* $P(\varphi) \in C'(M, M_n(R))$ *ранга* $n - 1$, что $B^*(\varphi)\mu(\varphi) = \lambda(\varphi)$, $B^*(\varphi)P(\varphi) = 0$, *причем:*

1) $\mu(\varphi) = 0 \Rightarrow B(\varphi) = 0$;

2) $\mu(\varphi) \ne 0, B(\varphi) \ne 0 \Rightarrow \lambda(\varphi) \ne 0$.

Тогда если одномерное расширение динамической системы $\dot\varphi = a(\varphi)$

$$(\lambda(\varphi), \mu(\varphi))\dot\alpha = \alpha[\,\|\theta(\varphi)\|^2 - (\dot\theta(\varphi), \lambda(\varphi))] + (\dot h(\varphi), \lambda(\varphi)), \tag{24}$$

где $\theta(\varphi) = \mu(\varphi) - P(\varphi)\mu(\varphi)$, *имеет* $C^1(M, R^n)$-*решение* $\alpha(\varphi)$, *то и уравнение* (23) *имеет решение, представимое в виде* $u(\varphi) = -h(\varphi) + \alpha(\varphi)\theta(\varphi)$.

Доказательство. Условия предложения гарантируют справедливость представления $B(\varphi)u = \alpha\theta(\varphi) \;\; \forall\varphi$. (При этом, очевидно, $\theta(\varphi) = 0 \Leftrightarrow \mu(\varphi) = 0$,

$B^*(\varphi)\theta(\varphi) = \lambda(\varphi)$, $\alpha \| \theta(\varphi) \|^2 = (B(\varphi)u, \theta(\varphi))$.) Поэтому решение (23) можно представить в виде

$$y = -h(\varphi) + \alpha\theta(\varphi), \tag{25}$$

где α — скаляр. Подставляя (25) в (23), получаем уравнение

$$B(\varphi)(-\dot{h}(\varphi) + \dot{\alpha}\theta(\varphi) + \alpha\dot{\theta}(\varphi)) = \alpha\theta(\varphi). \tag{26}$$

При умножении (26) на $\| \theta(\varphi) \|^2$ получаем эквивалентное выражение, которое можно преобразовать к виду

$$(-(B(\varphi)\dot{h}(\varphi), \theta(\varphi)) + \dot{\alpha}(B(\varphi)\theta(\varphi), \theta(\varphi)) + \alpha(B(\varphi)\dot{\theta}(\varphi), \theta(\varphi)))\theta(\varphi) = \alpha\theta(\varphi) \| \theta(\varphi) \|^2.$$

В итоге получаем уравнение (24) для α (заметим, что $\| \theta(\varphi) \|^2 = \| \mu(\varphi) \|^2 - \| P(\varphi)\mu(\varphi) \|^2$), и предложение 5 тем самым доказано.

***Замечания.* 2.** В предложении 5 достаточно требовать существования проектора $P(\varphi)$ с указанными свойствами (т. е. не обязательно являющегося ортопроектором), так как по нему можно указать ортопроектор

$$P_1(\varphi) = -\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\lambda|=\varepsilon} \mathrm{Res}_\lambda(P(\varphi))\, d\lambda$$

(ε достаточно мало).

3. Если M — m-мерный тор τ_m, то условия теоремы можно ослабить, допустив удвоение периода для функций $\lambda(\varphi)$, $P(\varphi)$, $\mu(\varphi)$.

Предложение 6. *Пусть* $h(\varphi) \in C'(M, R^n)$, $B(\varphi) \in C'(M, M_n(R))$ *и существуют такие функции* $\mu(\varphi), \lambda(\varphi) \in C'(M, R^n)$, *что* $B(\varphi)\mu(\varphi) = \lambda(\varphi)$, *причем*:

1) $\mu(\varphi) = 0 \Rightarrow B(\varphi) = 0$;

2) $\mu(\varphi) \neq 0, B(\varphi) \neq 0 \Rightarrow \lambda(\varphi) \neq 0$.

Тогда если одномерное расширение динамической системы $\dot{\varphi} = a(\varphi)$

$$(B(\varphi)\lambda(\varphi), \lambda(\varphi))\dot{\alpha} = \alpha[\, \| \lambda(\varphi) \|^2 - (B(\varphi)\dot{\lambda}(\varphi), \lambda(\varphi))\,] + (B(\varphi)\dot{h}(\varphi), \lambda(\varphi))$$

имеет $C^1(M, R)$*-решение* $\alpha(\varphi)$, *то и уравнение* (23) *имеет решение, представимое в виде*

$$u(\varphi) = -h(\varphi) + \alpha(\varphi)\lambda(\varphi).$$

Доказательство. Очевидно, $B(\varphi)u = \alpha\lambda(\varphi)$ $\forall\ \varphi$; при этом $\alpha \| \lambda(\varphi) \|^2 = (B(\varphi)u, \lambda(\varphi))$. Решение будем искать в виде $y = -h(\varphi) + \alpha\lambda(\varphi)$; подставляя y в (23), имеем уравнение

$$B(\varphi)(-\dot{h}(\varphi) + \dot{\alpha}\lambda(\varphi) + \alpha\dot{\lambda}(\varphi)) = \alpha\lambda(\varphi). \tag{27}$$

При умножении (27) на $\| \lambda(\varphi) \|^2$ получаем эквивалентное выражение, которое можно преобразовать к искомому в предложении 6 виду аналогично тому, как это было сделано при доказательстве предложения 5.

8. Метод подстановки $x = A^{-1}(\varphi)B(\varphi)z(\varphi) - A^{-1}(\varphi)h(\varphi)$ при изучении системы (1). Очевидно, если существует сильное решение $u(\varphi)$ системы (1), то найдется такая непрерывная функция $z(\varphi)$, что

$$u(\varphi) = A^{-1}(\varphi)B(\varphi)z(\varphi) - A^{-1}(\varphi)h(\varphi). \tag{28}$$

Поэтому естественно применить упомянутую выше подстановку при исследовании исходной системы (в предположении гладкости всех функций из (1)). Непосредственные вычисления показывают, что z должно удовлетворять системе

$$B(\varphi)z = B(\varphi)[Q(\varphi)\dot{z} + Q'(\varphi)z + g(\varphi)],\ \dot{\varphi} = a(\varphi),$$

где $Q(\varphi) = A^{-1}(\varphi)B(\varphi)$, $g(\varphi) = -(A^{-1}(\varphi)h(\varphi))'$.

Приведенные соображения являются базой доказательства следующего утверждения.

Предложение 7. *Предположим, что существуют функции* $\alpha(\varphi) \in C^1(M, R)$, $C(\varphi) \in C(M, GL(n, R))$ *такие, что* $B(\varphi)A^{-1}(\varphi)B(\varphi) \equiv \alpha(\varphi)B(\varphi)C(\varphi)$, *и у линейного расширения*

$$\dot{z} = C^{-1}(\varphi)(E - Q'(\varphi))z - g(\varphi),\ \dot{\varphi} = \alpha(\varphi)a(\varphi) \tag{29}$$

имеется гладкое инвариантное многообразие $z(\varphi)$. *Тогда система* (1) *имеет сильное решение* $u(\varphi)$, *представимое в виде* (28).

Пример. Пусть $A(\varphi) \equiv E$ и $B(\varphi)$ — проектор $\forall\varphi$, тогда в последнем предложении можно положить $C(\varphi) \equiv E$ и $\alpha(\varphi) \equiv 1$. Система (29) примет вид

$$\dot{z} = (E - B'(\varphi))z - g(\varphi),\ \dot{\varphi} = a(\varphi).$$

Пусть матрица $R(\varphi)$ имеет ранг, не превышающий 1 $\forall\ \varphi$. Тогда, очевидно, $R^2(\varphi) = s(\varphi)R(\varphi)$, где $s(\varphi)$ — след матрицы $R(\varphi)$. Рассмотрим систему (1) с $\operatorname{rang} B(\varphi) \le 1$, $\det A(\varphi) \ne 0$. Она эквивалентна системе

$$Q(\varphi)\dot{x} = x + p(\varphi),\ \dot{\varphi} = a(\varphi),$$

где $Q(\varphi) = A^{-1}(\varphi)B(\varphi)$ и $\operatorname{rang} Q(\varphi) \le 1$ $\forall\ \varphi$. Применяя к полученной системе предложение 7, убеждаемся в справедливости следующего результата.

Предложение 8. *Пусть* $\operatorname{rang} B(\varphi) \le 1$, $\det A(\varphi) \ne 0$ $\forall\ \varphi$ *и* $s(\varphi)$ *— след матрицы* $Q(\varphi) = A^{-1}(\varphi)B(\varphi)$. *Предполагаем также, что все функции в* (1) *гладкие. Тогда если линейное расширение*

$$\dot{z} = (E - Q'(\varphi))z - g(\varphi),\ \dot{\varphi} = s(\varphi)a(\varphi),$$

имеет гладкое инвариантное многообразие, то и система (1) *имеет сильное решение.*

Следствие. *Пусть* $\operatorname{rang} B(\varphi) \le 1$, $\det A(\varphi) \ne 0$ $\forall\ \varphi$ *и все функции в* (1) *гладкие. Тогда система*

$$pB(\varphi)dx / dt = A(\varphi)x + h(\varphi),\quad \dot{\varphi} = a(\varphi)$$

для достаточно малых по модулю действительных значений p *имеет сильное решение.*

Заметим, что это следствие содержит в качестве частных случаев утверждения теорем 14. 2 и 14. 3 из [1].

1. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л.* Исследование дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функции Ляпунова. – Киев: Наук. думка, 1990. – 271 с.
2. *Ткаченко В. И.* Об инвариантном торе линейных систем дифференциальных уравнений с вырожденной матрицей при производных // Дифференциальные уравнения с параметром. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1989. – С. 121–125.
3. *Теория* показателей Ляпунова / Б. Ф. Былов, Р. Э. Виноград, Д. М. Гробман, В. В. Немыцкий. – М. : Наука, 1966. – 576 с.
4. *Розенвассер Е. Н.* Показатели Ляпунова в теории линейных систем управления. – М.: Наука, 1977. – 344 с.
5. *Palmer K. J.* A diagonal dominance criterion for exponential dichotomy // Bull. Austral. Math. Soc. – 1977. – 17, № 3. – P. 363–374.

Получено 20.11.91