УДК 512. 54

В. В. Бавула, канд. физ.-мат. наук (Киев. ун-т)

ОПИСАНИЕ ДВУСТОРОННИХ ИДЕАЛОВ В ОДНОМ КЛАССЕ НЕКОММУТАТИВНЫХ КОЛЕЦ. II

Для обобщенных алгебр Вейля, содержащих универсальную обертывающую алгебру $\mathrm{Usl}\,(2, K)$ алгебры Ли $\mathrm{sl}\,(2)$ над полем характеристики 0, классифицируются двусторонние идеалы. Показано, что произведение идеалов перестановочно и любой собственный идеал однозначным образом раскладывается в произведение первичных идеалов.

Для узагальнених алгебр Вейля, які містять універсальну обгортуючу алгебру $\mathrm{Usl}\,(2, K)$ алгебри Лі $\mathrm{sl}\,(2)$ над полем характеристики 0, класифікуються двосторонні ідеали. Показано, що добуток ідеалів переставний і довільний власний ідеал однозначно розкладається в добуток первинних ідеалів.

Настоящая работа является непосредственным продолжением [1], поэтому в ней сохранены все обозначения из [1]. Изучаются двусторонние идеалы алгебр (определение приведено в п. 1.1, в дальнейшем идеал означает двусторонний идеал), которые являются центральными расширениями колец из [1]. Это довольно содержательный класс алгебр, включающий в себя, в частности, универсальную обертывающую алгебру $\mathrm{Usl}(2, K)$ алгебры Ли $\mathrm{sl}\,(2)$ над произвольным полем характеристики 0 и некоторые ее деформации.

В п. 1 приведены основные определения и обозначения, вычислен явный вид аннуляторов простых конечномерных модулей (лемма 1. 4).

В п. 2 доказана перестановочность $(IJ = JI)$ идеалов, описаны первичные идеалы изучаемой алгебры A (теорема из п. 2. 5). Основным результатом работы является теорема из п. 2. 6 об однозначном разложении произвольного идеала в произведение первичных идеалов (как в коммутативном дедекиндовом кольце, например, $\mathbb{Z}$), некоторый естественный (градуированный) базис идеала введен в следствии из п. 2. 6.

В п. 3 установлена дистрибутивность решетки идеалов (теорема из п. 3. 2), любая собственная фактор-алгебра изоморфна произведению локальных алгебр с конечным числом линейно упорядоченных идеалов.

В п. 4 приведены следствия для $\mathrm{Usl}(2)$.

Габриэль и Нуаз [2] показали, что каждый ненулевой первичный идеал J из $\mathrm{Usl}(2, \mathbb{C})$ равен либо аннулятору простого конечномерного $\mathrm{sl}(2)$-модуля либо порождается элементом $C - \lambda$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{C}$, C — элемент Казимира. А. А. Кириллов [3] описал все идеалы алгебры $\mathrm{Usl}(2)$ (в каждом идеале специальным образом выбирается базис).

1. Введение. 1.1. Пусть D — коммутативная область главных идеалов (о.г.и.), являющаяся конечнопорожденной алгеброй над некоторым полем K; $\mathfrak{D} = D[C]$ — кольцо многочленов от переменной C с коэффициентами из D (очевидно, это кольцо с однозначным разложением на простые сомножители, т. е. факториальное); $\mathrm{Irr}\,(Z)$ — множество неразложимых унитарных многочленов из $Z := K\,[C]$; $\mathrm{Max}(D)$ — множество максимальных идеалов (некоторого) кольца D; $A = \mathfrak{D}(\sigma, a)$— обобщенная алгебра Вейля (ОАВ) степени 1 с базисным кольцом $\mathfrak{D}$, определяющим элементом $a \in \mathfrak{D}$ и автоморфизмом $\sigma \in \mathrm{Aut}_K(\mathfrak{D})$ [1], т. е. A получается из $\mathfrak{D}$ присоединением переменных X и Y, которые удовлетворяют определяющим соотношениям $X\alpha = \sigma(\alpha)X$ и $Y\alpha = \sigma^{-1}(\alpha)Y$, $\forall\alpha \in \mathfrak{D}$, $YX = a$ и $XY = \sigma(a)$; $F_\beta = Z / Z\beta$ — (конечное) расширение поля K, $\beta \in \mathrm{Irr}\,(Z)$; $\mathfrak{D}_\beta = \mathfrak{D}/ \mathfrak{D}\beta = F_\beta \otimes D$, $A_\beta = \mathfrak{D}_\beta(\sigma, a\,(\beta) = a + \beta\mathfrak{D})$, $\beta \in \mathrm{Irr}\,(Z)$;

$P_L := \mathrm{ann}_A(L)$ — аннулятор простого конечномерного A-модуля L; $\hat{A}(Q)$ — множество классов изоморфизма простых A-модулей с некоторым условием Q.

Будем предполагать выполнимость приведенных ниже условий и $\sigma(D) = D$, $\sigma(C) = C$, множество неподвижных точек $D^\sigma = \{d \in D \mid \sigma(d) = d\}$ автоморфизма σ равно K.

A. *Определяющий элемент* $a \in \mathfrak{D}\backslash Z$ *является неразложимым в* $\mathfrak{D}$.

B. $\mathrm{Ext}^1_A(M, N) = 0$ *для любых неизоморфных простых конечномерных модулей* M, N.

C. $\sigma^n(\mathfrak{p}) \neq \mathfrak{p}$ $\forall n \neq 0 \in \mathbb{Z}$, $\mathfrak{p} \in \mathrm{Max}(D)$.

D. *Для любого* $\beta \in \mathrm{Irr}(Z)$: $\mathfrak{D}_\beta$ — *область главных идеалов.*

Замечание. Условие B равносильно тому, что для любого $\beta \in \mathrm{Irr}(Z)$ и любого $\mathfrak{p} \in \mathrm{Max}(\mathfrak{D}_\beta)$, содержащего $a(\beta) := a + \beta\mathfrak{D}$, существует не более одного идеала вида $\sigma^i(\mathfrak{p})$, $i \neq 0 \in \mathbb{Z}$, также содержащего $a(\beta)$ [1].

1.2. Приведем примеры алгебр A. 1. $A = \mathfrak{D}(\sigma, a)$, где $\mathfrak{D} = K[H, C]$ — кольцо многочленов от двух переменных над полем K характеристики нуль, $\sigma(H) = H - 1$, $\sigma(C) = C$, $a = a(H, C) \in \mathfrak{D}\backslash Z$ неразложим и выполнено условие B (если K — алгебраически замкнутое поле, то условие B равносильно тому, что для любого $\lambda \in K$ любое множество корней многочлена $a(H, \lambda) \in K[H]$, отличающихся друг от друга на целое число, содержит не более двух элементов). Основной пример — это $a = C + \alpha(H)$, где $\alpha(H) \in K[H]$ — любой многочлен степени 1 или 2. В частности [1],

$$\mathrm{Usl}(2) \simeq K[H, C](\sigma, a = C - H(H+1)), \tag{1}$$

где $U = \mathrm{Usl}(2)$ — универсальная обертывающая алгебра алгебры Ли $\mathrm{sl}(2) = \langle X, Y, H \mid [H, X] = X,\ [H, Y] = -Y, [X, Y] = 2H\rangle$.

2. $A = \mathfrak{D}(\sigma, a)$, $\mathfrak{D} = K[H, (H - \mu/(1-\lambda))^{-1}, C]$, $\sigma(C) = C$, $\sigma(H) = \lambda H + \mu$, $\lambda \neq 0 \in K$ не является корнем из 1, $\mu \in K$; $a \in \mathfrak{D}\backslash Z$ — неразложимый элемент с условием B.

1.3. В целях сокращения записи положим $v_n = X^n$, $n > 0$, $v_n = Y^{-n}$, $n < 0$, $v_0 = 1$. Алгебра $A = \oplus A_n$ — $\mathbb{Z}$-градуированная, $A_n = \mathfrak{D}v_n$, ($A_nA_m \subset A_{n+m}$ $\forall n, m \in \mathbb{Z}$), где из определяющих соотношений следует равенство $v_nv_m = (n, m)v_{n+m}$ для некоторых $(n, m) \in D$. Пусть $n > 0$ и $m > 0$. Тогда

$$n \geq m: (n, -m) = \sigma^n(a) \ldots \sigma^{n-m+1}(a), \quad (-n, m) = \sigma^{-n+1}(a) \ldots \sigma^{-n+m}(a),$$

$$n \leq m: (n, -m) = \sigma^n(a) \ldots \sigma(a), \quad (-n, m) = \sigma^{-n+1}(a) \ldots a.$$

В остальных случаях $(n, m) = 1$.

1.4. Для каждого простого конечномерного A-модуля L обозначим через $\beta = \beta_L$ унитарный образующий идеала $Z \cap P_L \subset Z$. Очевидно, $\beta \in \mathrm{Irr}(Z)$. Тогда $\hat{A}(\text{конечномерный}) = \bigcup_{\beta \in \mathrm{Irr}(Z)} \hat{A}_\beta(\text{конечномерный})$, где A_β — ОАВ степени 1 с базисным кольцом $\mathfrak{D}_\beta$ (о. г. и.), для которого, очевидно, выполнено условие C (при замене D на $\mathfrak{D}_\beta$). Поэтому каждому простому конечномерному A_β-модулю L соответствует однозначно определенная область эквивалентности $\Gamma = (\sigma^{-n}(\mathfrak{p}), \mathfrak{p}] \subset \mathrm{Max}(\mathfrak{D}_\beta)$, $0 < n \in \mathbb{N}$, такая, что $L \simeq L(\Gamma) := A_\beta / J$ (теорема 2 из [1]), где $J = J(\Gamma) := A_\beta(Y^n, \mathfrak{p}, X)$ — однородный левый идеал из A_β. Поэтому $L = \oplus_0^n e_i k$ — правое n-мерное векторное пространство над полем $k = k(\beta, \Gamma) :=$

$:= \mathfrak{D}_\beta / \mathfrak{p}$ ($\dim L = n\,[k : K]$), $e_i = Y^i + J$, $i = 0, \dots, n-1$: $\alpha e_i = e_i\,\varphi(\sigma^i(\alpha))$, где $\varphi : \mathfrak{D} \to$ $\to k$ — естественный эпиморфизм $Ye_i = e_{i+1}$, $Xe_i = e_i\,\varphi(\sigma^i(a))$.

Отсюда непосредственно следует такая лемма.

Лемма. *Аннулятор P_L простого конечномерного модуля L равен $P_L = \oplus_{k \in \mathbb{Z}} P_{L,k} v_k$, где $P_{L,k} = \mathfrak{D}(\beta_L, \alpha_{L,k})$, $\alpha_{L,k} = \sigma^{-n+1-k}(p) \dots p$, если $k = 0, \dots, n-1$; $\sigma^{-n+1}(p) \dots \sigma^{-k}(p)$, если $k = -n+1, \dots, 0$; $p \in \mathfrak{D}$ — произвольный элемент, образ которого при отображении $\mathfrak{D} \to \mathfrak{D}_\beta$ порождает идеал $\mathfrak{p}$, $\beta = \beta_L$ и n определены выше.*

2. Основной результат.

2.1. Лемма. *Любой идеал J алгебры A однороден относительно градуировки $J = \oplus_{n \in \mathbb{Z}} j_n$, где $j_n = J \cap U_n$.*

Доказательство. Как и при доказательстве аналогичного утверждения из [1], достаточно установить равенство

$$\sum_{u \in \mathfrak{D}} \mathfrak{D}(u - \sigma^n(u)) = \mathfrak{D} \quad \forall n \neq 0 \in \mathbb{Z}, \tag{2}$$

которое непосредственно следует из $\mathfrak{D} = D[C]$ и аналогичного равенства для D (формула (1) из [1]). Лемма доказана.

2.2. Лемма. *Любой σ-инвариантный идеал $\mathfrak{b}$ кольца $\mathfrak{D}$ ($\sigma(\mathfrak{b}) \subset \mathfrak{b}$) порождается одним элементом из кольца $K[C]$, т. е. существует $\alpha \in K[C]$ такой, что $\mathfrak{b} = \alpha D$.*

Доказательство. Если лемма верна, то α — образующий идеала $\mathfrak{a} = Z \cap \mathfrak{D}$ кольца Z. Для доказательства достаточно показать, что любой ненулевой $u \in \mathfrak{b}$ имеет вид $u = d\beta$ для некоторых $d \in \mathfrak{D}$, $\beta \in Z$ (ибо тогда в силу условия C $\beta \in \mathfrak{a}$).

Пусть $u = \sum d_k C^k \neq 0 \in \mathfrak{b}$ — многочлен минимально возможной степени, например, n по переменной C, $d_k \in D$, $k = 0, \dots, n$. В силу σ-инвариантности $\mathfrak{b}$ элемент $w = \sigma(d_n)u - d_n\sigma(u) \in \mathfrak{b}$ имеет степень строго меньше n, следовательно, равен нулю. Приравнивая коэффициенты многочлена w нулю, используя условие C и равенство $D^\sigma = K$ имеем $d_k = \lambda_k d_n$ для некоторых $\lambda_k \in K$, и $u = d_n\beta$, где $\beta = \sum \lambda_k C^k \in Z$ пропорционален α.

Теперь произвольный элемент $v \neq 0 \in \mathfrak{b}$ разделим с остатком на α : $v = d\alpha + w$, $d \in D$ и $w \in \mathfrak{b}$ имеет степень строго меньше n, следовательно, $w = 0$. Лемма доказана.

2.3. Пусть J — идеал в A. Тогда в силу леммы из п. 2.1

$$J = \sum_{n \in \mathbb{Z}} J_n v_n = \sum_{n \in \mathbb{Z}} v_n J'_n,$$

где множество $\{J_n = \sigma^n(J'_n) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ идеалов из $\mathfrak{D}$ однозначно определено и

$$J'_0 \subset J'_1 \subset \dots \subset J'_n \subset \dots, \tag{3}$$

$$J'_0 \subset J'_{-1} \subset \dots \subset J'_{-n} \subset \dots. \tag{4}$$

В силу нетеровости $\mathfrak{D}$ цепочки (3) и (4) стабилизируются и их пределы обозначим через $\mathfrak{a}_+ = \mathfrak{a}_+(J)$ и $\mathfrak{a}_- = \mathfrak{a}_-(J)$ соответственно.

Лемма. *Для любого идеала J из A : $\mathfrak{a}_+(J) = \mathfrak{a}_-(J)$ — σ-инвариантный идеал.*

Доказательство. Очевидно, идеалы $\mathfrak{a}_-$ и $\mathfrak{a}_+$ σ-инвариантны. В силу леммы из п. 2.2 существуют $\alpha_+, \alpha_- \in K[C]$ такие, что $\mathfrak{a}_+ = \alpha_+\mathfrak{D}$ и $\mathfrak{a}_- = \alpha_-\mathfrak{D}$.

Для достаточно большого натурального n полагаем $\mathfrak{a}_+ = J'_n$, $\mathfrak{a}_- = J'_{-n}$. Тогда $v_{-n}\mathfrak{a}_- \supset v_{-2n}v_n\mathfrak{a}_+ = v_{-n}(-n, n)\,\mathfrak{a}_+$ и $v_n\mathfrak{a}_+ \supset v_{2n}v_{-n}\mathfrak{a}_- = v_n(n, -n)\,\mathfrak{a}_-$ или $\mathfrak{a}_- \supset (-n, n)\,\mathfrak{a}_+$ и $\mathfrak{a}_+ \supset (n, -n)\,\mathfrak{a}_-$. Очевидно, $(-n, n) = \sigma^{-n+1}(a)\ldots a$ и $(n, -n) = \sigma^n(a)\ldots\sigma(a)$ — произведение неразложимых элементов в $\mathfrak{D}$ и $\sigma^m(a) \notin Z$ для $m \in Z$. Поскольку $\mathfrak{D}$ — факториальное кольцо, то $\alpha_+\mathfrak{D} = \alpha_-\mathfrak{D}$.

В силу леммы из п. 2.3 $\mathfrak{a}(J) := \mathfrak{a}_+(J) = \mathfrak{a}_-(J)$ — σ-инвариантный идеал. Следовательно, в силу леммы из п. 2.2 он порождается однозначно определенным унитарным многочленом $\alpha = \alpha(J) \in Z$. Для любых идеалов I, J : $\alpha(I + J) =$ $=$ НОД $(\alpha(I), \alpha(J))$ (наибольший общий делитель), $\alpha(IJ) = \alpha(I)\,\alpha(J)$, $\alpha(I \cap J) =$ $=$ НОК $(\alpha(I), \alpha(J))$ (наименьшее общее кратное).

2.4. Пусть $J = \sum_{n\in \mathbb{Z}} v_n J'_n$ — идеал из A. Тогда для любого $n \in \mathbb{Z}$ идеал $\mathfrak{a}(J) = \alpha\mathfrak{D}$ содержит J'_n, $\alpha = \alpha(J)$. Для J обозначим через J_P и J_Q идеалы $J_P =$ $= \alpha^{-1}J$ и $J_Q = \alpha\mathfrak{D}$ соответственно. Тогда $J = J_P J_Q = J_Q J_P$ и $\alpha(J_P) = 1$, $\alpha(J_Q) =$ $= \alpha(J)$.

Лемма. *Пусть I и J — идеалы в A такие, что $I \subset J$. Тогда $I_Q = J_Q \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \dim J/I < \infty$.*

Доказательство. Пусть $\alpha = \alpha(I) = \alpha(J)$, отображение $J_P/I_P \to J/I$, $u \to \alpha u$, — биекция. Поскольку $\alpha(J_P) = \alpha(I_P) = 1$, можно считать $J = \mathfrak{D}$. Для большого натурального n элементы v_n и v_{-n} принадлежат $\mathfrak{a}(I)$. Тогда $(-n, n) = v_{-n}v_n$ и $(n, -n) = v_n v_{-n}$ принадлежат нулевой компоненте i_0 идеала $I = \oplus_{m\in \mathbb{Z}}\, i_m$. Поскольку $i_0 \subset i_m$ для всех $m \in \mathbb{Z}$ и $\dim \mathfrak{D}/i_0 \le \dim \mathfrak{D}/(\mathfrak{D}(-n, n) + \mathfrak{D}(n, -n)) < \infty$, то $\dim \mathfrak{D}/i_m < \infty$. Поэтому $\operatorname{codim} I = \sum_{-n\le m\le n} \dim \mathfrak{D}/i_m < \infty$.

Предположим, что $I_Q \neq J_Q$ $(\alpha(I) \neq \alpha(J))$. Тогда $\dim J/I = \infty$. Лемма доказана.

2.5. Идеал J из A называется *первичным*, если в кольце A/J произведение любых ненулевых идеалов не равно нулю.

Теорема (классификация первичных идеалов). *Множество ненулевых первичных идеалов из A $\mathrm{Prim}_0(A)$ равно $\{P_L := \operatorname{ann}_A(L) \mid L$ — простой конечномерный A-модуль$\} \cup \{Q_\beta := A\beta \mid \beta \in \operatorname{Irr}(Z)\}$.*

Доказательство. Пусть $J \neq 0$ — первичный идеал. Если $\operatorname{codim} J < \infty$, то J содержит конечное произведение идеалов вида P_L, в силу максимальности которых и первичности J получаем $J = P_L$ для некоторого простого конечномерного модуля L.

Если $\operatorname{codim} J = \infty$, то в силу леммы из п. 2.4 $\alpha = \alpha(J) \notin K$, а из разложения $J = J_P J_Q$ и первичности J следует $J = J_Q$ и $\alpha \in \operatorname{Irr}(Z)$. Первичность Q_β очевидна в силу мультипликативности $\alpha(-)$. Теорема доказана.

2.6. В силу условия В любой конечномерный A-модуль M однозначным образом раскладывается в сумму A-подмодулей $M = \oplus\,\{M_L \mid [L] \in \hat{A}$ (конечномерный)$\}$, где M_L имеет простые факторы, изоморфные L. Тогда

$$\operatorname{ann}_A(M) = \bigcap_{[L]} \operatorname{ann}_A(M_L) = \prod_{[L]} \operatorname{ann}_A(M_L) \qquad (5)$$

(порядок сомножителей произвольный) и

$$A/\operatorname{ann}_A(M) \simeq \prod_{[L]} A/\operatorname{ann}_A(M_L). \qquad (6)$$

Порядком идеала J называется минимальное натуральное n (если оно существует) такое, что $J^n = J^{n+1}$.

Пусть $\Gamma = (\mathfrak{p}, \mathfrak{q}] \subset \operatorname{Max}(D)$ — некоторая конечная область эквивалентности. Тогда ее порядком ν_Γ будем называть минимальную из кратностей вхождения идеалов $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ в разложении идеала aD в произведение максимальных идеалов из D (аналогичное понятие будем использовать и для других колец).

Лемма. 1. *$P_L^n \supset Q_\beta$ для некоторого (однозначно определенного) $\beta = \beta(L) \in \operatorname{Irr}(Z)$ и любого $n \in \mathbb{N}$.*

2. *Порядок n_L идеала P_L конечен и равен порядку области эквивалентности $\Gamma = \operatorname{Supp}(L)$ из $\operatorname{Max}(\mathfrak{D}_\beta)$, которая соответствует простому A_β-модулю L, $\beta = \beta_L$.*

Доказательство. 1. При $n = 1$ существование β очевидно, в общем случае из включения $Q_\beta P^{n-1} \subset P^n$ и мультипликативности $\alpha(-)$ следует $\beta = \alpha(Q_\beta)1 = \alpha(Q_\beta P^{n-1}) \subset P^n$.

Утверждение 2 леммы следует из предыдущего пункта и следствия 8. 1 из [1]. Лемма доказана.

Теорема. 1. *Любые два идеала I, J алгебры A коммутируют, т. е. $IJ = JI$.*

2. *Любой собственный идеал J алгебры A однозначным образом раскладывается в (конечное) произведение первичных идеалов из A, т. е.*

$$J = \prod_{[L] \in \hat{A}(\text{конечномерный})} P_L^{k(L)} \prod_{\beta \in \operatorname{Irr}(Z)} Q_\beta^{m(\beta)}, \tag{7}$$

где числа $0 \le k(L) \le n_L$ (= порядок идеала P_L) и $m(\beta) \ge 0$ однозначно определены.

Доказательство. 1. В силу (5) $IJ = (J_P I_Q)(J_P J_Q) = (J_P J_Q)(I_P I_Q) = JI$.

Утверждение 2 теоремы непосредственно следует из предыдущей леммы, соотношения (5) и однозначно определенного разложения $J = J_P J_Q = \operatorname{ann}_A(A / J_P) J_Q$. Теорема доказана.

Следствие. *Пусть для ненулевого идеала $J = \sum J_m v_m$ из A справедливо разложение (7). Тогда*

$$J_m = \Big(\bigcap_{[L] \in \hat{A}(\text{конечномерный})} P_{L,m}^{k(L)} \Big) \alpha(J), \quad \forall m \in \mathbb{Z},$$

где идеалы $\{P_{L,m}\}$ из $\mathfrak{D}$ определены в лемме из п. 2. 4.

3. Решетка двусторонних идеалов алгебры A. Покажем, что решетка идеалов алгебры A дистрибутивна, т. е. для любых идеалов $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c} : \mathfrak{a} + \mathfrak{b} \cap \mathfrak{c} = (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \cap (\mathfrak{a} + \mathfrak{c})$.

3.1. Обозначим через $\mathfrak{G}$ множество пар вида $\mathfrak{g} = (\beta, [L])$, где $\beta \in \operatorname{Irr}(Z)$, $[L] \in \hat{A}_\beta$(конечномерный) (это конечное множество), а через $\mathfrak{H}_\mathfrak{g}$ — цепочку строго убывающих идеалов алгебры A, равную $\mathfrak{H}_\mathfrak{g} : A \supset P \supset \ldots \supset P^n \supset PQ_\beta \supset \ldots \ldots \supset P^n Q_\beta \supset \ldots$, если $\hat{A}_\beta$(конечномерный) $\neq \varnothing$ (n — порядок идеала P_L, лемма из п. 2. 6), и $A \supset Q_\beta \supset Q_\beta^2 \supset \ldots$, если $\hat{A}_\beta$(конечномерный) $= \varnothing$.

В силу полной упорядоченности решетка идеалов $\mathfrak{H}_\mathfrak{g}$ является дистрибутивной для любого $\mathfrak{g} \in \mathfrak{G}$. Из (7) следует, что любой ненулевой идеал можно однозначным образом представить в виде $J = \prod_{\mathfrak{G}} J_\mathfrak{g} = \bigcap_{\mathfrak{G}} J_\mathfrak{g}$, где в идеал $J_\mathfrak{g}$ входят сомножители, принадлежащие $\mathfrak{H}_\mathfrak{g}$. Тогда для любых ненулевых идеалов $I, J : (I + J)_\mathfrak{g} = I_\mathfrak{g} + J_\mathfrak{g}$, $(IJ)_\mathfrak{g} = I_\mathfrak{g} J_\mathfrak{g}$, $(I \cap J)_\mathfrak{g} = I_\mathfrak{g} \cap J_\mathfrak{g}$, $I \subset J \Rightarrow I_\mathfrak{g} \subset J_\mathfrak{g}$.

3.2. В прямом произведении решеток $\prod_{\mathfrak{G}} \mathfrak{H}_{\mathfrak{g}}$ рассмотрим подрешетку $\mathfrak{R} = \{(\mathfrak{a}_{\mathfrak{g}}) :$ почти все $\mathfrak{a}_{\mathfrak{g}} = A\}$, которая является дистрибутивной.

Теорема. *Решетка идеалов* $\mathfrak{R}(A)$ *алгебры* A *является дистрибутивной. Более того, отображение* $\mathfrak{R}(A)\setminus\{0\} \to \mathfrak{R}$, $J \to (J_{\mathfrak{g}})$ — *изоморфизм решеток с обратным* $(\mathfrak{a}_{\mathfrak{g}}) \to \prod_{\mathfrak{G}} \mathfrak{a}_{\mathfrak{g}}$.

Доказательство очевидно.

Следствие. *Для любого собственного идеала* J *алгебры* A *фактор-алгебра* A/J *изоморфна*

$$A/J \simeq \prod_{\mathfrak{G}} A/J_{\mathfrak{g}}$$

(конечному) произведению локальных алгебр $A/J_{\mathfrak{g}} = (J_{\mathfrak{g}} \neq A)$, *все идеалы которых линейно упорядочены.*

4. Универсальная обертывающая алгебра $U = \mathrm{Usl}(2)$. Пусть K — поле характеристики нуль. Непосредственно из (1) и вида определяющего элемента $a = C - H(H+1)$ следует, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует ровно один простой U-модуль L_n размерности n [4], причем $L_n = U/U(Y^n, H-(1/2)(n-1), C-(1/4)(n^2-1), X) = \oplus_0^{n-1} Ke_i$, где e_i — образ Y^i при отображении $U \to L_n$, $i = 0,\ldots, n-1$:

$$He_i = (1/2)(n-1-2i)e_i, \quad Ye_i = e_{i+1}, \quad Xe_i = (i-1)(n-i+1)e_{i-1}.$$

Значение оператора Казимира на L_n равно $C_n = (n^2-1)/4$. Приведем наиболее важные следствия.

1. *Аннулятор* P_n, $n \in \mathbb{N}$, *модуля* L_n *равен* $P_n = \oplus_{k\in\mathbb{Z}} P_{n,k} v_k$, *где* $P_{n,k} = D(C - C_n) + D\alpha_k^n$, $-n+1 \le k \le n-1$, *в остальных случаях* $P_{n,k} = \mathfrak{D}$, *где*

$$0 \le k \le n-1 : \ \alpha_k^n = \prod_{k\le i\le n-1} (H + (1/2)(n-1) - i),$$

$$-n+1 \le k \le 0 : \ \alpha_k^n = \prod_{-k\le i\le n-1} (H - (1/2)(n-1) + i).$$

2. *Все идеалы из* U *коммутируют* $(IJ = JI)$.

3. *Множество ненулевых первичных идеалов* $\mathrm{Prim}_0(U)$ *равно* $\{P_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{Q_\beta = U\beta \mid \beta \in \mathrm{Irr}(K[C])\}$.

4. *Любой идеал* J *из* U *однозначно представляется в виде произведения первичных идеалов* : $J = \prod_{n\in\mathbb{N}} P_n^{\delta(n)} \prod_{\beta\in\mathrm{Irr}(Z)} Q_\beta^{m(\beta)}$, *где* $\delta(n) = 0, 1$, $m(\beta) \ge 0$ *для всех* $\beta \in \mathrm{Irr}(Z)$.

5. *Пусть* $J = \sum J_m v_m$ — *идеал из* U. *Тогда*

$$J_m = \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} P_{n,m}^{\delta(n)}\right)\alpha(J), \tag{8}$$

где $P_{n,m}^{\delta(n)}$ *определено выше.*

6. *Решетка идеалов из* U *дистрибутивна.*

7. *Для любого идеала* J *из* U *и любого автоморфизма* τ *алгебры* U : $\tau(J) = J$. *(Это свойство следует из равенства* $\tau(C) = C$ [5] *и разложения* (8).)

1. *Бавула В. В.* Описание двусторонних идеалов в одном классе некоммутативных колец. I // Укр. мат. журн. – 1993. – **45**, № 2. –С. 209 – 220.
2. *Nouaze' Y., Gabriel P.* Ideaux premiers de l'algebre enveloppante d'une algebre de Lie nilpotente // J. Algebra. – 1967. – **6**. – P. 77 – 99.
3. *Кириллов А. А.* Элементы теории представлений. – М. : Наука, 1972. – 336 с.
4. *Диксмье Ж.* Универсальные обертывающие алгебры. – М. : Мир, 1978. – 407 с.
5. *Arnal D., Pinczon G.* On algebraically irreducible representations of the Lie algebra sl (2) // J. Math. Phys. – 1974. – **15**. – P. 350 - 359.

Получено 29. 07. 91