УДК 519. 21

Ю. Д. Жданова, асп. (Ин-т математики АН Украины, Киев)

КЛАССИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА О РАЗОРЕНИИ НА КОНЕЧНОЙ РАЗРЕШИМОЙ ГРУППЕ

С помощью явного выражения для характеристической функции момента достижения случайным блужданием произвольного подмножества конечной разрешимой группы "со стороны" фиксированного подмножества для классической задачи о разорении (частного случая циклической группы) дано новое доказательство известной формулы, позволяющей вычислить характеристическую функцию вероятности разорения (достижения единицы группы) при t-м испытании.

За допомогою явного виразу для характеристичної функції моменту досягнення випадковим блуканням довільної підмножини скінченної розв'язуваної групи "з боку" фіксованої множини для класичної задачі про розорення (окремого випадку циклічної групи) дано нове доведення відомої формули, що дозволяє обчислити характеристичну функцію ймовірності розорення (досягнення одиниці групи) при t-му випробуванні.

1. Постановка задачи. Пусть G_N — конечная разрешимая группа порядка N, $(\zeta(t);\ t \ge 0)$ — однородная цепь Маркова со значениями в G_N и с матрицей переходных вероятностей $P = \{p(g_i, g_j), i, j = \overline{0, N-1}\}$, где $p(g_i, g_j) = P(\zeta(t + 1) = g_j / \zeta(t) = g_i)$. Цепь Маркова $(\zeta(t);\ t \ge 0)$ называется случайным блужданием на группе G_N (например, [1]), если $P(\zeta(t + 1) = g_j / \zeta(t) = g_i) = P(\zeta(t + 1) = g_i^{-1} g_j / \zeta(t) = g_0)$, где $g_0 = e$ — единица группы G_N.

Положим $P(\zeta(t + 1) = g_k / \zeta(t) = g_0) = p_{g_k}$, $k = \overline{0, N-1}$. Распределение $P = \{p_{g_k}, k = \overline{0, N-1}\}$, $p_{g_k} \ge 0$, $\sum_{k=0}^{N-1} p_{g_k} = 1$, однозначно определяет случайное блуждание на G_N.

Матрица P действует на произвольный вектор-столбец $u = \{u(g_k), k = \overline{0, N-1}\}$ следующим образом:

$$P\, u(g_k) = \sum_{i=0}^{N-1} p_{g_i} u(g_k g_i).$$

Пусть $H \subset G_N$ — некоторое непустое подмножество группы G_N, $H \ne G_N$, $\overline{H} = G_N \setminus H$ — дополнение подмножества H и $\tau_{g,H} = \min\{t : \zeta(t) \in H\}$, $\zeta(0) = g \in \overline{H}$, — момент первого достижения случайным блужданием $(\zeta(t);\ t \ge 0)$ подмножества H. Выделим в дополнении $\overline{H}$ подмножества H некоторое подмножество Q, $Q \ne \overline{H}$, и положим

$$\varphi_H(g, Q; \lambda) = M\left[e^{i\lambda\tau_{g,H}} I(\zeta(\tau_{g,H} - 1) \in Q / \zeta(0) = g)\right],\ g \in \overline{H}.$$

Характеристические функции $\varphi_H(g, Q, \lambda)$ являются решениями системы уравнений [2]

$$\varphi_H(g_j, Q; \lambda) = e^{i\lambda} \sum_{\overline{H}} p(g_j, g_k) \varphi_H(g_k, Q; \lambda) + e^{i\lambda} \sum_{H} p(g_j, g_k), \quad g_j \in Q,$$

$$\varphi_H(g_j, Q; \lambda) = e^{i\lambda} \sum_{\overline{H}} p(g_j, g_k) \varphi_H(g_k, Q; \lambda), \quad g_j \in \overline{H} \setminus Q,$$

или в матричной форме при $\lambda \neq 0$

$$\varphi_H(Q; \lambda) = e^{i\lambda}(I - e^{i\lambda} P_{\overline{H}})^{-1} q_{\overline{H},Q}, \tag{1}$$

где

$$q_{\overline{H},Q} = \left\{ q_{\overline{H},Q}(g_j) = \begin{cases} \sum\limits_{H} p(g_j, g_k), & g_j \in Q; \\ 0 & , \ g_j \in \overline{H} \setminus Q \end{cases} \right\},$$

$P_{\overline{H}}$ — сужение матрицы P на подмножество $\overline{H}$.

Задача состоит в получении явного выражения для $\varphi_H(Q; \lambda)$ в терминах распределения P и групповых характеристик. Для случая $Q = \overline{H}$ задача решена в [3]. Для абелевых групп подобная задача рассмотрена в [4].

2. Вспомогательные результаты. Пусть G_N — конечная разрешимая группа. Известно [5], что конечные разрешимые группы — это группы, которые можно построить из абелевых групп посредством нескольких последовательных расширений. Если $N = n_s \ldots n_2 n_1$, то G_N имеет субнормальный ряд

$$G_N = G_{n_s \ldots n_2 n_1} > \ldots > G_{n_2 n_1} > G_{n_1} > G_{n_0} = E, \tag{2}$$

все факторы $G_{n_{r+1}R} / G_R \cong H_{n_{r+1}}$, $R = n_r \ldots n_2 n_1$, $r < s$, которого абелевы.

С помощью характеров абелевых групп H_{n_r}, $r = \overline{1, s}$, построим вектор-столбцы

$$\psi^{G_N}_{g^s_{l_s} g^{s-1}_{l_{s-1}} \ldots g^2_{l_2} g^1_{l_1}} = \chi^{H_{n_s}}_{g^s_{l_s}} \underset{G_n}{\otimes} \psi^{G_{n_{s-1} \ldots n_2 n_1}}_{g^{s-1}_{l_{s-1}} \ldots g^2_{l_2} g^1_{l_1}} \stackrel{\text{def}}{=}$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \chi^{H_{n_s}}_{g^s_{l_s}}(h_i) \, \psi^{G_{n_{s-1} \ldots n_2 n_1}}_{g^{s-1}_{l_{s-1}} \ldots g^2_{l_2} g^1_{l_1}}(g^{h_i}_j), \ i = \overline{0, n_s - 1}, \ j = \overline{0, n_{s-1} \ldots n_2 n_1 - 1} \right\},$$

$$g^{h_i}_j = h_i g_j h_i^{-1}, \ l_r = \overline{0, n_r - 1}, \ r = \overline{1, s}.$$

Положим $\mu_{g^s_{l_s} \ldots g^2_{l_2} g^1_{l_1}} = N^{1/2} \sum\limits_{j=0}^{N-1} p_{g_j} \, \psi^{G_N}_{g^s_{l_s} \ldots g^2_{l_2} g^1_{l_1}}(g_j)$.

Для матрицы $h(P)$, где h — функция, определенная на спектре матрицы P, справедливо разложение

$$h(P) = \sum_{l_s=0}^{n_s-1} \ldots \sum_{l_2=0}^{n_2-1} \sum_{l_1=0}^{n_1-1} h(\mu_{g^s_{l_s} \ldots g^2_{l_2} g^1_{l_1}}) \Pi_{g^s_{l_s} \ldots g^2_{l_2} g^1_{l_1}}, \tag{3}$$

где $\Pi_{g^s_{l_s} \ldots g^2_{l_2} g^1_{l_1}} = \psi^{G_N}_{g^s_{l_s} \ldots g^2_{l_2} g^1_{l_1}} \underset{G_N}{\otimes} \psi^{*G_N}_{g^s_{l_s} \ldots g^2_{l_2} g^1_{l_1}}$. Разложение (3) справедливо для любой матрицы, связанной с группой G_N [6].

3. Задача о разорении на конечной разрешимой группе G_N. Пусть G_R, $R = n_r \ldots n_2 n_1$, $r < s$ (см. (2)), — минимальный нормальный делитель индекса m группы G_N, который содержит носитель $s(P)$ вероятностной меры P, P_{G_R} — матрица переходных вероятностей случайного блуждания на инвариантной подгруппе G_R. Если индекс m подгруппы G_R больше 1, то матрица P блуждания $(\zeta(t); t \geq 0)$ на группе G_N примет в некотором базисе блочно-диагональный вид, в котором все блоки равны P_{G_R}. Собственные значения матрицы P_{G_R}

являются собственными значениями матрицы P с геометрической кратностью m. Согласно [6] обозначим собственные векторы матрицы P через

$$\psi^{G_R}_{g_j g^r_{l_r} \ldots g^2_{l_2} g^1_{l_1}},\ l_i = \overline{0, n_i - 1},\ i = \overline{1, r},\ j = \overline{0, m-1}.$$

Введем сужения $\left(\psi^{G_R}_{g_j g^r_{l_r} \ldots g^2_{l_2} g^1_{l_1}}\right)^H$ и $(\psi^{G_R}_{g_j g^r_{l_r} \ldots g^2_{l_2} g^1_{l_1}})^{\overline{H}}$ вектора $\psi^{G_R}_{g_j g^r_{l_r} \ldots g^2_{l_2} g^1_{l_1}}$ на подмножества H, $\overline{H}$ соответственно. Положим $\nu_{g_j g^r_{l_r} \ldots g^2_{l_2} g^1_{l_1}}(\lambda) = 1 - e^{i\lambda}\mu_{g_j g^r_{l_r} \ldots g^2_{l_2} g^1_{l_1}}$.

Теорема. *Если для любого непустого подмножества* H *группы* G_N $H \not\subset G_R$ *и* $H \cap G_R \neq \varnothing$, *то для характеристической функции* (1) *момента достижения случайным блужданием* $(\zeta(t);\ t \geq 0)$ *подмножества* H *"со стороны" подмножества* Q *справедливо соотношение*

$$\begin{aligned}
\varphi_H(Q;\lambda) = \Bigg[& \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{l_r=0}^{n_r-1} \ldots \sum_{l_1=0}^{n_1-1} \nu^{-1}_{g_j g^r_{l_r} \ldots g^1_{l_1}}(\lambda) \left(\psi^{G_R}_{g_j g^r_{l_r} \ldots g^1_{l_1}}\right)^{\overline{H}} \underset{G_R}{\otimes} \left(\psi^{*G_R}_{g_j g^r_{l_r} \ldots g^1_{l_1}}\right)^{Q} - \\
& - \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{l_r=0}^{n_r-1} \ldots \sum_{l_1=0}^{n_1-1} \nu^{-1}_{g_j g^r_{l_r} \ldots g^1_{l_1}}(\lambda) \left(\psi^{G_R}_{g_j g^r_{l_r} \ldots g^1_{l_1}}\right)^{\overline{H}} \underset{G_R}{\otimes} \left(\psi^{*G_R}_{g_j g^r_{l_r} \ldots g^1_{l_1}}\right)^{H} \times \\
& \times \left(\sum_{j=0}^{m-1} \sum_{l_r=0}^{n_r-1} \ldots \sum_{l_1=0}^{n_1-1} \nu^{-1}_{g_j g^r_{l_r} \ldots g^1_{l_1}}(\lambda) \left(\psi^{G_R}_{g_j g^r_{l_r} \ldots g^1_{l_1}}\right)^{H} \underset{G_R}{\otimes} \left(\psi^{*G_R}_{g_j g^r_{l_r} \ldots g^1_{l_1}}\right)^{H} \right)^{-1} \times \\
& \times \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{l_r=0}^{n_r-1} \ldots \sum_{l_1=0}^{n_1-1} \nu^{-1}_{g_j g^r_{l_r} \ldots g^1_{l_1}}(\lambda) \left(\psi^{G_R}_{g_j g^r_{l_r} \ldots g^1_{l_1}}\right)^{H} \underset{G_R}{\otimes} \left(\psi^{*G_R}_{g_j g^r_{l_r} \ldots g^1_{l_1}}\right)^{Q} \Bigg] \times \\
& \times \left(\sum_{j=0}^{m-1} \sum_{l_r=0}^{n_r-1} \ldots \sum_{l_1=0}^{n_1-1} 1 - \nu_{g_j g^r_{l_r} \ldots g^1_{l_1}}(\lambda) \left(\psi^{G_R}_{g_j g^r_{l_r} \ldots g^1_{l_1}}\right)^{Q} \underset{G_R}{\otimes} \left(\psi^{*G_R}_{g_j g^r_{l_r} \ldots g^1_{l_1}}\right)^{H} \right) 1. \qquad (4)
\end{aligned}$$

Доказательство приведено в [7].

***Следствие* 1**. *Если* $H = \{h\}$, $Q = \{q\}$, *то*

$$\begin{aligned}
\varphi_h(q;\lambda) = \Bigg[& \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{l_r=0}^{n_r-1} \ldots \sum_{l_1=0}^{n_1-1} \nu^{-1}_{g_j g^r_{l_r} \ldots g^1_{l_1}}(\lambda) \left(\psi^{G_R}_{g_j g^r_{l_r} \ldots g^1_{l_1}}\right)^{\overline{H}} \underset{G_R}{\otimes} \psi^{*G_R}_{g_j g^r_{l_r} \ldots g^1_{l_1}}(q) - \\
& - |G_R| \left(\sum_{j=0}^{m-1} \sum_{l_r=0}^{n_r-1} \ldots \sum_{l_1=0}^{n_1-1} \nu^{-1}_{g_j g^r_{l_r} \ldots g^1_{l_1}}(\lambda) \right)^{-1} \times \\
& \times \left(\sum_{j=0}^{m-1} \sum_{l_r=0}^{n_r-1} \ldots \sum_{l_1=0}^{n_1-1} \nu^{-1}_{g_j g^r_{l_r} \ldots g^1_{l_1}}(\lambda) \left(\psi^{G_R}_{g_j g^r_{l_r} \ldots g^1_{l_1}}\right)^{\overline{H}} \underset{G_R}{\otimes} \psi^{*G_R}_{g_j g^r_{l_r} \ldots g^1_{l_1}}(h) \right) \times \\
& \times \left(\sum_{j=0}^{m-1} \sum_{l_r=0}^{n_r-1} \ldots \sum_{l_1=0}^{n_1-1} \nu^{-1}_{g_j g^r_{l_r} \ldots g^1_{l_1}}(\lambda)\, \psi^{G_R}_{g_j g^r_{l_r} \ldots g^1_{l_1}}(h) \underset{G_R}{\otimes} \psi^{*G_R}_{g_j g^r_{l_r} \ldots g^1_{l_1}}(q) \right) \Bigg] \times \\
& \times \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{l_r=0}^{n_r-1} \ldots \sum_{l_1=0}^{n_1-1} \left(1 - \nu_{g_j g^r_{l_r} \ldots g^1_{l_1}}(\lambda)\right) \psi^{G_R}_{g_j g^r_{l_r} \ldots g^1_{l_1}}(q) \underset{G_R}{\otimes} \psi^{*G_R}_{g_j g^r_{l_r} \ldots g^1_{l_1}}(h). \qquad (5)
\end{aligned}$$

Следствие 2. *Если* $H = \{h\}$, $Q = \{q\}$ *и* $s(P) \subset G_N$, *то*

$$\varphi_h(q;\lambda) = \sum_{k=0}^{N-1}(1-\nu_{g_k}(\lambda))\psi_{g_k}(q)\psi^*_{g_k}(h)\Big(\sum_{k=0}^{N-1}\prod_{n\neq k}\nu_{g_n}(\lambda)\Big)^{-1}\times$$

$$\times\sum_{r=0}^{N-1}\Big[\sum_{k\neq r}\prod_{l\neq k}\nu_{g_l}(\lambda)\big(\psi^*_{g_r}(q)-N\psi^*_{g_r}(h)\psi_{g_k}(h)\psi^*_{g_k}(q)\big)\Big]\psi^{\overline{H}}_{g_r}. \qquad (6)$$

Доказательство. В случае $s(P) \subset G_N$ соотношение (5) принимает вид

$$\varphi_h(q;\lambda) = \Big[\sum_{k=0}^{N-1}\nu^{-1}_{g_k}(\lambda)\psi^{\overline{H}}_{g_k}\psi^*_{g_k}(q)-N\Big(\sum_{k=0}^{N-1}\nu^{-1}_{g_k}(\lambda)\Big)^{-1}\sum_{k=0}^{N-1}\nu^{-1}_{g_k}(\lambda)\psi^{\overline{H}}_{g_k}\psi^*_{g_k}(h)\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{N-1}\nu^{-1}_{g_k}(\lambda)\psi_{g_k}(h)\psi^*_{g_k}(q)\Big]\sum_{k=0}^{N-1}(1-\nu_{g_k}(\lambda))\psi_{g_k}(q)\psi_{g_k}(h). \qquad (7)$$

Преобразуем в соотношении (7) выражение в квадратных скобках :

$$\sum_{k=0}^{N-1}\nu^{-1}_{g_k}(\lambda)\psi^{\overline{H}}_{g_k}\psi^*_{g_k}(q)-N\Big(\sum_{k=0}^{N-1}\nu^{-1}_{g_k}(\lambda)\Big)^{-1}\sum_{k=0}^{N-1}\nu^{-1}_{g_k}(\lambda)\psi^{\overline{H}}_{g_k}\psi^*_{g_k}(h)\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{N-1}\nu^{-1}_{g_k}(\lambda)\psi_{g_k}(h)\psi^*_{g_k}(q)=$$

$$=\Big(\prod_{k=0}^{N-1}\nu_{g_k}(\lambda)\Big)^{-1}\sum_{r=0}^{N-1}\Big[\prod_{l\neq r}\nu_{g_l}(\lambda)\psi^*_{g_r}(q)-N\Big(\sum_{k=0}^{N-1}\prod_{n\neq k}\nu_{g_n}(\lambda)\Big)^{-1}\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{N-1}\prod_{l\neq r}\nu_{g_l}(\lambda)\prod_{n\neq k}\nu_{g_n}(\lambda)\psi^*_{g_r}(h)\psi_{g_k}(h)\psi^*_{g_k}(q)\Big]\psi^{\overline{H}}_{g_r}=$$

$$=\Big(\prod_{k=0}^{N-1}\nu_{g_k}(\lambda)\Big)^{-1}\Big(\sum_{k=0}^{N-1}\prod_{n\neq k}\nu_{g_n}(\lambda)\Big)^{-1}\times$$

$$\times\sum_{r=0}^{N-1}\Big[\sum_{k=0}^{N-1}\prod_{l\neq r}\nu_{g_l}(\lambda)\prod_{n\neq k}\nu_{g_n}(\lambda)\big(\psi^*_{g_r}(q)-N\psi^*_{g_r}(h)\psi_{g_k}(h)\psi^*_{g_k}(q)\big)\Big]\psi^{\overline{H}}_{g_r}=$$

$$=\Big(\sum_{k=0}^{N-1}\prod_{n\neq k}\nu_{g_n}(\lambda)\Big)^{-1}\sum_{r=0}^{N-1}\Big[\sum_{k\neq r}\prod_{l\neq k}\nu_{g_l}(\lambda)\big(\psi^*_{g_r}(q)-$$

$$-N\psi^*_{g_r}(h)\psi_{g_k}(h)\psi^*_{g_k}(q)\big)\Big]\psi^{\overline{H}}_{g_r}.$$

Подставляя в (7) полученное выражение, получаем соотношение (6). Следствие 2 доказано.

4. Классическая задача о разорении. Рассмотрим классическую задачу о разорении. Пусть $G_N = C_N$ — циклическая группа; $(\zeta(t);\, t \geq 0)$ — случайное блуждание со значениями в группе C_N и с матрицей переходных вероятностей

$$P = \begin{pmatrix} 0 & p & 0 & \cdots & 0 & q \\ q & 0 & p & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p & 0 & 0 & \cdots & q & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть $H = \{g_0\}$, $Q = \{g_1\}$. В этом случае соотношение (6) примет вид

$$\varphi_{g_0}(g_1; \lambda) = \sum_{k=0}^{N-1}(1-\nu_{g_k}(\lambda))\chi_{g_k}(g_1)\chi^*_{g_k}(g_0)\Big(\sum_{k=0}^{N-1}\prod_{n\neq k}\nu_{g_n}(\lambda)\Big)^{-1}\times$$

$$\times\sum_{r=0}^{N-1}\Big[\sum_{k\neq r}\prod_{l\neq k}\nu_{g_l}(\lambda)(\chi^*_{g_r}(g_1)-\chi^*_{g_k}(g_1))\Big]\chi^{\overline{H}}_{g_r}.$$

Перепишем последнее соотношение в виде

$$\varphi_{g_0}(g_1; \lambda) = \sum_{k=0}^{N-1}(1-\nu_{g_k}(\lambda))\chi_{g_k}(g_1)\chi^*_{g_k}(g_0)\Big(\sum_{k=0}^{N-1}\prod_{n\neq k}\nu_{g_n}(\lambda)\Big)^{-1}\times$$

$$\times\sum_{r=0}^{N-1}\Big[\sum_{k=0}^{N-1}\prod_{l\neq k}\nu_{g_l}(\lambda)\chi^*_{g_r}(g_1)-\sum_{k=0}^{N-1}\prod_{l\neq k}\nu_{g_l}(\lambda)\chi^*_{g_k}(g_1)\Big]\nu^{-1}_{g_r}F(\lambda)\chi^{\overline{H}}_{g_r}.$$

Отсюда для произвольной компоненты вектор-функции $\varphi_{g_0}(g_1; \lambda)$ имеем

$$\varphi_{g_0}(g_1, g_j; \lambda) = \sum_{k=0}^{N-1}(1-\nu_{g_k}(\lambda))\chi_{g_k}(g_1)\chi^*_{g_k}(g_0)\Big(\sum_{k=0}^{N-1}\prod_{n\neq k}\nu_{g_n}(\lambda)\Big)^{-1}\Big(\prod_{r=0}^{N-1}\nu_{g_r}(\lambda)\Big)^{-1}\times$$

$$\times N^{-1/2}\Big[\sum_{k=0}^{N-1}\prod_{l\neq k}\nu_{g_l}(\lambda)\sum_{r=0}^{N-1}\prod_{l\neq r}\nu_{g_l}(\lambda)\chi_{g_r}(g_{N-1+j})-$$

$$-\sum_{k=0}^{N-1}\prod_{l\neq k}\nu_{g_l}(\lambda)\chi_{g_k}(g_{N-1})\sum_{r=0}^{N-1}\prod_{l\neq r}\nu_{g_l}(\lambda)\chi_{g_r}(g_j)\Big]. \tag{8}$$

Так как $\nu_{g_l}(\lambda), l=\overline{0, N-1}$, являются собственными значениями матрицы $I - e^{i\lambda}P$, то $\prod_{r=0}^{N-1}\nu_{g_r}(\lambda)$ — определитель матрицы $I - e^{i\lambda}P$, а $N^{-1/2}\sum_{r=0}^{N-1}\prod_{l\neq r}\nu_{g_l}(\lambda)\times\chi_{g_r}(g_k)$ — сумма главных миноров порядка $N-1$ матрицы $(I - e^{i\lambda}P)S^{N-k}$, $k=\overline{0, N-1}$, S — перестановочная матрица. Введем обозначения: $\det(I - e^{i\lambda}P) = B$, $\sum_{r=0}^{N-1}\prod_{l\neq r}\nu_{g_l}(\lambda)\chi_{g_r}(g_k) = N^{1/2}B^{(N-k)}_{N-1}$. В новых обозначениях (8) примет вид

$$\varphi_{g_0}(g_1, g_j; \lambda) = \frac{e^{i\lambda}q}{B^{(0)}_{N-1}B}\Big[B^{(0)}_{N-1}B^{N-(j-1)}_{N-1} - B^{(1)}_{N-1}B^{N-j}_{N-1}\Big].$$

Из последнего равенства после преобразований получаем

$$\varphi_{g_0}(g_1, g_j; \lambda) = \left(e^{i\lambda}q\right)^j\frac{T_{N-j-1}}{T_{N-1}}, \tag{9}$$

где через T_{N-j-1}, T_{N-1} обозначены трехдиагональные определители соответствующих порядков; $T_{N-1} = B_{N-1}^{(0)}$.

Вычислим T_{N-j-1} и T_{N-1}:

$$T_{N-j-1} = \frac{\left(1+\sqrt{1-4e^{2i\lambda}pq}\right)^{N-j} - \left(1-\sqrt{1-4e^{2i\lambda}pq}\right)^{N-j}}{2^{N-j}\sqrt{1-4e^{2i\lambda}pq}},$$

$$T_{N-1} = \frac{\left(1+\sqrt{1-4e^{2i\lambda}pq}\right)^{N} - \left(1-\sqrt{1-4e^{2i\lambda}pq}\right)^{N}}{2^{N}\sqrt{1-4e^{2i\lambda}pq}}.$$

Подставим полученные выражения в (9):

$$\varphi_{g_0}(g_1, g_j; \lambda) = \left(2e^{i\lambda}q\right)^j \frac{\left(1+\sqrt{1-4e^{2i\lambda}pq}\right)^{N-j} - \left(1-\sqrt{1-4e^{2i\lambda}pq}\right)^{N-j}}{\left(1+\sqrt{1-4e^{2i\lambda}pq}\right)^{N} - \left(1-\sqrt{1-4e^{2i\lambda}pq}\right)^{N}}. \quad (10)$$

Формула (10) дает возможность вычислить характеристическую функцию вероятности достижения единицы группы (разорения) случайным блужданием $(\zeta(t); t \geq 0)$ с началом в элементе g_j.

Заметим, что умножив и разделив правую часть (10) на $(2e^{i\lambda}p\,q)^j$, получим в точности характеристическую функцию вероятности разорения при t-м испытании, приведенную в [8, с. 365].

1. *Гренандер У.* Вероятности на алгебраических структурах. – М. : Мир, 1965. – 276 с.
2. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения : В 2-х т. – М. : Мир, 1984. – Т. 2. – 752 с.
3. *Жданова Ю. Д.* Распределение момента достижения для случайного блуждания на конечной разрешимой группе // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, №10. – С. 1395 – 1398.
4. *Good I. J.* Random motion on a finite Abelian group // Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1951.– **47**. – P. 756 – 762.
5. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. – М. : Наука, 1982. – 288 с.
6. *Жданова Ю. Д.* Спектральное разложение для функции от матрицы, связанной с конечной разрешимой группой // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, №9. – С. 1204 – 1207.
7. *Жданова Ю. Д.* Задача о разорении на конечной разрешимой группе // Асимптотические и прикладные задачи теории случайных эволюций. – Киев : Ин-т математики АН УССР, 1990. – С. 35 – 42.
8. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения : В 2-х т. – М. : Мир, 1984. – Т. 1. – 528 с.

Получено 04. 06. 92