УДК 517.9

В. Г. Самойленко, д-р физ.-мат. наук (Ин-т математики АН Украины, Киев)

ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ

Рассмотрены некоторые аспекты применения методов дифференциальной геометрии для исследования интегрируемости нелинейных динамических систем, заданных на бесконечномерных функциональных многообразиях.

Розглянуто деякі аспекти застосування методів диференціальної геометрії для дослідження інтегровності нелінійних динамічних систем, що задані на нескінченновимірних функціональних многовидах.

Пусть $N, M,$ $\dim N = n,$ $\dim M = m,$ — пара гладких конечномерных действительных многообразий с локальными координатами соответственно $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ и $u = (u_1, u_2, \ldots, u_m) \in \mathbb{R}^m$. Множество гладких отображений $N \to M$ задает на паре (N, M) естественную структуру расслоенного пространства. С помощью стандартного k-струйного расширения [1 – 4] сечений расслоения $(N \to M)$ определена бесконечная иерархия гладких расслоений $\mathcal{J}^{(k)}(N; M), k \in \mathbb{Z}_+$, согласованная цепочкой проекций

$$\begin{tikzcd} N & & & & \\ & \mathcal{J}^{(0)}(N;M) \arrow[ul] \arrow[dl] & \mathcal{J}^{(1)}(N;M) \arrow[l] & \mathcal{J}^{(2)}(N;M) \arrow[l] & \ldots . \arrow[l] \\ M & & & & \end{tikzcd} \quad (1)$$

Цепочка (1) конечномерных многообразий $\mathcal{J}^{(k)}(N; M), k \in \mathbb{Z}_+$, имеющая название многообразий k-джетов (или k-струй), позволяет определить бесконечномерное многообразие $\mathcal{J}^{(\infty)}(N; M)$ как обратный предел $\mathcal{J}^{(\infty)}(N; M) = \operatorname*{inv\,lim}_{k \in \mathbb{Z}_+} \mathcal{J}^{(k)}(N; M)$ конечномерных многообразий k-джетов $\mathcal{J}^{(k)}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$, $k \in \mathbb{Z}_+$ [1, 2]. Аналогично определяются касательные и кокасательные пространства над $\mathcal{J}^{(\infty)}(N; M) \equiv \mathcal{J}^{(\infty)}$:

$$T(\mathcal{J}^{(\infty)}) = \operatorname*{inv\,lim}_{k \in \mathbb{Z}_+} T(\mathcal{J}^{(k)}), \; T^*(\mathcal{J}^{(\infty)}) = \operatorname*{inv\,lim}_{k \in \mathbb{Z}_+} T^*(\mathcal{J}^{(k)}), \tag{2}$$

а также модуль векторных полей $\mathcal{T}(\mathcal{J}^{(\infty)})$ и алгебра Грассмана $\Lambda(\mathcal{J}^{(\infty)})$ дифференциальных форм. На многообразии $\mathcal{J}^{(\infty)}(N; M)$ определены векторные поля

$$\frac{d}{dx_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{i,\,k} u_i^{(k,j)} \frac{\partial}{\partial u_i^{(k)}} \in \mathcal{T}(\mathcal{J}^{(\infty)}), \quad j = \overline{1, n}, \tag{3}$$

где $\{x_j, u_i, u_i^{(1)}, \ldots, u_i^{(k)}, \ldots\}$ — локальные координаты на $\mathcal{J}^{(\infty)}(N; M)$, причем по определению $\frac{d}{d x_j} u_i^{(k)} = u_i^{(k,j)} \in \left\{u_i^{(k+1)}\right\}$, $i = \overline{1, m}$. Алгебра Грассмана $\Lambda(\mathcal{J}^{(\infty)}) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}_+} \Lambda^j(\mathcal{J}^{(\infty)})$, где $\Lambda^j(\mathcal{J}^{(\infty)})$ — $\mathbb{R}$-модуль дифференциальных j-форм на $\mathcal{J}^{(\infty)}$, образует [5] комплекс

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{d} \Lambda^0 \xrightarrow{d} \Lambda^1 \xrightarrow{d} \Lambda^2 \xrightarrow{d} \ldots \xrightarrow{d} \Lambda^j \xrightarrow{d} \ldots, \tag{4}$$

являющийся точным в силу d-леммы Пуанкаре [6]. В (4) операция $d : \Lambda^j \to \Lambda^{j+1}$

— внешнее дифференцирование (являющееся антидифференцированием ранга 1 алгебры Грассмана $\Lambda(\mathcal{J}^{(\infty)})$).

В силу своей конструкции многообразие $\mathcal{J}^{(k)}(N;M)$ содержит локально точки многообразия N-базы естественного расслоения $(M \to N)$, которые в дальнейшем будем называть независимыми переменными. В соответствии с этим разложим модуль Λ^j, $j \in \mathbb{Z}_+$, в прямую сумму подмодулей

$$\Lambda^j = \bigoplus_{k=0}^{j} \Lambda^{((j-k)\,|\,k)}, \tag{5}$$

где по определению локально $\Lambda^{(j\,|\,k)} = \Lambda^j(M^{(\infty)}) \wedge \Lambda^k(N)$, $M^{(\infty)}$ — джет-расширение многообразия M. С учетом разложения (5) определим следующую операцию $\mathcal{D}\colon \Lambda^{(j\,|\,k)} \to \Lambda^{(j\,|\,(k+1))}$ согласно правилу

$$\mathcal{D}\alpha = \sum_{j=1}^{n} dx_j \wedge L_{d/dx_j}\alpha, \tag{6}$$

где $\alpha \in \Lambda^{(j\,|\,k)}$, $L_K = i_K d + d\, i_K$ — производная Ли [3, 4, 6] в направлении векторного поля $K \in \mathcal{T}(\mathcal{J}^{(\infty)})$, i_K — обычное внутреннее антидифференцирование в направлении векторного поля K.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Для всех* $j \in \mathbb{Z}_+$ *комплекс*

$$0 \longrightarrow \delta_{j,0}\mathbb{R} \longrightarrow \Lambda^{(j\,|\,0)} \xrightarrow{\mathcal{D}} \Lambda^{(j\,|\,1)} \xrightarrow{\mathcal{D}} \ldots \xrightarrow{\mathcal{D}} \Lambda^{(j\,|\,k)} \xrightarrow{\mathcal{D}} \ldots \tag{7}$$

является точным, причем справедлива формула

$$d\mathcal{D} + \mathcal{D}d = 0. \tag{8}$$

Доказательство непосредственно следует из определения отображения $\mathcal{D}$ с помощью формулы (6) и из формулы для производной Ли.

Заметим теперь, что внешнее дифференцирование $d\colon \Lambda^j(\mathcal{J}^{(\infty)}) \to \Lambda^{j+1}(\mathcal{J}^{(\infty)})$ как линейное отображение можно естественным образом представить в виде $d = d_x + d_u$, где $d_x\colon \Lambda^{(j\,|\,k)} \to \Lambda^{(j\,|\,(k+1))}$, $d_u\colon \Lambda^{(j\,|\,k)} \to \Lambda^{((j+1)\,|\,k)}$ для всех $j, k \in \mathbb{Z}_+$. В силу точности комплекса (4) точны также подкомплексы

$$\begin{gathered} \Lambda^{(j\,|\,0)} \xrightarrow{d_x} \Lambda^{(j\,|\,1)} \xrightarrow{d_x} \ldots \xrightarrow{d_x} \Lambda^{(j\,|\,k)} \xrightarrow{d_x} \ldots, \\ \Lambda^{(0\,|\,k)} \xrightarrow{d_u} \Lambda^{(1\,|\,k)} \xrightarrow{d_u} \ldots \xrightarrow{d_u} \Lambda^{(j\,|\,k)} \xrightarrow{d_u} \ldots,\ k, j \in \mathbb{Z}_+. \end{gathered} \tag{9}$$

Определим теперь следующий комплекс:

$$\Lambda_*^{(0\,|\,k)} \xrightarrow{d_*} \Lambda_*^{(1\,|\,k)} \xrightarrow{d_*} \ldots \xrightarrow{d_*} \Lambda_*^{(j\,|\,k)} \xrightarrow{d_*} \ldots, \tag{10}$$

где $\Lambda_*^{(j\,|\,k)} = \Lambda^{(j\,|\,k)} / \mathcal{D}\Lambda^{(j\,|\,(k-1))}$, $j, k \in \mathbb{Z}_+$, и $d_*\colon \Lambda^{(j\,|\,k)} \to \Lambda^{((j+1)\,|\,k)}$ — фактор-отображение, индуцированное отображением $d_u\colon \Lambda^{(j\,|\,k)} \to \Lambda^{((j+1)\,|\,k)}$ после перехода к фактор-модулям $\Lambda_*^{(j\,|\,k)}$.

Теорема 2. *Комплекс* (10) *является точным для всех* $k \in \mathbb{Z}_+$.

Доказательство следует из рассмотрения свойств комплексов (7) и (10), формулы (8) и применения метода математической индукции.

Зафиксируем теперь на многообразии N форму объема $dx = dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \ldots \wedge dx_n$, позволяющую отождествить подмодуль $\Lambda^{(j|n)}$ с подмодулем $\Lambda^{(j|0)}$ с помощью формулы $\Lambda^{(j|0)} \ni \alpha \simeq \alpha \wedge dx \in \Lambda^{(j|n)}$. Тогда гомоморфизм $\mathcal{D}$: $\Lambda^{(j|(k+1))} \to \Lambda^{(j|k)}$ можно идентифицировать с дивергентным оператором

$$\mathrm{Div}\colon \Lambda^{(j|0)\,n} \to \Lambda^{(j|0)},\ \mathrm{Div} = (L_{d/dx_1}, \ldots, L_{d/dx_n}).$$

Следовательно, определяя при всех $j \in \mathbb{Z}_+$ фактор-модуль

$$\Lambda_*^{(j)} = \Lambda^{(j|0)} / \mathrm{Div}\,(\Lambda^{(j|0)n}) \simeq \Lambda^{(j|n)} / \mathcal{D}\,\Lambda^{(j|(k-1))}, \tag{11}$$

можно переформулировать комплекс (10) следующим образом:

$$0 \longrightarrow \Lambda_*^{(0)} \xrightarrow{d_*} \Lambda_*^{(1)} \xrightarrow{d_*} \ldots \xrightarrow{d_*} \Lambda_*^{(j)} \xrightarrow{d_*} \ldots . \tag{12}$$

Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Комплекс* (12) *точен.*

Введем на алгебре Грассмана вариационный оператор [7] Эйлера $\delta/\delta u_j$: $\Lambda\,(\mathcal{J}^{(\infty)}) \to \Lambda\,(\mathcal{J}^{(\infty)})$, $j = \overline{1,m}$, определяемый выражением

$$\frac{\delta}{\delta u_j} = \sum_{|k| \in \mathbb{Z}_+} (-1)^{|k|} \prod_{s=1}^{n} \left(\frac{d}{dx_s}\right)^{k_s} L_{\partial/\partial u_j^{(k)}}, \tag{13}$$

где $k = (k_1, k_2, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, $|k| = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$, $L_{d/dx_j} = d/dx_j$, $\prod_{s=1}^{n} \left(\frac{d}{dx_s}\right)^{k_s} u_j = u_j^{(k)}$.

Пусть элемент $\alpha \in \Lambda_*^j\,(\mathcal{J}^{(\infty)})$, $j \in \mathbb{Z}_+$. Тогда, используя теорему 3, можно записать

$$d_u\,\alpha = d_*\,\alpha + \sum_{k=1}^{n} \frac{d}{dx_k}\,\beta_k,\ d_*\,\alpha = \left\langle \frac{\delta\alpha}{\delta u}, du \right\rangle, \tag{14}$$

где $\beta_k \in \Lambda_*^{(j+1)}\,(\mathcal{J}^{(\infty)})$, $k = \overline{1,n}$, — некоторые $(j+1)$-формы.

Рассмотрим более детально случай $\dim N = n = 1$. Тогда для любого локального функционала $\mathfrak{L}\,[u] \in \Lambda_*^{(0)}\,(\mathcal{J}^{(\infty)})$ имеем

$$d_u\,\mathfrak{L}\,[u] = d_*\,\mathfrak{L}\,[u] + \frac{d}{dx}\,\omega^{(1)}\,[u], \tag{15}$$

где $\omega^{(1)}\,[u] \in \Lambda_*^{(1)}\,(\mathcal{J}^{(\infty)})$, $d_*\,\mathfrak{L}\,[u] = \langle \delta\,\mathfrak{L}\,[u] / \delta\,u,\ d\,u \rangle$, $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ — стандартная билинейная форма на $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$. Так как элемент $\mathfrak{L}\,[u] \in \Lambda_*^{(0)}\,(\mathcal{J}^{(\infty)})$, то определен также однозначно на $\mathcal{J}^{(\infty)}(N; M)$ глобальный функционал $\mathfrak{L} = \int_N \mathfrak{L}\,[u]\,dx \in \mathbb{R}$.

Для этого функционала определена операция градиента:

$$\operatorname{grad} \mathfrak{C} = (\delta \mathfrak{C}[u] / \delta u_1, \delta \mathfrak{C}[u] / \delta u_2, \ldots, \delta \mathfrak{C}[u] / \delta u_m)^{\tau} = \delta \mathfrak{C}[u] / \delta u.$$

Обозначим через $\mathbb{M} \simeq C^{(\infty)}(N; \mathbb{R}^m)$ бесконечномерное многообразие гладких на N функций, которое будем считать диффеоморфным бесконечномерному многообразию джетов $\mathcal{J}^{(\infty)}(N; M)$. При этом, естественно, глобальному функционалу $\mathfrak{C} \in \mathcal{D}(\mathbb{M})$ на многообразии $\mathbb{M}$ соответствует локальный функционал $\mathfrak{C}[u] \in \mathcal{D}(\mathcal{J}^{(\infty)})$ на многообразии джетов $\mathcal{J}^{(\infty)}(N; M)$. В дальнейшем будем предполагать, что все функционалы на $\mathbb{M}$ (или на $\mathcal{J}^{(\infty)}(N; M)$) являются гладкими по Фреше.

Интегрируя формулу (15) по мере dx на N, находим

$$\int\limits_N d_u \mathfrak{C}[u]\, dx = \int\limits_N \langle \operatorname{grad} \mathfrak{C}[u], du \rangle\, dx. \tag{16}$$

Таким образом, внешнему дифференциалу $d_u \mathfrak{C}[u] \in \Lambda_{\bullet}^{(1)}(\mathcal{J}^{(\infty)})$ взаимно однозначно соответствует градиент $\operatorname{grad} \mathfrak{C} \in T^*(\mathbb{M}) \simeq \Lambda^{(1)}(\mathbb{M})$, и наоборот. Из (16) получаем

$$\operatorname{grad} \mathfrak{C} = \mathfrak{C}'^{*}[u] \cdot 1, \tag{17}$$

где " $'$ " обозначает производную Фреше, а "$*$" — стандартное сопряжение относительно естественной билинейной формы $(\cdot, \cdot) = \int_N \langle \cdot, \cdot \rangle\, dx$ на $T^*(\mathbb{M}) \times T(\mathbb{M})$.

Рассмотрим теперь ряд формул для действия производной Ли $L_K = i_K d + d i_K$ ($d = d_u$ на $\Lambda_{\bullet}(\mathcal{J}^{(\infty)})$) вдоль векторного поля $K \in \mathcal{T}(\mathbb{M}) \simeq \mathcal{T}(\mathcal{J}^{(\infty)})$:

если $\mathfrak{C} \in \mathcal{D}(\mathbb{M})$; $\mathfrak{C}[u] \in \Lambda_{\bullet}^{(0)}(\mathcal{J}^{(\infty)})$, то

$$L_K \mathfrak{C} = \int\limits_N \langle \operatorname{grad} \mathfrak{L}, K \rangle dx,$$

$$L_K \mathfrak{C}[u] = d\, \mathfrak{C}[u] \cdot K[u] = \mathfrak{C}'[u] \cdot K[u];$$

если $Y \in \mathcal{T}(\mathbb{M}) \simeq \mathcal{T}(\mathcal{J}^{(\infty)})$, $\varphi \in T^*(\mathbb{M})$, то

$$\begin{aligned} L_K Y &= [K, Y] = Y' \cdot K - K' \cdot Y, \\ L_K \varphi &= \varphi' \cdot K + K'^{*} \cdot \varphi; \end{aligned} \tag{18}$$

если $\mathfrak{L}\colon T^*(\mathbb{M}) \to T(\mathbb{M})$, $\Omega : T(\mathbb{M}) \to T^*(\mathbb{M})$, то

$$L_K \mathfrak{L} = \mathfrak{L}' K - \mathfrak{L} K'^{*} - K' \cdot \mathfrak{L},$$

$$L_K \Omega = \Omega' \cdot K + K'^{*} \cdot \Omega + \Omega K'.$$

Если при этом $d\Omega = 0$, где $\Omega \in \Lambda^1(\mathbb{M}) \simeq \operatorname{Hom} T^*(\mathbb{M}); T(\mathbb{M}))$, то существует элемент $\varphi \in T^*(\mathbb{M})$, для которого

$$\langle \varphi[u], K[u] \rangle = \int\limits_0^1 \langle \Omega[\lambda u] \cdot \lambda u, K[u] \rangle\, du. \tag{19}$$

При этом справедливы следующие формулы для всех $K \in \mathcal{T}(\mathbb{M})$, $\varphi \in T^*(\mathbb{M})$:

$$L_K\ \Omega = (\Omega K)' - (\Omega K)'^*,$$

$$L_{\mathfrak{L}\varphi} \mathfrak{L} = -\mathfrak{L}(\varphi' - \varphi'^*)\mathfrak{L}. \tag{20}$$

Пусть функционал $Q \in \mathcal{D}(\mathbb{M})$ имеет вид

$$Q = \int_N \langle u^{(1)},\ \mathrm{grad}\ \mathcal{L}\rangle\, dx. \tag{21}$$

Из условия $\mathrm{grad}\, Q = 0$ необходимо следует существование такого локального функционала $h[u] \in \mathcal{D}(\mathcal{J}^{(\infty)})$, что

$$-\frac{d}{dx}\, h[u] = \langle u^{(1)},\ \mathrm{grad}\ \mathcal{L}\rangle. \tag{22}$$

Рассмотрим теперь внешний d_u-дифференциал тождества (15). Имеем

$$-\frac{d}{dx}\, \omega^{(2)}[u] = -\langle d\, \mathrm{grad}\ \mathcal{L}, du\rangle, \tag{23}$$

где $\omega^{(2)}[u] = d\omega^{(1)}[u] \in \Lambda_*^{(2)}(\mathcal{J}^{(\infty)})$ — замкнутая 2-форма на многообразии $\mathcal{J}^{(\infty)}(N; M)$, которая, как правило, вырождена на $\mathcal{J}^{(\infty)}(N; M)$, а ее ограничение на инвариантное подмногообразие нормального лагранжиана $\mathcal{L}[u] \in \mathcal{D}(\mathcal{J}^{(\infty)})$ оказывается невырожденным [4, 7, 8].

Обозначим через $\Theta^{(1)}[u] \in \Lambda_*^{(1)}(\mathcal{J}^{(\infty)})$ 1-форму на $\mathcal{J}^{(\infty)}(N; M)$, для которой выполнено равенство $\omega^{(2)}[u] = d\,\Theta^{(1)}[u]$, где $\omega^{(2)}[u] \in \Lambda_*^{(2)}(\mathcal{J}^{(\infty)})$ — симплектическая структура на $\mathcal{J}^{(\infty)}(N;M)$, относительно которой векторное поле $d/dx \in \mathcal{T}(\mathcal{J}^{(\infty)})$ гамильтоново. По определению это значит, что существует такой локальный функционал $\gamma[u] \in \mathcal{D}(\mathcal{J}^{(\infty)})$, $d\gamma[u]/dx = 0$, что $i_{d/dx}\,\omega^{(2)}[u] = -d\gamma[u]$ на $\mathcal{J}^{(\infty)}$. Используя формулу Картана для производной Ли $L_{d/dx}$, находим, что для глобального функционала $\gamma \in \mathcal{D}(\mathbb{M})$, удовлетворяющего условию гамильтоновости [9,10]

$$\frac{du}{dx} = \mathfrak{L}\ \mathrm{grad}\,\gamma \tag{24}$$

с имплектическим оператором $\mathfrak{L}: T^*(\mathbb{M}) \to T(\mathbb{M})$, справедливо равенство [9]

$$\gamma = \int_N \gamma[u]\, dx \equiv (\theta[u], u_x), \tag{25}$$

где по определению $\Theta[u] = \langle \theta[u], du\rangle + d\beta^{(1)}[u]/dx$, $\beta^{(1)}[u] \in \Lambda_*^{(1)}(\mathcal{J}^{(\infty)})$ — некоторая однозначно определяемая 1-форма на $\mathcal{J}^{(\infty)}(N; M)$. Вычисляя теперь по формуле $\omega^{(2)}[u] = d\,\Theta^{(1)}[u]$ коимплектический оператор $\mathfrak{L}^{(-1)}: T(\mathbb{M}) \to T^*(\mathbb{M})$, находим

$$\mathfrak{L}^{(-1)} = \theta'[u] - \theta'^*[u]. \tag{26}$$

Если для оператора $\mathfrak{L}^{(-1)}$ (26) существует обратный, то формула (26) необходимо задает невырожденную симплектическую структуру на многообра-

$\mathbb{M}$, индуцированную симплектической структурой на джет-многообразии
$N; M)$.

Iусть теперь на бесконечномерном гладком многообразии $\mathbb{M} = C^{(\infty)}(N; M)$
на нелинейная однородная динамическая система в виде

$$u_t = K[u], \tag{27}$$

$K : \mathbb{M} \to T(\mathbb{M})$ — гладкое по Фреше векторное поле на $\mathbb{M}$, $t \in \mathbb{R}$ —эво-
ионный параметр. Будем для определенности считать, что векторное поле
порождает глобальную однопараметрическую группу диффеоморфизмов
ообразия $\mathbb{M}$ для всех начальных точек $x \in \mathbb{M}$. В силу предполагаемого
феоморфизма многообразий $\mathbb{M}$ и $\mathcal{J}^{(\infty)}(N; M)$ очевидно, что векторное по-
7) в общем случае эквивалентно векторному нелинейному эволюционному
нению в частных производных, исследование которого в общем случае за-
нительно. В связи с этим ограничимся рассмотрением такого класса век-
ых полей (27) на $\mathbb{M}$, для которого существуют дополнительные диффе-
иально-геометрические структуры, такие как, гамильтоновость, нетерова
риантность и др.

ак отмечалось выше, если оператор $\mathfrak{L} : T^*(\mathbb{M}) \to T(\mathbb{M})$ является им-
тическим на $\mathbb{M}$ и нетеровым для динамической системы (27), т.е. соглас-
20) $L_K \mathfrak{L} = \mathfrak{L}' \cdot K - \mathfrak{L}K'^* - K' \cdot \mathfrak{L} = 0$, то необходимо существует такой
ционал Гамильтона $H \in \mathcal{D}(\mathbb{M})$, для которого справедливо равенство

$$u_t = -\mathfrak{L} \operatorname{grad} H = K[u]. \tag{28}$$

общем случае, если имплектический оператор $\mathfrak{L}$ априори не задан, то
йное уравнение нетеровости $L_K \mathfrak{L} = 0$ можно рассматривать в качестве
торного уравнения для его определения [11]. Необходимо здесь также
тить большие вычислительные трудности нахождения решения уравнения
овости $L_K \mathfrak{L} = 0$ в явном виде, поэтому другие подходы к определению
ектического оператора $\mathfrak{L}$ в (28) представляют значительный практичес-
теоретический интерес.

едположим теперь, что динамическая система (27) имеет счетное число
ционально независимых законов сохранения $\gamma_j \in \mathcal{D}(\mathbb{M})$, $j \in \mathbb{Z}_+$, естест-
ым образом упорядоченных дифференциальными порядками плотностей
$\in \mathcal{D}(\mathcal{J}^{(\infty)})$, $j \in \mathbb{Z}_+$. Пусть $\mathbb{M}_n \subsetneq \mathbb{M}$ — конечномерное подмногообразие
, $\dim \mathbb{M}_n < \infty$, определяемое следующим соотношением: $\operatorname{grad} \mathfrak{C}_n = 0$, где

$$\mathfrak{C}_n = \gamma_n + \sum_{j=0}^{n-1} c_j^{(n)} \gamma_j, \tag{29}$$

$\overline{0,\ n-1}$, — некоторые действительные числа.

гко устанавливается [12, 11], что при указанных выше условиях подмно-
азие $\mathbb{M}_n \subsetneq \mathbb{M}$ является инвариантным относительно векторного по-
7).

ссмотрим тождество (23) при $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_n$. Тогда несложно установить,что
етствующая 2-форма $\omega_n^{(2)}[u] \in \Lambda_{\bullet}^{(2)}(\mathcal{J}^{(\infty)})$ будет симплектической и инва-
ной относительно векторного поля $\frac{d}{dx} \in \mathcal{T}(\mathcal{J}^{(\infty)})$, т.е. векторное поле

$\frac{d}{dx} \in \mathcal{T}^{*}(\mathcal{J}^{(\infty)})$ на подмногообразии $\mathbb{M}_n \simeq \mathcal{J}^{(n_0)}(N; M)$, где $\mathbb{Z}_+ \ni n_0 < \infty$, является гамильтоновым. Из (22) следует, что элемент $h_n[u] \in \mathcal{D}(\mathcal{J}^{(n_0)})$ будет соответствующей функцией Гамильтона, что гарантируется тождеством

$$dh_n[u] = -i_{d/dx}\, \omega_n^{(2)}\, [u] - \langle \operatorname{grad} \mathfrak{L}_n, du \ \rangle. \tag{30}$$

Рассмотрим на $\mathcal{J}^{n_0)}$ обобщенные импульсы

$$p_j^{(s)} = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} (-1)^k \left(\frac{d}{dx}\right)^k \frac{\partial}{\partial u_s^{(k+j+1)}} \mathfrak{L}_n[u], \tag{31}$$

где $s = \overline{1, m}$; $j \in \mathbb{Z}_+$; $\dfrac{d}{dx}\, p_j^{(s)} = -\, p_{j-1}^{(s)} + \dfrac{\partial}{\partial u_s^{(j)}} \mathfrak{L}_n[u]$.

В силу (29) набор $\left\{p_j^{(s)}: j \in \mathbb{Z}_+\right\}$ в (31) является конечным. При этом в случае невырожденности функционала $\mathfrak{L}_n$ справедливы формулы

$$\begin{gathered} h_n[u] = \sum_{j \in \mathbb{Z}_+} \langle p_j, u^{(j+1)} \rangle - \mathfrak{L}_n, [u], \\ \omega_n^{(2)}[u] = \sum_{j \in \mathbb{Z}_+} \langle dp_j, \wedge du^{(j)} \rangle. \end{gathered} \tag{32}$$

Очевидно также, что 2-форма $\omega_n^{(2)}[u] \in \Lambda_*^{(2)}(\mathcal{J}^{(n_0)})$ является замкнутой и невырожденной, т.е. является симплектической на $\mathcal{J}^{(n_0)} \simeq \mathbb{M}_n$.

В силу инвариантности многообразия $\mathbb{M}_n \hookrightarrow \mathbb{M}$ относительно векторного поля (29) функция Гамильтона $h_n[u]$ (32) является на $\mathbb{M}_n \simeq \mathcal{J}^{(n_0)}$ также ее законом сохранения, т.е. инвариантом векторного поля d/dt:

$$\frac{d}{dt} h_n\,[u] = 0, \quad \frac{d}{dt} = \sum_{j=0}^{n_0} \langle K^{(j)}[u]\,, \frac{\partial}{\partial u^{(j)}} \rangle, \tag{33}$$

где $K^{(j)}[u] = (d/dt)^j K\,[u]$, $j = \overline{0, n}$. С учетом коммутативности векторных полей d/dx и $d/dt \in \mathcal{T}(\mathcal{J}^{(n_0)})$ установим свойство гамильтоновости системы (27) на $\mathbb{M}_n$, т. е. докажем существование такого элемента $f_n[u] \in \Lambda^0(\mathcal{J}^{(n_0)})$, для которого выполнено равенство [4, 7, 8]

$$d f_n[u] = -\, i_{d/dt}\, \omega^{(2)}[u]. \tag{34}$$

Условие (34) выполняется, так как $L_{d/dt} f_n[u] = 0$. Очевидно также, что $d f_n[u] / dx = 0$. Вводя соответствующую [10] скобку Пуассона $\{\cdot, \cdot\}^{(n)}$ на $\mathcal{J}^{(n_0)}$, заключаем,что справедливы соотношения

$$u_t^{(j)} = \left\{f_n\,[u], u^{(j)}\right\}^{(n)}, \quad u^{(j+1)} = \left\{h_n[u], u^{(j)}\right\}^{(n)}, \ j = \overline{0, n_0}, \tag{35}$$

причем $K[u] = u_t = \{f_n[u], u\}^{(n)}$. Если на джет-многообразии $(\mathcal{J}^{(n_0)})$ существует достаточное количество независимых законов сохранения $f_n^{(j)}[u]$, $j = \overline{0, q_n}$, $\mathbb{Z}_+ \ni q_n, < \infty$, находящихся в инволюции, то по теореме Лиувилля [5, 9, 10, 12] система (28) на $\mathbb{M}_n \subsetneq \mathbb{M}$ вполне интегрируема. Существование законов сохранения $f_n^{(j)}[u]$, $j = \overline{0, q_n}$, легко следует, если предположить, что законы сохранения $\gamma_j \in \mathcal{D}(\mathbb{M})$, $j = \overline{0,\ n}$, в (29) находятся в инволюции относительно скобки Пуассона $\{\cdot, \cdot\}_{\mathfrak{Z}} = \int_N \langle \mathrm{grad}\,(\cdot), \mathfrak{Z}\ \mathrm{grad}\,(\cdot) \rangle d\,x$ на многообразии $\mathbb{M}$, где $\mathfrak{Z}$ — имплектический и нетеров для системы (28) оператор. Тогда из условий $\{\mathfrak{Z}_n, \gamma_j\}_{\mathfrak{Z}} = 0$, $j = \overline{0,\ n}$, следует, что существует набор локальных функционалов $f_n^{(j)}\ [u]$, $j = \overline{0,\ n}$, для которых справедливо соотношение

$$\langle \mathrm{grad}\ \mathfrak{L}_n,\ \mathfrak{Z}\ \mathrm{grad}\ \gamma_j \rangle = \frac{d}{dx} f_n^{(j)}\ [u]. \tag{36}$$

Поскольку $\mathrm{grad}\ \mathfrak{L}_n = 0$ на $\mathbb{M}_n \subsetneq \mathbb{M}$, то из соотношения (36) находим, что на $\mathcal{J}^{(n_0)}$ выполняется равенство $\frac{d}{dx} f_n^{(j)}\ [u] = 0$ для $j = \overline{0,\ n}$. В силу инвариантности подмногообразия $\mathbb{M}_n \subsetneq \mathbb{M}$ относительно векторного поля (27)заключаем, что справедливо также равенство $\frac{d}{dt} f_n^{(j)}\ [u] = 0$ для $j = \overline{0,\ n}$. Таким образом, если динамическая система (28) вполне интегрируема на подмногообразии $\mathbb{M}_n \subsetneq \mathbb{M}$ при любом $n \in \mathbb{Z}_+$ и произвольном наборе чисел $\{ C_j^{(n)} \in \mathbb{R}$: $j = \overline{0, n-1} \}$, то, принимая во внимание, что многообразие $\mathrm{inv}\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{M}_n = \mathbb{M}^{\mathrm{reg}} \subsetneq \mathbb{M}$ является бесконечномерным, можем утверждать, что динамическая система (28) на бесконечномерном многообразии $\mathbb{M}^{\mathrm{reg}} \subsetneq \mathbb{M}$ является вполне интегрируемым по Лиувиллю гамильтоновым потоком.

Рассмотрим случай, когда $\dim N = n > 1$. Тогда из (14) получаем формулу

$$d_u \mathfrak{L}\ [u] = \langle \mathrm{grad}\ \mathfrak{L}, du \rangle + \mathrm{Div}\ \vec{\omega}^{(1)}\ [u],$$

из которой следует, что на инвариантном для динамической системы (27) многообразии $\mathbb{M}_{\mathrm{inv}} \subsetneq \mathbb{M}$ векторные поля d/dx_j, $j = \overline{1,\ n}$, уже не являются гамильтоновыми, так как для них не определена общая симплектическая структура $\omega^{(2)}[u] \in \Lambda^2 (\mathcal{J}^{(\infty)})$. На инвариантном многообразии $\mathbb{M}_{\mathrm{inv}}$ динамическая система (27) является гамильтоновой [13]. Действительно, определяя обобщенные импульсы $p_{(j)}^{(s)}$, $(j) = (j_1, j_2, \dots, j_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, $s = \overline{1, m}$, с помощью формул типа (31):

$$p_{(j)}^{(s)} = \sum_{(l)\in \mathbb{Z}_+^n} (-1)^{|l|} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{d}{dx_k} \right)^{l_k} \frac{\partial}{\partial u_s^{(l+j+1)}} \mathfrak{L}\ [u],$$

где $(l) = (l_1, l_2, \dots, l_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, $|\,l\,| = l_1 + l_2 + \dots + l_n$, $\frac{d}{dx_k} p_{(j)}^{(s)} = -p_{(j)_k}^{(s)} + \frac{\partial}{\partial u_s^{(j)}} \mathfrak{L}\ [u]$, $(j)_k = (j_1, \dots, j_{k-1}, j_k - 1, j_{k+1}, \dots, j_n)$, находим, что относительно канонической на $\mathbb{M}_{\mathrm{inv}}$ симплектической структуры

$$\omega^{(2)}[u] = \sum_{(j)\in \mathbb{Z}_+^n} \langle d\,p_{(j)}, \wedge\ d\,u^{(j)} \rangle$$

при условии, что лагранжиан $\mathfrak{L}\ [u]$ невырожденный, динамическая система

(27) гамильтонова, причем для функции Гамильтона имеем явное выражение

$$f[u] = \sum_{|j| \in \mathbb{Z}_+} \langle p_{(j)}, K^{(j)} \rangle - \mathfrak{L}[u],$$

т. е. $df[u] = -i_{d/dt}\,\omega^{(2)}[u]$ на $\mathbb{M}_{\mathrm{inv}} \subsetneq \mathbb{M}$.

1. *Васильев А. М.* Теория дифференциально-геометрических структур.– М.: Изд-во Моск. ун-та, 1987.– 190 с.
2. *Арнольд В. И., Варченко А. И., Гусейн-заде С.М.* Особенности дифференцируемых отображений.– М.: Наука, 1982.– 304 с.
3. *Olver P.J.* On the Hamiltonian structure of evolution equations // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.— 1980.– **88**, № 1.– P. 71–88.
4. *Гельфанд И. М., Дикий Л. А.* Асимптотика резольвенты штурм-лиувиллевских уравнений и алгебра уравнений Кортевега – де Фриза // Успехи мат. наук.– 1975.– **30**, № 5.– С. 67 – 100.
5. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия.– М.: Наука, 1984.– 710 с.
6. *Годбийон К.* Дифференциальная геометрия и аналитическая механика.– М.: Мир, 1973.– 188 с.
7. *Богоявленский О. И., Новиков С. П.* О связи гамильтоновых формализмов стационарных и нестационарных задач // Функцион. анализ и его прил.– 1976.— **10**, № 1.– С. 9—13.
8. *Самойленко В. Г., Прикарпатский А. К.* Алгебраическая структура градиентного метода построения критериев интегрируемости нелинейных динамических систем // Функциональные уравнения в статистической механике и нелинейные динамические системы.– Киев, 1986.– С. 19–56.– (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; № 86.53).
9. *Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д.* Гамильтонов подход в теории солитонов.– М.: Наука, 1986.– 528 с.
10. *Митропольский Ю. А.,. Боголюбов Н. Н. (мл.), Прикарпатский А. К., Самойленко В. Г.* Интегрируемые динамические системы.– Киев: Наук. думка, 1987. – 286 с.
11. *Митропольский Ю. А., Прикарпатский А. К., Самойленко В. Г.* Асимптотические методы построения имплектических и нетеровых операторов вполне интегрируемых гамильтоновых систем // Докл. АН СССР.– 1986.– **287**, № 6.– С. 1312–1317.
12. *Lax P. D.* Periodic solutions of the Korteweg — de Vries equation // Communs Pure and Appl. Math.– 1975.– **28**, № 1.– P. 141–188.
13. *Мохов О. И.* О гамильтоновости произвольной эволюционной системы на множестве стационарных точек ее интеграла // Изв. АН СССР. Сер. мат.– 1987.– **51**, № 6.– С. 1345-1351.
14. *Михайлов А. В., Шабат А. Б., Ямилов Р. И.* Симметрийный подход к классификации нелинейных уравнений. Полные списки интегрируемых систем // Успехи мат. наук.– 1987.– **42**, № 4.– С. 3–53.

Получено 13. 12. 91